奇異积分方程

〔苏联〕Н. И. 穆斯海里什維里 著

上海科学技术出版社

奇异积分方程

函数論边值問題及其在数学物理中的某些应用

〔苏联〕Н. И. 穆斯海里什維里 著
朱季訥 譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书系統地介紹了含有 Cauchy 积分主值的一維奇异积分方程(組)的理論以及函数論中某些边値問題的理論,从 Cauchy 型积分的基本性质談起,討論了在光滑的封閉圍綫和連續系数情形下的奇异积分方程、联結問題、边値問題等,其次再用了相当大的篇幅来介紹了这些理論在流体力学、势論、平面彈性理論以及在数学物理其他分枝中的某些应用.

本书系根据原书 1962 年第二版譯出.

本书的主要对象是数学、力学、物理各专业高年級学生、研究生、教师以及科学工作者. 本书特別可供綜合大学数学系函数論专門化、偏微分方程专門化以及积分方程专門化作为教学用书. 本书对技术科学工作者亦有一定参考价值.

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Граничные Задачи Теории Функций и Некоторые Их Приложения к Математической Физике

Н. И. Мусхелишвили

Физматгиз 第二版, 1962 年

奇 异 积 分 方 程

函数論边値問題及其在数学物理中的某些应用

朱 季 訥 譯

上海科学技术出版社出版 (上海瑞金二路 450 号)

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

商务印书館上海厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32　印張 21 24/32　排版字数 536,000

1966 年 2 月第 1 版　1966 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—2,000

統一书号 13119·678　定价(科六) 3.20 元

目 录

第二章　在光滑的封閉圍綫和連續系数情形下的联結問題及奇异积分方程

第三章 对一些边值問題的应用

第四章 一般情形下的联結問題. 某些应用

第五章 在一般情形下的奇异积分方程．某些应用

第六章 奇异积分方程組和若干个未知函数的联結問題

引 言

1°. 最近几年来，奇异积分方程理論在实际問題中显示出越来越大的作用. 在这一本书中，我們只討論含有 Cauchy 积分主値的一維① 奇异积分方程②.

差不多紧接着 Fredholm 积分方程經典理論的产生，由 H. Poincaré 及 D. Hilbert 的工作便奠定了这种类型的方程之理論基础. 可是，奇异积分方程的理論长期一直沒有受到数学家們应有的重視.

但是，最近几年来，一維的奇异积分方程理論大大地向前发展了，并且它現在已經具有了非常完善的形式.

在研究这一理論时，如果用到一个通常叫做 Riemann 問題或者 Hilbert 問題的，而我們把它叫做联結問題的边值問題的解，那么，这一理論便会变得特別有效.

因此，在讲解过程中，我們把奇异积分方程理論与联結問題的边值問題紧密地联系起来.

主要考虑到在数学物理各种問題中的应用，我們才对出現在所研究的积分方程中的，或者出現在所討論的問題之边界条件中的已知函数和未知函数，加以某些限制，而加这些限制一方面可以大大簡化叙述，另一方面亦并不会影响到理論的完善性.

Cauchy 型积分是我們研究和求解的基本工具，在第一章中，

---

① 我們这里指的是：积分区域是一維的（曲綫）.

② 某些著者用詞“奇特（особый）”来代替詞“奇异（сингулярный）”. 我采用了在习惯上早已用过的詞“奇异（сингулярный）”来表示具有 Cauchy 型核的积分方程（在本书只研究这一类方程）；不过，就我所知道，在更一般的意义下，才用詞“奇特（особый）”，亦就是，用它来表示不同于 Fredholm 型的其他任何类型的积分方程.

我們要叙述 Cauchy 型积分的基本理論,另外,我們还要給出某些簡单的直接应用.

我让讀者特别注意第一章 §§22～26 中的結果,証明这些結果所化費的細致的劳动,使得我們能够相当簡单地并且更直接地得出一系列从应用角度来看是重要的新結果.

我們主要在第四、第五章中要用到 §§22～26 中的結果.而在第二、第三、第六章中,如果我們不去注意少数略去而不致于影响到对其余部分的理解的地方,那么我們便可以用不到这些結果.我建議初学的讀者在第一次学习第二、第三、第六章(这些章本身是相当完整的)时,先可以放过上述这些地方,然后再回过来学习放过的地方.

2°. 为了避免过分地增加这一本书的篇幅,我們不准备叙述一系列可以列在本书标题下的极重要的問題.

首先,在此处我們完全不涉及到多維的奇异积分方程理論,虽然,最近几年来,这一种理論已經大大地向前发展了①②.其次,我們亦不談到非綫性方程以及复变函数論中的非綫性边值問題,最近几年来,已有不少重要論文是专題研究这种方程和这种边値問題的.我們亦不討論具有差分核的积分方程,虽則,这一类方程具有較大的理論价值和实际价值③.

最近几年来,与所謂广义解析函数有联系的边值問題显示出极重要的作用.在本书中,我們亦不准备討論这些問題,我們只停留在解析函数的經典理論的范圍以內来討論边値問題.我們建

① 可以从綜合性論文 В. Д. Купрадзе[1] 及 С. Г. Михлин[7] 中,找到对到 1947 年为止所发表的論文的介紹.

② 最近新出版的 С. Г. Михлин 編写的 Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Москва, 1962 (中譯本已由上海科学技术出版社出版),是专讲多維的奇异算子和奇异积分方程的,从那里可以找到对到 1961 年为止所发表的論文的介紹.——譯者注

③ 对这一問題有兴趣的讀者可参考 М. Т. Крейн 的論文[1],在那里可以找到有关的文献的介紹;亦可以参看 В. И. Смирнов 的书[4] 卷四.

議，对广义解析函数理論及其应用有兴趣的讀者，可以去閱讀 И. Н. Векуа 最近写成的专門著作[13]，在那里可以找到与此有关的十分丰富的文献.

在书的末尾，单独地給出了在本书中将要引証的文献的編目(著者的次序按他們姓名的笔划或字母排列). 在查閱时，可以根据著者姓名以及他的作品的編号(写在方括号內)从参考文献編目中找到有关的文献.

在很多情況下，当讲到在本书中所叙述到的結果的某种应用时，我們将不再引証这些著者的原来的論文，而引証同一位著者后来所写成的专著或者經过充实后的論文. 此外，某些值得注意的結果，如果已經在最常見的书中或者在經过充实后的論文中已叙述到了，則我們将不引証这些結果而只引証这些书和論文.

第一章

Cauchy 型积分的基本性质

I. 一些定义和輔助命題

在这一部分中，我們要給出某些概念的定义和証明一系列簡单的命題，这些概念和命題以后我們經常都要用到.

§1. 光滑曲綫和逐段光滑曲綫

以后我們总只討論分布在同一平面上的曲綫. 我們将这个平面上的坐标系 Oxy 总是理解为直綫的直角坐标系，我們这样来規定坐标系的方向，使当一个人沿着 Ox 軸来看时，Oy 軸总在他的左边.

与此相应，我們規定平面上角度的正方向是循着反时針方向的，并且当讲到从指定方向来度量角度时，我們总指的是带有对应的符号的角度.

今后当讲到光滑曲綫时，我們总把这样的曲綫理解为簡单曲綫，亦就是說，它自身并不相交[①].

1°. 我們把用下述参数表示法表示的曲綫叫做敞开的光滑弧

---

① 今后会讲到这个术語的精确的含义.

或者敞开的光滑圍綫①：

$$x=x(s),\quad y=y(s),\quad s_a\leqslant s\leqslant s_b,\tag{1.1}$$

其中 s_a 与 s_b 都是有限常数，而函数 $x(s)$，$y(s)$ 在区間 $[s_a, s_b]$ 上是連續的，并且滿足下列条件：

I. 它們在区間 $[s_a, s_b]$ 上（包括端点在內）具有連續的一阶导函数 $x'(s)$ 及 $y'(s)$，这些导函数不同时为零，且把 $x'(s)$ 及 $y'(s)$ 在区間端点处的值分别理解为 $x'(s_a+0)$，$y'(s_a+0)$ 及 $x'(s_b-0)$，$y'(s_b-0)$．

II. 参数 s 在上述区間上的不同的値对应于不同的点 (x, y)．

第一个条件表明所考慮的弧（我們把它記作 L）是光滑的，亦就是說，它的切綫方向是連續变化的（参看后面）；第二个条件表明弧 L 是簡单的和敞开的．

与値 s_a 和 s_b 对应的点 a 和 b 都叫做弧的端点．根据(1.1)，端点 a 和 b 是属于弧 L 的；如果需要明确地指出这一点，我們就說弧 L 是一条閉弧．如果端点都不属于弧（这种情形常常需要特别加以指出），我們就說弧 L 是一条开弧．

在每一条所討論的光滑弧上，我們将选定一个确定的正方向，亦就是，和参数 s 增加所对应的方向．我們通常用 ab 表示具有端点 a 和 b 的弧，这里字母的次序表示了弧的正方向是从 a 到 b．我們有时把点 a 与 b 分别叫做弧的起点和終点．

光滑弧 L 显然是可求长的；因此，从 L 上某一个定点量起的弧长 s（s 的符号与度量的方向有关）可以当作参数．今后我們总是这样做的．与此对应，我們可以有

$$[x'(s)]^2+[y'(s)]^2=1.\tag{1.2}$$

在这种情况下，我們把参数 s 叫做弧 L 上的点所对应的弧坐标．

① "弧(дуга)"及"圍綫(контур)"这两个术語在此处是同义詞；但是，我們通常把第一个术語和第二个术語分别应用于敞开曲綫和封閉曲綫的情形．

我們用 $t(s)$ 或者簡单地用 t 表示与弧坐标 s 所对应的点，而 $t(s_0)$，$t(s_1)$，$t(s_2)$ 等等則表示与弧坐标 s_0, s_1, s_2 等等所对应的点，这些点亦可以簡单地用 t_0, t_1, t_2 等等来表示.

我們总是把曲綫 L 的切綫理解为正切綫，亦就是，指沿着 s 增加方向的切綫. 如果 θ 表示点 t 处的切綫和 Ox 軸之間的夹角，并且它是从 Ox 軸量起的；那么，便有

$$\cos\theta=x'(s), \quad \sin\theta=y'(s). \tag{1.3}$$

这些公式說明，切綫和任一固定方向之間的夹角是随着 s 而連續变化的①. 反过来，显然，如果 θ 是随着 s 而連續变化的，那么，$x'(s)$ 和 $y'(s)$ 都是 s 的連續函数.

今后，如果 x 和 y 是点 t 的坐标，依据我們的写法 $t=x+iy$，我們通常可以用同一个字母 t 来表示 t 的点附标. 如果点 $t=t(s)$ 的弧坐标是 s，那么

$$t'=\frac{dt}{ds}=\frac{dx}{ds}+i\frac{dy}{ds}=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}, \tag{1.4}$$

其中 θ 如上所示. 显然，

$$|t'|=\left|\frac{dt}{ds}\right|=1. \tag{1.5}$$

2° 一条曲綫 L，它如同敞开的光滑弧那样来定义，所不同的仅在于：除了值 $s=s_a$ 及 $s=s_b$ 外，依据 (1.1) 由参数 s 不同的值所对应的点 (x, y) 亦是不同的，而值 $s=s_a$ 及 $s=s_b$ 則对应于同一个点，于是 $x(s_b)=x(s_a)$，$y(s_b)=y(s_a)$，并且还要求 $x'(s_b-0)=x'(s_a+0)$，$y'(s_b-0)=y'(s_a+0)$，我們便称 L 是一条封閉的光滑圍綫或者封閉的光滑弧. 在上述两对等式中，第一对等式表示 L 是封閉的，而第二对等式則表示，当切点通过对应于弧坐标为 s_a 及 s_b 的点时，它的切綫方向亦是連續变化的. 我們把后一个点叫

① 角 θ 可以确定到差一个形式为 $2k\pi$ 的項，其中 k 是一个整数. 但是，当讲到这个角是連續变化的时，我們所指的是什么是完全显然的.

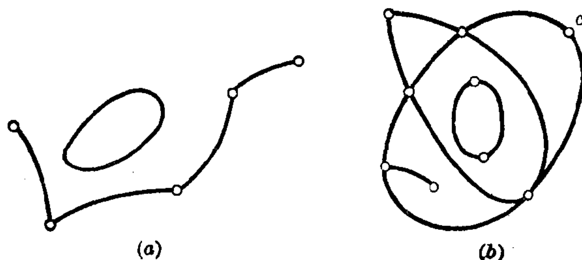
做弧坐标的跳跃点；它和圍綫 L 上的其他点沒有什么本质的区别，因为它只和选定的参数表示法有关，因此，它显然可以放在圍綫 L 上的任意一个点处．于是，例如，在考虑属于已給的封閉圍綫上的任一条弧 ab 时，我們总可以认为（通常不对这一点再作特别的声明），这一个点已經移到弧 ab 之外，或者已經移到它的一个端点处．

3°．我們把有限条沒有公共点（包括端点在内）的、封閉的或者敞开的光滑圍綫（弧）的全体，叫做光滑曲綫（指的是簡单曲綫）．

这样一来，由定义，一条曲綫（甚至它是光滑的）可以由几个互不連接的部分构成，而一条弧或者一条圍綫則仅由一个連續部分构成．

4°．我們把由具有下述性质的、光滑的敞开弧 a_1a_2, a_2a_3, $\cdots$, $a_{n-1}a_n$ 的一个有限序列所构成的曲綫，叫做簡单的逐段光滑弧（或者叫做簡单的逐段光滑圍綫）：前一条弧的終点和后一条弧的起点是重合的，并且这些弧，除了上述的点以外，有可能第一条弧的起点 a_1 与最后一条弧的終点 a_n 是重合的，但是，它們不再有别的公共点．如果点 a_n 与点 a_1 不是重合的，那么，逐段光滑弧便是敞开的；在相反的情形下，它便是封閉的．

我們把有限条沒有公共点的、簡单的逐段光滑弧（圍綫）的全体叫做簡单的逐段光滑曲綫（图 1, a）．这一类曲綫和光滑曲綫的



(a) (b)

图 1

区别仅在于它可能有(有限个)角点.

最后，我們把可能有有限个公共点的有限条逐段光滑弧(圍綫)的全体，叫做逐段光滑曲綫(不再加“簡单的”).

5°. 我們总可以认为，已給的光滑曲綫或者逐段光滑曲綫 L（在剛才給出的定义的意义下），仅由一些可能除了端点外，沒有別的公共点的(簡单的)、光滑的敞开弧所构成. 在必要时，为了能做到这一点，显然只要把构成 L 的一些封閉圍綫及敞开弧分成几个部分就够了(图 1, b).

在今后，如果不作相反的声明，我們总可以认为，逐段光滑曲綫都是这个样子的. 我們通常仅把光滑曲綫的情形，亦就是，把由一些沒有公共点的簡单的、光滑的封閉圍綫或者敞开弧所构成的曲綫的情形当作例外.

6°. 我們把这样的点叫做逐段光滑曲綫 L 的結点：它是构成曲綫 L 的一条或者几条光滑弧的端点. 如果已知点只是一条弧的端点，我們就把这样的点亦叫做曲綫 L 的端点；这样一来，根据我們的定义，曲綫 L 的端点是結点的特殊情形. 角点也是結点的特殊情形，在角点处有两条光滑弧相遇.

为了方便起見，根据我們的考虑，我們可以把曲綫 L 上分布在光滑部分的任何別的点列入結点之内，因此，曲綫在已知結点的邻域內可能是光滑的(图 1, b 中的 c 点). 引进这样的补充結点通常可以簡化叙述.

我們把曲綫 L 上异于結点的点叫做普通点.

7°. 最后，我們提醒一下，依据前面 (1° 段)所采用的条件，总可以假定，在每一条光滑弧(光滑圍綫)上，都已經选定了确定的正方向. 由构成 L 的个别弧上所选定的这些正方向，便可以規定出 L 上的正方向.

8°. 最后，我們約定好，曲綫 L 的一部分总是指由有限条弧所构成的部分，而不是指曲綫 L 上任何別的点集.

§2. 光滑曲綫的某些性质

今后，我們通常仅将遇到光滑曲綫或者逐段光滑曲綫，并且要用到光滑曲綫的下列性质①.

假設 L 是一条已知的光滑曲綫，而 α_0 为任意取定的异于零的銳角$\left(亦就是, 0<\alpha_0<\frac{\pi}{2}\right)$. 那么，存在着一个依賴于 α_0 但不依賴于点 t 在 L 上的位置的正数 $R_0=R_0(\alpha_0)$，它具有下列性质:

I. L 上包含在以其上任意点 t 为中心以任意 $R\leqslant R_0$ 为半徑的圓 Γ 内的部分，是仅由一条敞开的弧 ab 所构成的(图 2).

II. 弧 ab 上任意两点处的切綫所夹的非鈍角都不超过 α_0 (图 2).

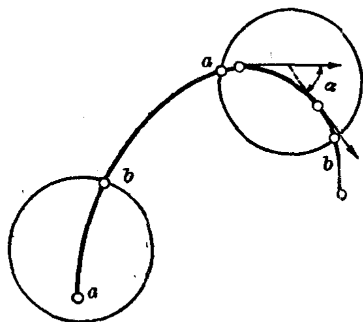


图 2

由上面两个性质还可得出弧 ab 的下列性质:

III. 联接弧 ab 上任意两点的弦和这一条弧上任意点处的切綫所夹的非鈍角都不超过 α_0.

实际上，在弧 ab 上总有一点，在該点处的切綫和那一条弦是平行的，因此，这一个結論可由性质 II 导出.

IV. 設 β_0 是适合条件 $\alpha_0<\beta_0\leqslant\frac{\pi}{2}$ 的任意角，又設 Δ_a, Δ_b 是过点 a 和 b 的两条平行直綫，它們和弧 ab 上任意点 t 处的切綫所夹的非鈍角 $\beta\geqslant\beta_0$, 那么，每一条和直綫 Δ_a 及 Δ_b 平行的、并且介于它們之間的直綫 Δ 都和 ab 仅相交于一个点(图 3).

事实上，显然，Δ 和 ab 至少相交于一点，至于 Δ 不与 ab 相交于任何别的点，則可以由性质 III 以及条件 $\beta\geqslant\beta_0>\alpha_0$ 推出.

① 在本书末尾的附录一中，要給出性质 I 与 II 的証明.

V. 設 Δ 是通过 ab 上任意点 t 的一条直綫，并且这一条直綫和 t 处的切綫所夹的非鈍角不小于 $\beta_0>\alpha_0$，又設 t' 是 ab 上任何一个别的点，那么，Δ 和联結点 t 与 t' 的弦所夹的非鈍角不小于 $\omega_0=\beta_0-\alpha_0>0$①.

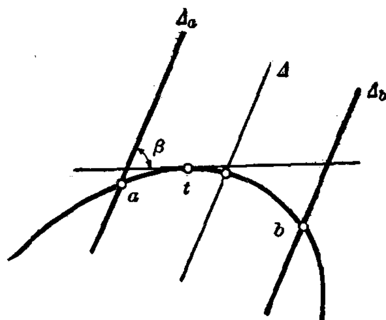


图 3

为了簡化叙述起見，我們把 $R_0=R_0(\alpha_0)$ 叫做对应于已知角 α_0 的标准半徑，半徑为 R_0 的圆 Γ_0 叫做标准圓，而把用圓周 Γ_0 从曲綫 L 上所截取下的弧 ab，叫做标准弧（Γ_0 以 L 上某一点为中心）.

設 $L=ab$ 是某条标准弧，t_0 是 L 上的任一定点（它可能和 a 或者 b 重合），t 是 L 上的动点，而 r 是联接 t_0 和 t 的弦的长度. 我們有

$$\frac{dr}{ds}=\pm\cos\alpha, \tag{2.1}$$

其中 s 是点 t 的弧坐标，而 α 是弦 tt_0 和 t 处的切綫所夹的銳角；在 (2.1) 式中，对应于 t_0b 部分取“+”号，而对应于 at_0 部分取“−”号. 因为由上所述，$0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0<\frac{\pi}{2}$，因此，从上面的公式知道，$r$ 在部分 at_0 和 t_0b 的每一个上都是弧坐标 s 的单調函数（在 at_0 上它是单調減少的，在 t_0b 上它是单調增加的），所以，在这两个部分的每一个上，点 t 的位置都可以由給定的 r 来唯一确定.

---

① 若 ω 是 Δ 和弦所夹的非鈍角，α 是 t 处的切綫和弦所夹的非鈍角，β 是 t 处的切綫和 Δ 所夹的非鈍角，那么，或者 $\omega=\beta-\alpha\geqslant\beta_0-\alpha_0$，或者 $\omega=\beta+\alpha$ $\left(当\ \beta+\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\ 时，便可能是这样\right)$，于是，$\omega\geqslant\beta_0>\beta_0-\alpha_0$ 或者 $\omega=\pi-\beta-\alpha$ $\left(当\ \beta+\alpha\geqslant\frac{\pi}{2}\ 时，便可能是这样\right)$，于是，$\omega\geqslant\frac{\pi}{2}-\alpha\geqslant\beta_0-\alpha_0$.

从(2.1)可以导出一个經常要用到的不等式：

$$|ds|\leqslant K|dr|, \tag{2.2}$$

其中 K 是和 t_0 在 ab 上的位置无关的正常数.

考虑弧 at_0 及 t_0b 之一，并在(2.1)的两端从 s_1 到 s_2 积分，且利用中值定理，对于 at_0 或者 t_0b 上的任意一对点 t_1 和 t_2，我們得到

$$|r_2-r_1|=k|s_2-s_1|, \quad 0<k_0\leqslant k\leqslant 1, \tag{2.3}$$

其中 k_0 是常数，而 r_1 和 r_2 分别为 t_0 到 t_1 和 t_2 的距离.

如果取 t_1 当作 t_0，我們还可以有

$$r_{12}=k\sigma_{12}, \quad 0<k_0\leqslant k\leqslant 1, \tag{2.4}$$

其中 r_{12} 是点 t_1 和 t_2 之間的距离，而 $\sigma_{12}=|s_2-s_1|$ 是 L 上介于 t_1 和 t_2 之間的那一部分的长度.

容易看出，当 L 是任意一条敞开的或者封閉的光滑圍綫时，且在封閉圍綫的情形下，把 L 上介于 t_1 与 t_2 的那一部分理解为长度較短的那一部分，形式为(2.4)的关系式仍然是正确的.

§3. *H* 条件(Hölder 条件)

1°. 假定 $\varphi(\zeta)$ 是变量(一般是复的) ζ 的函数，它給定在这个变量的值的某一个集合 Z 上. 如果对于这一个集合上的任意两个值 ζ' 与 ζ''，都有

$$|\varphi(\zeta'')-\varphi(\zeta')|\leqslant A|\zeta''-\zeta'|^{\mu}, \tag{3.1}$$

其中 A 与 μ 都是正的常数，那么，我們便說 $\varphi(\zeta)$ 在这个集合上**适合 H 条件**. 我們把常数 A 叫做 **H 条件的系数**，而把 μ 叫做 **H 条件的指数**. 当需要明确地指出指数 μ 时，那么，我們便說，$\varphi(\zeta)$ 是**适合 $H(\mu)$ 条件的**；常数 A 的值通常对我們来讲并不重要.

显然，如果 $\varphi(\zeta)$ 适合 $H(\mu)$ 条件，那么，$|\varphi(\zeta)|$ 亦适合同一个条件.

也显然，如果集合 Z 是有界的，又若函数 $\varphi(\zeta)$ 适合 $H(\mu)$ 条

件，那么，它对于每一个 $\nu\leqslant\mu$ 都是适合 $H(\nu)$ 条件的.

自然地可以把 H 条件的概念推广到多元函数的情形. 亦就是，假定 $\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$ 是变量 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ 的函数，它給定在这些变量的值的某个集合 Z 上. 如果对于这一个集合上的变量 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ 的任意两組值 $\zeta_1', \zeta_2', \cdots, \zeta_n'$ 及 $\zeta_1'', \zeta_2'', \cdots, \zeta_n''$ 都有

$$|\varphi(\zeta_1'', \zeta_2'', \cdots, \zeta_n'')-\varphi(\zeta_1', \zeta_2', \cdots, \zeta_n')|$$
$$\leqslant A_1|\zeta_1''-\zeta_1'|^{\mu_1}+A_2|\zeta_2''-\zeta_2'|^{\mu_2}+\cdots+A_n|\zeta_n''-\zeta_n'|^{\mu_n}, \quad (3.2)$$

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 及 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 都是正的常数，那么，我們就說，$\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$ 是适合 H 条件的，或者更仔細地說，$\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$ 是适合 $H(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ 条件的.

如果集合 Z 是有界的，那么，从条件(3.2)可以导出形式上更为簡单的条件：

$$|\varphi(\zeta_1'', \zeta_2'', \cdots, \zeta_n'')-\varphi(\zeta_1', \zeta_2', \cdots, \zeta_n')|$$
$$\leqslant A\{|\zeta_1''-\zeta_1'|^{\mu}+|\zeta_2''-\zeta_2'|^{\mu}+\cdots+|\zeta_n''-\zeta_n'|^{\mu}\}, \quad (3.3)$$

(3.3)是由(3.2)将其中的指数 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 都用它們之中最小的一个来替代，同时用充分大的常数 A 代替系数 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 而得出的. 在这种情形下，代替 $H(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$，将簡单地写成 $H(\mu)$.

2°. 如果函数 $\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$ 适合 $H(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ 条件，那么，特别有

$$|\varphi(\zeta_1, \cdots, \zeta_{k-1}, \zeta_k'', \zeta_{k+1}, \cdots, \zeta_n)$$
$$-\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{k-1}, \zeta_k', \zeta_{k+1}, \cdots, \zeta_n)|\leqslant A_k|\zeta_k''-\zeta_k'|^{\mu_k},$$
$$k=1, 2, \cdots, n,$$

亦就是說，函数 $\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$ 对每一个变量 ζ_k 是单独地适合 H 条件的，换句話說，它对变量 $\zeta_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 适合 $H(\mu_k)$ 条件，并且对于其余变量一致地适合 $H(\mu_k)$ 条件；所謂对其余变量一致地适合 $H(\mu_k)$ 条件，是指 $H(\mu_k)$ 条件的系数和指数与其他

一些变量的值是无关的. 反过来，容易看出，如果函数 $\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$ 对每一个变量单独地适合 H 条件，亦就是，它对变量 ζ_k 是适合 $H(\mu_k)$ 条件的，并且对其余变量是一致地适合的，那么，它适合 H 条件，亦就是說，它对所有变量适合 $H(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ 条件，亦即，条件(3.2).

在今后，当我們讲到某一个多元函数对于每一个变量单独地适合 H 条件时，我們总假定这个条件对于其余变量是一致地适合的，亦就是說，这一个函数对所有各个变量都适合 H 条件.

注釋 1 我們指出下述几乎是显然的命题. 假定定义在某个集合 Z 上的函数 $u=u(\zeta)$ 适合 $H(\mu)$ 条件，又假定定义在 $u=u(\zeta)$ 的值域上的函数 $f(u)$ 对变量 u 适合 $H(\nu)$ 条件. 那么，函数 $F(\zeta)=f(u(\zeta))$ 对变量 ζ 是适合 $H(\mu\nu)$ 条件的. 特别是，如果 $\nu=1$，那么，函数 $F(\zeta)$ 是适合 $H(\mu)$ 条件的. 例如，如果 $u(\zeta)$ 取实数值，又若 $f(u)$ 对 u 具有有界的导函数，那么，$F(\zeta)=f(u(\zeta))$ 适合 $H(\mu)$ 条件.

注釋 2 通常把我們所称做的 H 条件叫做 Hölder 条件(O. Hölder). 在 $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_n=1$ 的特殊情形下，这个条件便变成了 Lipschitz 条件；但是，有时把后一个名称亦应用到 Hölder 条件上.

§4. 在光滑曲綫上的 H 类函数

1° 今后，我們主要把 H 条件的概念应用到給定在一条光滑曲綫或者逐段光滑曲綫上的点 t 的函数上.

在此处及今后，依据在 §1 (1° 段)中所讲过的，我們将用 t 既表示点 $t(x, y)$ 本身，又表示它的附标，亦就是，复数 $t=x+iy$.

2° 为了簡单起見，我們将从討論已知曲綫 L 为一条(簡单的)做开的或者封閉的弧的情形入手[①].

---

① 在§8, 2° 段中，我們将讲到一条逐段光滑曲綫的情形.

假定 $\varphi(t)$ 是曲綫 L 上点 t 的适合 $H(\mu)$ 条件的函数，亦就是說，对 L 上任意两个点 t_1 与 t_2，均有

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant A|t_2-t_1|^\mu \tag{4.1}$$

的函数，其中 A 与 μ 都是正常数。

在弧 L 上适合 H 条件的函数，显然在 L 上是連續的．容易看出，如果函数 $\varphi(t)$ 对于 L 上任一对彼此之間距离 r_{12} 不超过某一正常数 δ 的点 t_1 和 t_2 都是适合条件(4.1)的，那么，它在整个弧 L 上适合 $H(\mu)$ 条件．事实上，如果当 $r_{12}\leqslant\delta$ 时(4.1)总成立，那么，在整个弧 L 上，我們都有

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant A'r_{12}^\mu,$$

其中 A' 是数 A 与 $2M/\delta^\mu$ 中之最大者，而 M 是 $|\varphi(t)|$ 在 L 上的上界.

另外，依据式(2.4)，我們得出，$H(\mu)$ 条件等价于条件

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant A\sigma_{12}^\mu, \tag{4.2}$$

其中 $\sigma_{12}=|s_2-s_1|$ 表示弧 L 上介于 t_1 和 t_2 之間那一部分的长度(在 L 为封閉圍綫的情形下，我們就取 L 上两个部分中有較短长度的那一部分).

因此，依据(2.3)的推論得出，$H(\mu)$ 条件等价于要求在属于 L 的每一条标准弧 ab 上有：

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant A|r_2-r_1|^\mu, \tag{4.3}$$

其中 $$r_1=|t_1-a|,\quad r_2=|t_2-a|.$$

在不等式(4.2)及(4.3)中，正象在不等式(4.1)中那样，A 表示某一正常数；在所有这三个不等式中，A 可以认为是同一个量，在必要时，可以在这些不等式中用較大的值来代替 A.

我們还指出，当 $\mu>1$ 时，从(4.2)可推知，在弧上的每一点处 $\dfrac{d\varphi}{ds}=0$，从而，$\varphi\equiv$ 常数．因为，这一种情形无关重要，因此，**我們总认为**

$$0<\mu\leqslant 1. \tag{4.4}$$

我們提醒一下，如果函数 $\varphi(t)$ 适合 $H(\mu)$ 条件，那么，对于每一个 $\nu\leqslant\mu$，它都是适合 $H(\nu)$ 条件的.

3°. 自然地可以把上述全部結果，推广到当函数 $\varphi(t)$ 定义在任意一条可能由几个互不相連的部分构成的光滑曲綫上的情形. 由于这个推广是显然的，因此我們不再来讲它了.

4°. 我們将給定在光滑曲綫 L 上，并且适合 $H(\mu)$ 条件的函数 $\varphi(t)$，叫做**在 L 上是属于 $H(\mu)$ 类的函数**，或者，当沒有必要指出 μ 的值时，便称它**在 L 上是属于 H 类的函数**.

如果 $\varphi(t)$ 只是在已知端点 c 的充分小的邻域內适合 H 条件（亦包括这个端点在内），那么我們便說 $\varphi(t)$ **在 c 的邻域内是属于 H 类的**.

5°. 自然地可以把 H 类函数的概念推广到給定在光滑曲綫 L 上的几个点 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的函数 $\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 的情形上. 亦就是，如果函数 $\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 适合 $H(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ 条件，我們就說，这个函数在 L 上是属于 $H(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ 类的函数；如果沒有必要指出指数 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 之值，我們就簡单地說 $\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 属于 H 类.

在 $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_n=\mu$ 的情形下，我們可以把 $H(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ 改写成 $H(\mu)$. 依据和上述同样的理由，我們总认为

$$0<\mu_j\leqslant 1, \quad j=1, 2, \cdots, n, \quad 0<\mu\leqslant 1.$$

§5. 判定給定在光滑曲綫上的函数是否属于 H 类的簡单准則

在这一节中以及在下面两节中，我們要給出几个簡单的准則，在很多情况下，利用它們立即可以判定出定义在光滑曲綫 L 上所討論的函数是否属于 H 类，或者所討論的函数是否适合 H 条件.

在整个这一节以及在下面的两节中，我們把 L 理解为一条敞

开的光滑弧，这是因为不难将所指出的結果推广到任何一条光滑曲綫的情形.

在此处我們提出下面要利用到的两个著名的不等式. 設 σ_1 与 σ_2 都是任意正数,又設 $0\leqslant\mu\leqslant 1$, 那么

$$\frac{\sigma_1^\mu+\sigma_2^\mu}{(\sigma_1+\sigma_2)^\mu}\leqslant 2^{1-\mu}, \tag{5.1}$$

$$\frac{|\sigma_1^\mu-\sigma_2^\mu|}{|\sigma_1-\sigma_2|^\mu}\leqslant 1 \quad (\sigma_1\neq\sigma_2). \tag{5.2}$$

在証明这些不等式的时候,不失一般性,可以假定 $\sigma_1\geqslant\sigma_2$; 如果令 $\sigma=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, 我們可将上述的不等式改写成形式:

$$\frac{1+\sigma^\mu}{(1+\sigma)^\mu}\leqslant 2^{1-\mu} \quad (0\leqslant\sigma\leqslant 1),$$

$$\frac{1-\sigma^\mu}{(1-\sigma)^\mu}\leqslant 1 \quad (0\leqslant\sigma<1).$$

后面这些不等式完全可以用初等的方法(亦就是,通过找出在左端的 σ 的函数的极大值)来証明.

現在我們来推导我們所要建立的准則.

1°. 假定点 t_0 把敞开弧 $ab=L$ 分成两部分 at_0 和 t_0b. 如果函数 $\varphi(t)$ 在 L 上是連續的, 并且它在这两个部分 at_0 和 t_0b 上分别适合 $H(\mu)$ 条件,那么,它在整个弧 L 上是适合 $H(\mu)$ 条件的.

实际上,假定 t_1 和 t_2 是弧 L 上的两个点. 如果 t_1 和 t_2 位在 t_0 的同一側, 那么, 按条件, 不等式(4.2)是成立的. 如果 t_1 和 t_2 位在 t_0 的异側, 則用 σ_1 和 σ_2 分别表示弧 t_1t_0 和 t_0t_2 的长度, 并注意到(5.1),我們便得出

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant|\varphi(t_2)-\varphi(t_0)|+|\varphi(t_1)-\varphi(t_0)|$$
$$\leqslant A(\sigma_1^\mu+\sigma_2^\mu)\leqslant 2^{1-\mu}A|\sigma_1+\sigma_2|^\mu=2^{1-\mu}A\sigma_{12}^\mu,$$

而这亦就証明了我們的結論.

2°. 如果 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在 L 上分别适合 $H(\mu)$ 条件和 $H(\nu)$

条件，那么，函数 $\varphi(t)+\psi(t)$ 和 $\varphi(t)\cdot\psi(t)$ 在 L 上是适合 $H(\lambda)$ 条件的，其中 λ 是数 μ 及 ν 中最小者.

以乘积 $\varphi(t)\cdot\psi(t)$ 为例，我們有

$$\begin{aligned}&|\varphi(t_2)\psi(t_2)-\varphi(t_1)\psi(t_1)|\\&\quad\leqslant|\varphi(t_2)\psi(t_2)-\varphi(t_2)\psi(t_1)|+|\varphi(t_2)\psi(t_1)-\varphi(t_1)\psi(t_1)|\\&\quad\leqslant M|\psi(t_2)-\psi(t_1)|+N|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|,\end{aligned}$$

其中 M 和 N 分别是 $|\varphi(t)|$ 和 $|\psi(t)|$ 在 L 上的上界. 現在我們的結論便变成显然的了.

3°. 如果 $\varphi(t)$ 在 L 上适合 $H(\mu)$ 条件，并且在 L 上处处 $\varphi(t)\neq 0$，那么，$1/\varphi(t)$ 在 L 上也适合 $H(\mu)$ 条件. 其証明和前面是类似的.

4°. 假定 t 和 t_0 分别是 L 上的动点和定点.

t 的函数

$$r^{\mu}=|t-t_0|^{\mu},\quad 0<\mu\leqslant 1$$

在 L 上是适合 $H(\mu)$ 条件的. 事实上，由于(5.2)，

$$|r_2^{\mu}-r_1^{\mu}|\leqslant|r_2-r_1|^{\mu}.$$

当 t 固定和 t_0 变动时亦具有同样的結果. 因此，两个变量 t 和 t_0 的函数 $|t-t_0|^{\mu}$ 在 L 上是适合 $H(\mu)$ 条件的.

5°. 假定 $\varphi(t)$ 在 L 上适合 $H(\mu)$ 条件，又設 $0\leqslant\lambda<\mu\leqslant 1$，那么，$t$ 的函数

$$\psi(t)=\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{|t-t_0|^{\lambda}}$$

在 L 上是适合 $H(\mu-\lambda)$ 条件的，其中 t_0 是 L 上的定点①.

不失一般性，显然可以假定，t 位在用以 t_0 为中心的标准圆从 L 上割下的标準弧 ab 上；此外，根据 1° 段所述，例如，可以只限于討論 t 在 t_0b 部分上的情形. 我們可以由量 $r=|t-t_0|$ 来确定 t 在 t_0b 上的位置(参考 § 2)，并且我們有时可以用 $\varphi(r)$ 及 $\psi(r)$ 替

① 所指的是 $\psi(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}\psi(t)=0$.

代 $\varphi(t)$ 及 $\psi(t)$. 假定 $h>0$ (这并不影响一般性), 又令 $\omega(r)=\varphi(t)-\varphi(t_0)$, 我們有

$$|\psi(r+h)-\psi(r)|=\left|\frac{\omega(r+h)}{(r+h)^\lambda}-\frac{\omega(r)}{r^\lambda}\right|$$

$$=\left|\frac{\omega(r+h)-\omega(r)}{(r+h)^\lambda}+\omega(r)\left\{\frac{1}{(r+h)^\lambda}-\frac{1}{r^\lambda}\right\}\right|$$

$$\leqslant\frac{|\omega(r+h)-\omega(r)|}{(r+h)^\lambda}+|\omega(r)|\frac{(r+h)^\lambda-r^\lambda}{r^\lambda(h+r)^\lambda}.$$

現在注意到,

$$|\omega(r+h)-\omega(r)|\leqslant Ah^\mu,\quad |\omega(r)|=|\varphi(t)-\varphi(t_0)|\leqslant Ar^\mu,$$

我們就得出

$$|\psi(r+h)-\psi(r)|\leqslant\Delta_1+\Delta_2,$$

其中

$$\Delta_1=\frac{Ah^\mu}{(r+h)^\lambda},\quad \Delta_2=Ar^{\mu-\lambda}\frac{(r+h)^\lambda-r^\lambda}{(r+h)^\lambda}.$$

再者,我們又有

$$\Delta_1=A\left[\frac{h}{r+h}\right]^\lambda\cdot h^{\mu-\lambda}\leqslant Ah^{\mu-\lambda},$$

因此, Δ_1 适合所要求的条件.

我們回到 Δ_2 上,并且分成两种可能的情形 $r\leqslant h$ 及 $r>h$ 来考虑它.

在第一种情形($r\leqslant h$), 利用估計式

$$(r+h)^\lambda-r^\lambda\leqslant h^\lambda$$

(参看 4° 段),我們看出,

$$\Delta_2\leqslant A\frac{h^\mu}{(r+h)^\lambda}=A\left[\frac{h}{r+h}\right]^\lambda h^{\mu-\lambda}\leqslant Ah^{\mu-\lambda}.$$

在第二种情形($r>h$), 利用估計式①

① 当 $0\leqslant\mu\leqslant1$ 及 $x\geqslant0$ 时,有

$$(1+x)^\mu-1\leqslant\mu x;$$

事实上,令 $f(x)=(1+x)^\mu-\mu x-1$, 我們就有

$$f(0)=0,\quad f'(x)\leqslant0.$$

$$(r+h)^{\lambda}-r^{\lambda}=r^{\lambda}\left[\left(1+\frac{h}{r}\right)^{\lambda}-1\right]\leqslant\lambda hr^{\lambda-1},$$

我們相信

$$\Delta_2\leqslant A\lambda hr^{\mu-\lambda-1}=A\lambda\left(\frac{h}{r}\right)^{1-\mu+\lambda}h^{\mu-\lambda}\leqslant A\lambda h^{\mu-\lambda},$$

于是，便証明了我們的結論.

6°. 剛才所得出的估計式的推导显然和 t_0 在 L 上的位置无关；此外，还可以交換 t 和 t_0 所处的地位. 因此，我們可以断言：两个变量 t 和 t_0 的函数

$$\psi(t_0, t)=\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{|t-t_0|^{\lambda}},$$

当 $\varphi(t)$ 在 L 上适合 $H(\mu)$ 条件且 $0\leqslant\lambda<\mu$ 时在 L 上亦是适合 $H(\mu-\lambda)$ 条件的.

7°. 最后，我們考察函数 $\varphi(t, \tau)$，其中 t 是 L 上的点，而 τ 是在某个区域 T 上变动的参数. 假定 $\varphi(t, \tau)$，当 $t\in L$, $\tau\in T$ 时，对 t 和 τ 都是适合 $H(\mu)$ 条件的. 在这些条件下，我們証明，函数

$$\psi(t_0, t, \tau)=\frac{\varphi(t, \tau)-\varphi(t_0, \tau)}{|t-t_0|^{\lambda}}, \quad 0\leqslant\lambda<\mu$$

对所有三个变量都是适合 $H(\mu-\lambda)$ 条件的，其中 t_0 位在 L 上，t 亦在 L 上. 对于 t_0 与 t，这个結論已經証明过.

为了証明关于 τ 的結論，我們令

$$\begin{aligned}\Delta&=\psi(t_0, t, \tau+h)-\psi(t_0, t, \tau)\\&=\frac{\varphi(t, \tau+h)-\varphi(t_0, \tau+h)}{|t-t_0|^{\lambda}}-\frac{\varphi(t, \tau)-\varphi(t_0, \tau)}{|t-t_0|^{\lambda}}\\&=\frac{\varphi(t, \tau+h)-\varphi(t, \tau)}{|t-t_0|^{\lambda}}-\frac{\varphi(t_0, \tau+h)-\varphi(t_0, \tau)}{|t-t_0|^{\lambda}}.\end{aligned}$$

当 $|t-t_0|\leqslant|h|$ 时，由所討論的差式的**第一个表示式**給出，

$$|\Delta|\leqslant2A|t-t_0|^{\mu-\lambda}\leqslant2A|h|^{\mu-\lambda}.$$

当 $|t-t_0|\geqslant|h|$ 时，由它的**第二个表示式**給出

$$|\Delta| \leqslant \frac{2A|h|^{\mu}}{|t-t_0|^{\lambda}} \leqslant 2A|h|^{\mu-\lambda},$$

于是,便証明了我們的結論.

明显地，它可以直接推广到当将一个参数 τ 换成几个参数的情形.

也显然，如果我們令 $\tau=t_0$，結論仍然是有效的. 从上述結果还可以直接导出下述結論. 假定函数 $\varphi(t_0, t)$ 是 L 上两个变量 t 和 t_0 的函数，并且它对这两个变量是适合 $H(\mu)$ 条件的，又假定对 L 上所有点 t_0，$\varphi(t_0, t_0)=0$. 那么,函数

$$\psi(t_0, t)=\frac{\varphi(t_0, t)}{|t-t_0|^{\lambda}}, \quad 0 \leqslant \lambda<\mu$$

对两个变量是适合 $H(\mu-\lambda)$ 条件的. 为了証实这一点,只需注意到下式就够了:

$$\varphi(t_0, t)=\varphi(t_0, t)-\varphi(t_0, t_0).$$

§6. 續

1° 現在我們証明在今后常要用到的下述結論.

假定 $\varphi(t)$ 在光滑弧 L 上是适合 $H(\mu)$ 条件的，又設 $\omega(t)$ 在 L 上是一个有界函数，除了值 $t=t_0$ 可能是例外以外，它处处都具有对 t 的导函数[①],并在 $t=t_0$ 附近,有

$$\left|\frac{d\omega}{dt}\right|<\frac{C}{|t-t_0|} \quad (t \neq t_0), \tag{6.1}$$

---

① 我們把 $\frac{d\omega}{dt}$ 理解为

$$\lim_{t_1 \to t} \frac{\omega(t_1)-\omega(t)}{t_1-t} \quad (t_1 \text{ 及 } t \text{ 是 } L \text{ 上的点}).$$

显然(参看 §1, 1° 段)

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{ds} \Big/ \frac{dt}{ds}=\frac{d\omega}{ds} e^{-i\theta},$$

其中 θ 是 L 在 t 点处的切綫和 Ox 軸之間所夾的角,并因此

$$\left|\frac{d\omega}{dt}\right|=\left|\frac{d\omega}{ds}\right|.$$

其中C是常数,而t_0是L上的某个(定)点.

于是,

$$\psi(t)=[\varphi(t)-\varphi(t_0)]\omega(t)$$

在L上亦是适合$H(\mu)$条件的.

不失一般性,我們可以假定,t位在以t_0点为端点之一的标准弧上.那么,条件(6.1)等价于下述条件:

$$\left|\frac{d\omega}{ds}\right|<\frac{C_0}{|s-s_0|}, \tag{6.1a}$$

其中C_0是常数,而s和s_0是对应于t和t_0的弧坐标.此外,我們还可以假定$\omega(t)$仅取实値(因为,在相反的情形下,我們可以对它的实部和虛部单独来进行討論).用$\varphi(s)$, $\psi(s)$, $\omega(s)$表示$\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$,我們有

$$\begin{aligned}\psi(s+h)-\psi(s)&=[\varphi(s+h)-\varphi(s_0)]\omega(s+h)-[\varphi(s)-\varphi(s_0)]\omega(s)\\&=[\varphi(s+h)-\varphi(s)]\omega(s+h)+[\varphi(s)-\varphi(s_0)][\omega(s+h)-\omega(s)].\end{aligned}$$

不失一般性,可以假定$s-s_0\geqslant 0$, $h\geqslant 0$.于是,从$\omega(s)$的有界性,在后一行中的第一項按模不超过C_1h^μ,其中C_1是常数.当$s-s_0\leqslant h$时,这对于第二项显然亦是正确的.当$s-s_0\geqslant h$时,我們有$(0<\theta<1)$:

$$\begin{aligned}&|\varphi(s)-\varphi(s_0)|\cdot|\omega(s+h)-\omega(s)|\\&\quad\leqslant|\varphi(s)-\varphi(s_0)|\frac{C_0h}{s-s_0+\theta h}\leqslant\frac{AC_0(s-s_0)^\mu\cdot h}{s-s_0+\theta h}\\&\quad\leqslant AC_0\left(\frac{h}{s-s_0}\right)^{1-\mu}h^\mu\leqslant AC_0h^\mu,\end{aligned}$$

于是,便証明了我們的結論.

我們把这一个結論应用到一些簡单的例子上.

2°. 假定t是L上的动点,而t_0是L上的定点.那么,函数

$$\psi(t)=|t-t_0|^\mu\ln|t-t_0|,\quad 0<\mu\leqslant 1$$

在L上是适合$H(\mu-\varepsilon)$条件的,其中ε是小于μ的任意正数.事实上,如果令

$$\varphi(t)=|t-t_0|^{\mu-\varepsilon},\quad \omega(t)=|t-t_0|^{\varepsilon}\ln|t-t_0|,$$

我們可以把上面所証明的結論应用到 $\psi(t)$ 上. 显然, 可以交换 t 和 t_0 所处的地位,并且 $|t-t_0|^{\mu}\ln|t-t_0|$ 对于两个变量 t 和 t_0 是适合 $H(\mu-\varepsilon)$ 条件的.

更一般地,如果 $\varphi(t)$ 在 L 上适合 $H(\mu)$ 条件,那么,函数

$$\psi(t)=[\varphi(t)-\varphi(t_0)]\ln|t-t_0|$$

是适合 $H(\mu-\varepsilon)$ 条件的, 其中 ε 是小于 μ 的任意正数, 这是因为

$$\psi(t)=\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{|t-t_0|^{\varepsilon}}\cdot|t-t_0|^{\varepsilon}\ln|t-t_0|.$$

3°. 假定 t 是 L 上的动点,而 t_0 是 L 上的定点. 我們用

$$\vartheta=\vartheta(t_0,\ t)=\arg(t-t_0)+\text{常数}$$

表示向量 $\overrightarrow{t_0t}$ 和任一个固定方向之間的夹角,并且这一个角是从后一个方向量起的. 这一个角可以确定到差一个形式为 $2k\pi$ 的项, 其中 k 是整数. 暂时让 t 在 L 上变动, 并且不經过点 t_0, 我們約定連續地改变 $\vartheta(t_0,\ t)$. 当 t 經过 t_0 时 (如果 t_0 不是弧 L 的端点),这个角发生一个等于 π 的奇数倍的跃度.

容易看出,有界函数 $\omega(t)=\vartheta(t_0,t)$ 是适合条件(6.1)的,或者它是适合同样条件(6.1a)的. 这可以从 $\omega(t)$ 是函数 $\ln(t-t_0)$ 的虚部以及

$$\frac{d\ln(t-t_0)}{dt}=\frac{1}{t-t_0}\quad \text{和}\quad \left|\frac{d\ln(t-t_0)}{ds}\right|=\frac{1}{|t-t_0|}$$

导出.

每一个具有有界导函数 $f'(\vartheta)$ 的函数 $f(\vartheta)$ 亦都是适合条件(6.1)的. 特别是, 函数 $e^{\gamma\vartheta}$ 适合这一个条件, 其中 γ 是任意常数(一般讲来,它是一个复数).

因此,如果函数 $\varphi(t)$ 适合 $H(\mu)$ 条件,那么,函数

$$\psi(t)=[\varphi(t)-\varphi(t_0)]e^{\gamma\vartheta}\quad (\gamma\ \text{是任意常数})$$

亦适合 $H(\mu)$ 条件.

例如，函数

$$\psi(t)=(t-t_0)^{\mu}=|t-t_0|^{\mu}e^{i\mu\theta},\quad 0<\mu\leqslant 1$$

在 L 上是适合 $H(\mu)$ 条件的，其中 $\vartheta=\vartheta(t_0,\ t)=\arg(t-t_0)$，这是由于，函数 $\varphi(t)=|t-t_0|^{\mu}$ 是适合 $H(\mu)$ 条件的，并且 $\varphi(t_0)=0$.

正好同样地，函数

$$\psi(t)=|t-t_0|^{\mu}e^{\gamma\theta}\quad(0<\mu\leqslant 1,\ \gamma\ \text{是任意常数})$$

亦是适合 $H(\mu)$ 条件的.

假定 $\gamma=\alpha+i\beta$，此处 α 及 β 都是实常数. 我們来考虑函数

$$\psi(t)=(t-t_0)^{\gamma}=e^{\gamma[\ln|t-t_0|+i\theta]}=|t-t_0|^{\alpha}e^{i\beta\ln|t-t_0|+i\gamma\theta}.$$

容易看出，函数 $e^{i\beta\ln|t-t_0|+i\gamma\theta}$ 是有界的，并且适合条件(6.1). 因此，当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，函数 $\psi(t)$ 是适合 $H(\alpha)$ 条件的；当 $\alpha\geqslant 1$ 时，它是适合 $H(1)$ 条件的. 当 $\alpha=0,\ \beta\neq 0$ 时，这个函数亦即函数

$$\psi(t)=(t-t_0)^{i\beta}=e^{i\beta\ln|t-t_0|-\beta\theta}$$
$$=e^{-\beta\theta}\{\cos[\beta\ln|t-t_0|]+i\sin[\beta\ln|t-t_0|]\},$$

在 t_0 的邻域內显然不适合 H 条件；它甚至是不連續的. 但是，函数

$$\psi(t)=|t-t_0|^{\mu}(t-t_0)^{i\beta},\quad 0<\mu\leqslant 1$$

是适合 $H(\mu)$ 条件的.

显然，正好象在前面那样，在上面所有各例題中，可以交换 t 与 t_0 所处的地位.

和前面类似，容易驗証，如果在 L 上变量 t 和 t_0 的函数 $\varphi(t,\ t_0)$ 在 L 上是适合 $H(\mu)$ 条件的，又若 $\varphi(t_0,\ t_0)=0$，那么，函数(比照 §5, 7° 段)

$$\psi(t_0,\ t)=\frac{\varphi(t_0,\ t)}{(t-t_0)^{\gamma}}\quad(\gamma=\alpha+i\beta,\ 0\leqslant\alpha<\mu)$$

是适合 $H(\mu-\alpha)$ 条件的.

4°. 假定 t 是 L 上的动点，而 t_0 是 L 上的定点. 在点 t_0 的邻域內，我們来考察比值

$$\omega(t)=\frac{t-t_0}{s-s_0}.$$

容易直接験証：$\omega(t)$ 和 $1/\omega(t)$ 都是适合条件(6.1)的，或者是适合同样的条件(6.1a)的.

因此，例如，我們可以断定，

$$|t-t_0|^{\varepsilon}\frac{t-t_0}{s-s_0},\quad |s-s_0|^{\varepsilon}\frac{s-s_0}{t-t_0}\quad (0<\varepsilon\leqslant 1)$$

都是适合 $H(\varepsilon)$ 条件的. 正好同样地，容易験証，

$$|t-t_0|^{\varepsilon}\frac{|t-t_0|^{\mu}}{|s-s_0|^{\mu}},\quad |s-s_0|^{\varepsilon}\frac{|s-s_0|^{\mu}}{|t-t_0|^{\mu}}\quad (0<\varepsilon<1)$$

都是适合 $H(\varepsilon)$ 条件的，其中 μ 是任意常数.

这里，当然，亦可以交换 t 与 t_0 所处的位置.

§7. 續

1° 最后我們还要推导一个簡单的命題. 假定 $f(s)$ 是定义在区間 $s_1\leqslant s\leqslant s_2$ 上的实变量 s 的函数，并且它在这区間上具有 n 阶連續的导函数 $f^{(n)}(s)$. 令

$$F(s_0,s)=\frac{f(s)-f(s_0)}{s-s_0},\quad s_1\leqslant s,\ s_0\leqslant s_2,\tag{7.1}$$

同时，規定

$$F(s,s)=\frac{df(s)}{ds}.$$

那么，存在着$(n-1)$阶的偏导函数

$$\frac{\partial^{n-1}F(s_0,s)}{\partial s^k\,\partial s_0^l},\quad k+l=n-1,$$

并且这些导函数当 $s_1\leqslant s,\ s_0\leqslant s_2$ 时是連續的. 如果，除此而外，$f^{(n)}(s)$ 适合 $H(\mu)$ 条件，那么，上述这些偏导函数对两个变量 s 与 s_0 是适合 $H(\mu)$ 条件的.

所有这些都可以从公式

$$f(s)-f(s_0)=\int_{s_0}^{s} f'(\sigma)d\sigma=(s-s_0)\int_0^1 f'[s_0+u(s-s_0)]du \quad (7.2)$$

导出，从而

$$\frac{\partial^{n-1}F(s_0, s)}{\partial s^k \partial s_0^l}=\int_0^1 u^k(1-u)^l f^{(n)}[s_0+u(s-s_0)]du. \quad (7.3)$$

2°. 关于 n 阶偏导函数

$$\frac{\partial^n F(s_0, s)}{\partial s^k \partial s_0^l}, \quad k+l=n$$

还可以导出下列結論. 如果 $f^{(n)}(s)$ 适合 $H(\mu)$ 条件，那么，这些 n 阶偏导函数都可以写成形式

$$\frac{K(s_0, s)}{|s-s_0|^\lambda}, \quad (7.4)$$

其中 $1-\mu<\lambda=$常数<1，而 $K(s_0, s)$ 对两个变量是适合 H 条件的；此时，λ 可以在上述区間内任意地选取.

为了証明这个結論，我們可以利用公式(7.3)[①]的某些变形的公式，我們可以用下法得出这些变形的公式. 假定 $k\geqslant 1$，又在公式(7.3)中把 k 改写成$(k-1)$，并且改回到原来的积分变量 $\sigma=s_0+u(s-s_0)$，我們就可导出公式

$$\frac{\partial^{n-1}F(s_0, s)}{\partial s^{k-1}\partial s_0^l}=\frac{1}{(s-s_0)^n}\int_{s_0}^{s}(\sigma-s_0)^{k-1}(s-\sigma)^l f^{(n)}(\sigma)d\sigma, \quad k+l=n.$$

将两端对 s 微分，又假定 $l\geqslant 1$，再改回到积分变量 u，我們容易得出

$$\frac{\partial^{k-1}F(s_0, s)}{\partial s^k \partial s_0^l}$$
$$=\frac{1}{s-s_0}\int_0^1 u^{k-1}(1-u)^{l-1}(nu-k)f^{(n)}[s_0+u(s-s_0)]du. \quad (7.5)$$

对于数 k 及 l 中有一个为零的情形，用同样的方法，我們容易得出类似的公式. 亦就是，当 $k=n$, $l=0$ 时

① 我們不能直接利用从(7.3)将 n 换成$(n+1)$而得出的公式，这是因为我們并沒有假定导函数 $f^{(n+1)}(s)$ 的存在性.

$$\frac{\partial^n F(s_0, s)}{\partial s^n}$$

$$=\frac{1}{s-s_0}\left\{f^{(n)}(s)-n\int_0^1 u^{n-1}f^{(n)}[s_0+u(s-s_0)]\,du\right\}; \quad (7.5a)$$

在 $k=0$, $l=n$ 情形下的公式和上面公式的区别仅在于記号上的不同. 用 $\varphi(s_0, s)$ 表示任意一个这样的公式的右端中 $1/(s-s_0)$ 的乘子,就容易断言,当 $f^{(n)}(s)$ 适合 $H(\mu)$ 条件时,$\varphi(s_0, s)$ 对两个变量亦是适合 $H(\mu)$ 条件的,并且 $\varphi(s_0, s_0)=0$①. 因此,依据在 §5 (7° 段) 中所讲过的結果,这些右端可以写成形如 (7.4) 的形式:

$$\frac{\varphi(s_0, s)}{s-s_0}=\pm\frac{\varphi(s_0, s)}{|s-s_0|^{1-\lambda}}\cdot\frac{1}{|s-s_0|^{\lambda}}, \quad 1-\mu<\lambda<1,$$

于是,就証明了我們的結論.

3° 我們把上面的結果应用于某些簡单而重要的实例上.

假定 $L=ab$ 是一条光滑弧. 此外,还假定 L 在点 $t=x+iy$ 处的切綫与任一固定方向(例如, Ox 軸方向)之間所夾的角 $\theta(t)$ (从固定方向量起) 是适合 $H(\mu)$ 条件的. 那么,显然坐标 $x=x(s)$, $y=y(s)$ 对弧坐标 s 的导函数

$$x'(s)=\cos\theta, \quad y'(s)=\sin\theta$$

亦是适合 $H(\mu)$ 条件的. 导函数

$$\frac{dt(s)}{ds}=e^{i\theta}$$

显然亦是适合同一个条件的. 現在我們考察比值

$$\frac{t-t_0}{s-s_0}=\frac{t(s)-t(s_0)}{s-s_0},$$

此处点 $t_0=t(s_0)$ 亦属于弧 L. 依据 1° 段的結果(在 $n=1$ 的情形下),上述比值对两个变量 s 与 s_0 是适合 $H(\mu)$ 条件的.

---

① 我們指出,在公式(7.5)中,

$$u^{k-1}(1-u)^{l-1}(nu-k)\,du=-d[u^k(1-u)^l].$$

我們現在考察 L 上的两个点 t 和 t_0 的函数

$$\vartheta(t_0,\ t)=\arg(t-t_0)+\text{常数},$$

此处,正和在上一节 3° 段的例中那样, $\vartheta(t_0,\ t)$ 表示向量 $\overrightarrow{t_0t}$ 和某一固定方向之間所夹的角,并且它是从固定方向量起的. 亦象在那个例子中那样,暫时当点 t 与 t_0 彼此不重合时,我們約定好連續地改变 $\vartheta(t_0,\ t)$. 当这些点彼此相遇时,則 $\vartheta(t_0,\ t)$ 产生一个等于 π 的奇数倍的跃度.

我們来証明,在上述条件下,函数 $\vartheta(t_0,\ t)$ 对定点 t_0 和动点 t 在弧 at_0 和 t_0b 中的每一个上都单独地适合 $H(\mu)$ 条件. 对定点 t 和动点 t_0 的情形,亦有类似的結果.

不失一般性,显然可以假定, $L=ab$ 是标准弧. 如果規定 Ox 軸的方向与这一条弧在某一个点处的切綫是相互平行的,我們就有 $x'(s)\neq 0$, 且当 $s\neq s_0$ 时, $x(s)-x(s_0)\neq 0$.

我們令

$$X(s_0,\ s)=\frac{x(s)-x(s_0)}{s-s_0},\quad Y(s_0,\ s)=\frac{y(s)-y(s_0)}{s-s_0}.$$

依据在 1° 段中已經証明过的命題,函数 $X(s_0,\ s)$ 及 $Y(s_0,\ s)$ 在 L 上都是連續的,并且它們都适合 $H(\mu)$ 条件;此外, $X(s_0,\ s)\neq 0$. 我們将把

$$\operatorname{arctg}\frac{Y(s_0,\ s)}{X(s_0,\ s)}$$

理解为在 L 上是連續变化的任一分枝. 那么,

$$\vartheta(t_0,\ t)=\operatorname{arctg}\frac{Y(s_0,\ s)}{X(s_0,\ s)}+C, \tag{7.6}$$

此处,当点 t 与 t_0 彼此不相遇时, C 保持常数値,并且仅当这些点彼此相遇时, C 才产生一个(等于 π 的奇数倍的)跃度.

因为公式 (7.6) 右端的第一項显然是适合 $H(\mu)$ 条件的,因此,便証明了我們的結論.

将等式(7.6)两端对 s 或者对 s_0 微分，并且把 2° 段中的結果应用到 $X(s_0, s)$ 及 $Y(s_0, s)$ 的偏导函数上，那么，我們容易断言，偏导函数 $\frac{\partial\vartheta}{\partial s}$ 及 $\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0}$ 都可以表成形式

$$\frac{K^*(t_0, t)}{|s-s_0|^{\lambda}},$$

其中 λ 是某个小于 1 的实数，而 $K^*(t_0, t)$ 对两个变量都是适合 H 条件的. 如果再注意到在这段一开首所指出的关于比值 $\frac{t-t_0}{s-s_0}$ 的性质，我們便可以导出，偏导函数 $\frac{\partial\vartheta}{\partial s}$ 及 $\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0}$ 都可以表成下述形式：

$$\frac{K(t_0, t)}{|t-t_0|^{\lambda}}, \quad \lambda<1$$

的結論，其中 $K(t_0, t)$ 对两个变量是适合 H 条件的.

我們順便可以推出 $\frac{\partial\vartheta}{\partial s}$ 与 $\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0}$ 的明显表示式. 亦就是，为了书写簡单起見，假定角 θ 与 ϑ 都是从 Ox 軸量起的，对等式

$$\ln(t-t_0) = \ln r + i\vartheta, \quad r = |t-t_0|,$$

两端微分，我們便得出

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s} + i\frac{\partial\vartheta}{\partial s} = \frac{1}{t-t_0}\frac{dt}{ds} = \frac{e^{i\theta}}{re^{i\vartheta}} = \frac{e^{i(\theta-\vartheta)}}{r},$$

由此，比較等式两端的虚部，我們便导得

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial s} = \frac{\sin(\theta-\vartheta)}{r} = \frac{\sin\alpha(t_0, t)}{r}, \tag{7.7}$$

其中 $\alpha(t_0, t)$ 表示点 t 处的(正)切綫与向量 $\overrightarrow{t_0t}$ 之間所夹的角，并且它是从后者量起的. 类似地，可以得出，

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0} = -\frac{\sin(\theta_0-\vartheta)}{r} = \frac{\sin\alpha(t, t_0)}{r}, \tag{7.8}$$

其中 θ_0 是点 t_0 处的(正)切綫与 Ox 軸之間所夹的角，而 $\alpha(t, t_0)$ 是这一条切綫与向量 $\overrightarrow{tt_0}$ 之間所夹的角，并且它是从后者量起

的[①].

和上面完全类似，并且同样簡单地可以証明下述一般結果.

假定角 $\theta(t)$ 具有連續的 n 阶导函数 $\frac{d^n\theta}{ds^n}$，或者假定坐标 $x(s)$ 与 $y(s)$ 具有連續的 $(n+1)$ 阶导函数. 那么，n 阶偏导函数

$$\frac{\partial^n \vartheta(t_0, t)}{\partial s^k \partial s_0^l}, \quad k+l=n \tag{7.9}$$

是連續的[②]. 如果，除此而外，导函数 $\frac{d^n\theta}{ds^n}$ 适合 $H(\mu)$ 条件，那么，n 阶偏导函数 (7.9) 对两个变量是适合 $H(\mu)$ 条件的，而 $(n+1)$ 阶偏导函数

$$\frac{\partial^{n+1} \vartheta(t_0, t)}{\partial s^k \partial s_0^l}, \quad k+l=n+1 \tag{7.10}$$

可以表成形式

$$\frac{K(t_0, t)}{|t-t_0|^\lambda}, \tag{7.11}$$

其中 λ 是小于 1 的实常数，而 $K(t_0, t)$ 对两个变量是适合 H 条件的.

特别是，当一阶导函数 $\frac{d\theta}{ds}$ 連續时，亦就是，当曲綫 L 具有連續变化的曲率

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{\rho}$$

时（其中 ρ 是带有符号的曲率半徑），則偏导函数 $\frac{\partial\vartheta}{\partial s}$, $\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0}$ 都是連續的. 如果，除此而外，曲率又是适合 $H(\mu)$ 条件的，那么，这些偏

① 依据公式 (7.7)，并注意到，由函数 $\vartheta(t_0, t)$ 的定义，我們有 $\vartheta(t, t_0)=\vartheta(t_0, t)$ + 常数，此处常数是 π 的一个奇数倍的数，那么，只要交换 t_0 与 t 所处的地位，立刻便可以写出公式 (7.8).

② 参看这一节末尾的注釋 1.

导函数也适合 $H(\mu)$ 条件.

注釋 1 上面在某些情况下，我們已經讲到了，在 $t=t_0$ 处是間断的函数 $\vartheta(t_0, t)$ 之偏导函数的連續性(偏导函数因此亦都是存在的). 在这些情况下,曾經指出过，当 $t\neq t_0$ 时，所考虑的偏导函数是存在的，并且当 t 与 t_0 趋于同一个值时，所考虑的偏导函数趋于完全确定的极限.

注釋 2 在应用中常常会遇到角 θ 是适合 H 条件的那一种曲綫. 我們把这一种曲綫叫做适合 Ляпунов 条件的曲綫，或者簡单地叫做 Ляпунов 曲綫(弧,圍綫).

§8. 定义在逐段光滑曲綫上的 H 类函数、H_0 类函数、H^* 类函数及 H_ε^* 类函数

我們現在考察定义在任意一条逐段光滑曲綫上的函数，并且引进一些在今后要用到的概念.

1° 于是，假定 L 为任意一条逐段光滑曲綫[在 §1 (4° 段)中已給出过的定义的意义下].

我們用 $c_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 表示曲綫 L 的結点(包括端点在内)，或者在沒有必要談到这些結点的区别时，我們簡单地用 c 来表示它們. 我們将用 $L_k(k=1, 2, \cdots, p)$ 表示构成 L 的那些簡单的光滑弧. 我們仍然把 L 上不是結点的点叫做普通点.

2° 假定 $\varphi(t)$ 是 L 上点 t 的某个函数，它在普通点处以及在結点处都是单值确定的. 当函数 $\varphi(t)$ 在构成 L 的每一条(閉[①])弧 L_k 上都适合 $H(\mu)$ 条件时，我們就說这一个函数在 L 上是属于 H 类的，或者更仔細地說它是属于 $H(\mu)$ 类的.

如果函数 $\varphi(t)$ 不是在整个曲綫 L 上，而只是在 L 上結点 c 的充分小邻域内的那一部分上是有定义的，并且是属于 $H(\mu)$ 类的,

① 我們提醒一下，当端点属于弧时，我們就称此(敞开)弧是閉的.

那么，我們就說，$\varphi(t)$ 在結点 c 的邻域内是属于 H 类的[1]，或者更精确地說，它在結点 c 的邻域内是属于 $H(\mu)$ 类的.

3°. 下述情形会比前面的情形遇到得更多一些. 假定 $\varphi_k(t)$ 是分别单值确定在构成 L 的（閉）弧 L_k 上的函数 $(k=1, 2, \cdots, p)$，又假定 $\varphi(t)$ 是用下法定义在 L 上的函数：

$$\varphi(t)=\varphi_k(t) \quad 当\ t\in L_k,\ k=1, 2, \cdots, p. \tag{8.1}$$

这样一来，函数 $\varphi(t)$ 在 L 上所有普通点处以及所有端点处都是单值地确定了的. 但是，在有几条弧相遇的結点处，如果不改变我們所感兴趣的結果，那么，它通常可能是不确定的，不过，在今后，如果不特别作相反的声明，当讲到函数 $\varphi(t)$ 在任一个結点 c 处的值时，我們总认为它是下列各个值之一：

$$\varphi(c)=\varphi_k(c); \quad k=k_1, k_2, \cdots, \tag{8.2}$$

其中 $k_1, k_2, \cdots$ 是在結点 c 处相遇的弧 L_k 之标号. 换句話說，当讲到值 $\varphi(c)$ 时，我們总认为，点 c 是属于过 c 点的任一条弧 L_k 上的.

例如，当讲到函数 $\varphi_k(t)$ 在 L 上处处都不取值零时，我們总是指：在所有普通点处 $\varphi(t)\neq 0$，而在結点处，$\varphi_k(c)\neq 0$, $k=k_1, k_2, \cdots$.

如果每一个函数 $\varphi_k(t)$ 在对应的（閉）弧 L_k 上是适合 H 条件的，那么，我們就說，函数 $\varphi(t)$ 在 L 上是属于 H_0 类的. 如果函数 $\varphi_k(t)$ 只是在弧 L_k 上結点 c 附近充分小的部分上是有定义的，并且是适合 H 条件的，那么，我們就說，$\varphi(t)$ 在結点 c 的邻域内是

---

① 由定义可以知道，在結点 c 的邻域内属于 $H(\mu)$ 类的函数 $\varphi(t)$，适合条件

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant A|t_2-t_1|^{\mu} \quad (A=常数,\ \mu=正常数),$$

其中 t_1 和 t_2 是弧 L_k 上靠近 c 的任意两个点，而 L_k 是任意一条以 c 为端点的弧（t_1 与 t_2 中有一个点与 c 重合的情形也不例外）.

容易看出，当点 t_1 与 t_2 位于在 c 处相遇的不同的弧上时，只要这些弧在 c 点彼此不相切，而是相交成非鈍角，那么，上述形式的不等式亦是成立的；参照本书末尾的附录二（1° 段）.

属于 H_0 类的.

4° 如果定义在 L 上的函数 $\varphi(t)$ 在曲綫 L 的每一个不包含結点的閉部分上都是适合 H 条件的，又在任意的結点 c 附近，它可以表成形式

$$\varphi(t)=\frac{\varphi^*(t)}{|t-c|^\alpha} \quad (0\leqslant\alpha=\text{常数}<1), \tag{8.3}$$

其中 $\varphi^*(t)$ 在 c 的邻域內是属于 H_0 类的[①]，我們就說，$\varphi(t)$ 在 L 上是属于 H^* 类的. 如果表示式 (8.3) 只在已知結点 c 的附近成立，那么，我們就說 $\varphi(t)$ 在 c 的邻域內是属于 H^* 类的.

5° 最后，如果对于每一个任意小的 α，函数 $\varphi(t)$ 在結点 c 的邻域內是属于 H^* 类的，亦就是，若对每一个任意小的 $\varepsilon(>0)$，$|t-c|^\varepsilon\varphi(t)$ 是属于 H 类的，那么，我們就說，$\varphi(t)$ 在 c 的邻域內是属于 H^*_ε 类的.

如果上述条件对于所有的結点都是适合的，并且可能除了在結点的邻域外，函数 $\varphi(t)$ 处处都是适合 H 条件的，那么，我們就說 $\varphi(t)$ 在 L 上是属于 H^*_ε 类的.

例如(§6, 3° 段)，函数 $(t-c)^{i\beta}$[其中 β 为任意实数]在 c 的邻域內是属于 H^*_ε 类的；这是 H^*_ε 类中有界函数的例子；$\ln(t-c)$ 可以作为 H^*_ε 类中无界函数的例子.

6° 可以把上面所引进的定义，自然地推广到給定的逐段光滑曲綫 L 上的几个变点的函数的情形.

例如，如果 L 上点 t_1 与 t_2 的函数 $\varphi(t_1, t_2)$ 当固定值 t_2 时对变量 t_1 是属于 H_0 类的，又当固定值 t_1 时对变量 t_2 是属于 H_0 类的，我們就說，$\varphi(t_1, t_2)$ 在 L 上是属于 H_0 类的. 更仔細地讲来，如果 $L_1, L_2, \cdots, L_p$ 是构成 L 的光滑弧，那么，按照定义，$\varphi(t_1, t_2)=\varphi_{ij}(t_1, t_2)$，$i, j=1, 2, \cdots, p$，其中 $\varphi_{ij}(t_1, t_2)$ 是分别在

---

① (任意小地)增大 α 的值以后，可以使得 $\varphi^*(t)$ 是属于 H 类的 (甚至在結点处取值零)，

閉弧 L_i 与 L_j 上的点 t_1 与 t_2 的函数，并且它对两个变量 t_1 与 t_2 是适合 H 条件的. 当点 t_1 和 t_2 都与結点重合时，$\varphi(t_1, t_2)$ 的值根据它在弧 $L_1, L_2, \cdots, L_p$ 中过給定結点的那些弧上的值(我們把这些結点算作那些弧上的点)来确定.

注釋 1 如果我們允許所考虑的函数不仅在結点处可以具有上述类型的奇性，而且在 L 上任意給定的有限个其他点处亦可以有这一种类型的奇性，那么我們并沒有得出推广. 实际上，我們可以把这些給定的点都归入結点. 我們以后便是这样来处理的.

注釋 2 明显地，H 类、H_0 类以及 H_ε^* 类都是 H^* 类的子类；例如，如果在(8.3)中 $\alpha=0$，那么，$\varphi(t)$ 属于 H_0 类.

§9. 連續函数的边值

1°. 假定 L 是一条逐段光滑曲綫(§1).

容易看出(参看§2)，圍繞 L 上每一个不是其結点(曲綫 L 的端点亦包括在內)的点 t_0，都可以画出一个半徑为充分小的圓，而 L 把这一个圓分成两部分，当循着 L 的正方向来看时，这两个部分分别在 L 的左边和右边. 与此相应，我們可以考虑点 t_0 的**左邻域**和**右邻域**. 也显然，应該怎样来理解，曲綫 L 上不包含結点的任何部分的左邻域和右邻域.

我們分别用加在上角的符号 $+$ 或 $-$ 来表示左侧及右侧以及有关左邻域及右邻域的其他記号.

如果 L 是一条**簡单的**光滑曲綫或者逐段光滑曲綫，它由包圍平面上某个連通部分① (亦就是，平面上某个区域)的一些封閉圍綫所构成，我們总可

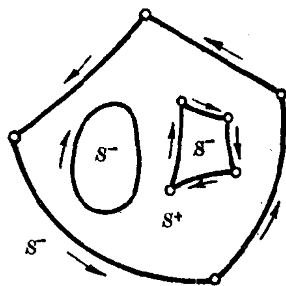


图 4

① "区域"这一个术語仅用来表示平面的連通部分.

以这样来选取 L 的正方向，使当沿着 L 循这个方向移动时，这个区域永远保持在 L 的左侧或右侧(图 4)；在这种情形下，我們通常用 S^+ 表示保持在左侧的部分平面，而用 S^- 表示保持在右侧的那一部分.

2°. 假定 $\Phi(z)$ 是平面上点 $z=x+iy$ 的函数①，它在曲綫 L 的邻域内，可能除了 L 上的点外，处处都是有定义的，而且都是連續的. 假定 t 是 L 上的点，并且 t 不和 L 的結点重合.

如果当 z 沿着任意一条保持在 t② 的左侧(或者右侧)的路徑而趋于 t 时，函数 $\Phi(z)$ 趋于一个确定的极限 $\Phi^+(t)$ [或者 $\Phi^-(t)$]，我們就說，函数 $\Phi(z)$ **可以从左侧(或者右侧)連續拓展到点 t 上**.

当且仅当在这种情形下，我們才說，函数 $\Phi(z)$ 在点 t 处取得**左边值**[或者**右边值**]③.

如果函数 $\Phi(z)$ 可以从左侧[或者右侧]連續拓展到曲綫 L 某一部分 L' 的每一个点上，我們就說，$\Phi(z)$ **可以从左侧**[**或者从右侧**]**連續拓展到** L' **上**. 在这种情形下，函数 $\Phi^+(t)$ [函数 $\Phi^-(t)$] 在 L' 上必然是連續的. 事实上，按照条件，对于任意預先給定的 $\varepsilon>0$，均存在仅依賴于 ε 的 $\delta>0$ (当 t 給定后)，使当 $|z-t|<\delta$ 且 z 位在 L 的左侧时有

$$|\Phi(z)-\Phi^+(t)|<\varepsilon. \tag{*}$$

現在假定 t' 是 L 上的另一个点，使 $|t'-t|<\delta$. 如果 z 保留在 L 上的左侧，并且适合条件 $|z-t|<\delta$，它又趋于 t'，那么，$\Phi(z)$ 将

---

① 这是指，

$$\Phi(z)=U(x, y)+iV(x, y),$$

其中 $U(x, y)$ 及 $V(x, y)$ 是变量 x 和 y 的某些实函数.

② 换句話說，当 z 趋于 t 时，z 所取值的集合，除了受条件 $|z-t|\to 0$ 以及 z 位在 L 的左(右)侧的限制而外，不再有別的限制.

③ 在本书正文中所給出的定义与下述定义是等价的：如果对每一个任意小的正数 ε，都可以选取到这样的正数 δ，使当 z 位在 L 的左侧，且适合条件 $|z-t|<\delta$ 时，就有 $|\Phi(z)-\Phi^+(t)|<\varepsilon$，我們就說，$\Phi(z)$ 在点 t 处取得左边值 $\Phi^+(t)$. 对右边值亦有类似的等价定义.

趋于 $\Phi^+(t')$；但是，从(*)可以知道，

$$|\Phi^+(t')-\Phi^+(t)|\leqslant\varepsilon,$$

而这亦就証明了我們的結論（对于 $\Phi^-(t)$ 亦可以类似地进行推导）①.

由上述可以知道，如果用 $S^+(S^-)$ 表示曲綫 L' 的左(右)邻域，又若函数 $\Phi(z)$ 在 L' 上取值 $\Phi^+(t)[\Phi^-(t)]$，那么，函数 $\Phi(z)$ 在 $S^++L'(S^-+L')$ 上将是連續的.

3° 我們还要指出一个几乎是很显然的事实，我們在以后常要用到它.

假定 ab 是 L 上的一条标准弧. 我們来考察一簇平行直綫 Π, Π 中每一条直綫同 ab 的切綫所夹的非鈍角均不小于某个定角 $\beta_0>\alpha_0$，而 α_0 是标准弧定义中所出現的銳角（§2）；因此，我們知道（§2），直綫簇 Π 中每一条直綫 Δ（它介于 Π 中分別經过 a 和 b 的两条直綫 Δ_a 和 Δ_b 之間）同弧 ab 交且仅交于一点. 現在我們假定，当 z 保持在 ab 的左側（或者右側）且沿着直綫簇 Π 中的一条直綫 Δ 而趋于 t 时，$\Phi(z)$ 一致地趋于 $\Phi^+(t)$（或者 $\Phi^-(t)$）. 那么，函数 $\Phi(z)$ 可以从左側(或者右側)連續拓展到弧 ab 的任何一个不包含它的端点的部分上.

事实上，首先可以从趋于极限的一致性得出，函数 $\Phi^+(t)[\Phi^-(t)]$ 在 ab 上是連續的. 現在假定 z 沿着任意一条例如保持在 ab 的左側的路徑而趋于弧 ab 上的点 t，而 t 不与 ab 的端点重合. 当 $|z-t|$ 充分小时，直綫簇 Π 中經过点 z 的直綫与弧 ab 相交于某点 t'. 此时量 $|z-t'|$ 和 $|t'-t|$ 可以是任意

---

① 从証明本身可以看出，甚至在下述情形，即如果不要求 $\Phi(z)$ 是連續的，而只要求 $\Phi(z)$ 可以从左側或者右側連續拓展到部分 L' 的每一个点 t 上，那么有关 $\Phi^+(t)$ 和 $\Phi^-(t)$ 的連續性的命題仍然是成立的. 这个命題是属于 P. Painlevé 的；例如，可以参看 W. F. Osgood[1]第 53 頁.

亦可以参看吳新謀等編的数学物理方程第一册（科学出版社，1958 年），第 8～9 頁. ——譯者注

小的①.

因此,差式

$$\Phi(z)-\Phi^{+}(t)=[\Phi(z)-\Phi^{+}(t')]+[\Phi^{+}(t')-\Phi^{+}(t)]$$

亦是任意小的,这亦就証明了我們的結論.

4°. 到目前为止,我們在討論边値时,都除去了曲綫 L 的結点. 現在假定 $t=c$ 是一个結点(特別地, t 可以是它的端点).

构成曲綫 L 的并且在結点 c 处相遇的那些光滑弧, 把点 c 的邻域分成有限个具有公共頂点 c 的扇形 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$(图 5, a). 如果当 z 沿着任意一条保持在扇形 σ_k 內部的路徑而趋于 c 时, $\Phi(z)$ 趋于一个确定的极限,那么,我們就說,函数 $\Phi(z)$ 可以从扇形 σ_k 內連續拓展到結点 c 上. 我們把这个极限叫做函数 $\Phi(z)$ 在点 c 处从扇形 σ_k 內取得的边值.

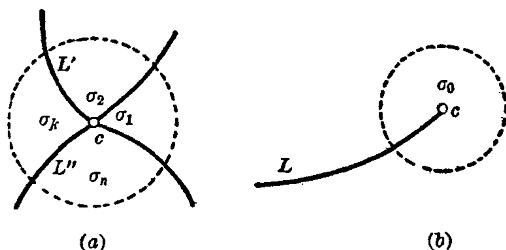


图 5

設 L' 与 L'' 是圍成扇形 σ_k 的光滑弧(結点 c 为其公共端点), 又設函数 $\Phi(z)$ 可以从扇形 σ_k 內②連續拓展到位于結点邻域內的曲綫 L' 与 L'' 的所有点 t 以及結点 c 上. 我們用 $\Phi(t)$ 表示函

① 这可以从考察三角形 ztt' 而得出. 由于介于弦 $t't$ 和綫段 $t'z$ 之間的(非鈍)夹角 ω 不小于某个角 $\omega_0>0$ (§2), 因此, 我們显然有

$$|t'-t|\leqslant\frac{|t-z|}{\sin\omega}\leqslant\frac{|t-z|}{\sin\omega_0},\quad |z-t'|\leqslant\frac{|t-z|}{\sin\omega}\leqslant\frac{|t-z|}{\sin\omega_0}.$$

② 这个說法的意思显然是: 从扇形 σ_k 內到曲綫 L' (或者 L'') 的点 t 上的拓展, 是从 L' (或者 L'') 的左側或者右側拓展到点 t 上,而这是与扇形 σ_k 在 L' (或者 L'') 的左側或右側有关的.

数 $\Phi(z)$ 在 t 处的边值 ($t=c$ 的情形并不除外). 此时, 容易看出, 曲綫 $L'+L''$ 上点 t 的函数 $\Phi(t)$ 在点 c 的邻域內 (包括 c 在內) 是連續的;其証明和 2° 段中类似的命題的証明沒有什么区别. 如果再把 $\Phi(t)$ 当作函数 $\Phi(z)$ 在 $L'+L''$ 上(又在点 c 的邻域內, 包括 c 在內)的值,那么,函数 $\Phi(z)$ 在由扇形 σ_k 的点及曲綫 $L'+L''$ 所构成并包含在以 c 为中心的充分小的圓內的閉域上是連續的.

5°. 在当結点 c 是曲綫 L 的端点的特殊情形下 (图 5, b), 我們只有一个由沿着 L 将点 c 的邻域割开而构成的"扇形" σ_0.

容易看出, 上述命題可以应用到这一个特殊情形上. 如果当 z 沿着任意一条不与 L 相遇的路徑而趋于端点 c 时, 函数 $\Phi(z)$ 趋于一个确定的极限,那么,$\Phi(z)$ 就連續拓展到 c 上. 如果这一极限是存在的,它便是 $\Phi(z)$ 在点 c 处的边值;我們簡单地用 $\Phi(c)$ 来表示它.如果函数 $\Phi(z)$ 可以从左側及右側連續拓展到曲綫 L 上位于端点 c 的邻域內的所有点 t 以及端点 c 上, 那么, 边值 $\Phi^+(t)$ 及 $\Phi^-(t)$ 在 L 上 c 的邻域內是連續的,并且

$$\lim_{t\to c}\Phi^+(t)=\lim_{t\to c}\Phi^-(t)=\Phi(c).$$

注釋 1 在本书正文中, 以后各处每当讲到某一个函数 $\Phi(z)$ 的边值以及在应用記号 $\Phi^+(t)$ 和 $\Phi^-(t)$ 时,我們总是认为,这些极限是对应地沿着任意一条位在 L 的左側或者右側的路徑而取得的;此时,当然要假定点 t 不与結点重合. 通常在讲到在 t 处的左边值或者右边值时, 如果不作相反的声明, 都假定了点 t 不是結点.

注釋 2 以后在正文中很多(特別指出的)地方,要指出已敘述过的結果的某些推广, 而不加以証明. 在这些地方, 有时把函数 $\Phi(t)$ 的边值 $\Phi^+(t)$ 和 $\Phi^-(t)$ 理解为沿着不相切的路徑而取得的边值, 或者, 更确切地讲,当 z 从 L 的左側或右側趋于 t 时, 如果綫段 tz 与 L 在 t 处的切綫所夹的(非鈍)角保持不小于某个固定

的(充分小的)銳角，那么，函数 $\Phi(z)$ 的极限就是 $\Phi^+(t)$ 或者 $\Phi^-(t)$. 这种极限有时叫做角边值. 当沿着任意路徑的边值不存在时，这些边值也可能是存在的.

§10. 分区全純函数

1°. 假定 L 所表示的曲綫和上一节中所表示的是相同的，而 $\Phi(z)$ 是在 z 平面上的每一个不包含曲綫 L 上的点的有限区域内为全純的函数. 再假定函数 $\Phi(z)$ 可以从左側及右側連續拓展到 L 上，而在結点附近它适合下列条件：

$$|\Phi(z)|<\frac{K}{|z-c|^{\alpha}}, \tag{10.1}$$

其中 c 为对应的結点，K ① 及 α 为某些正常数，并且特別重要的是 $\alpha<1$.

我們把这样的函数叫做具有跳跃曲綫 L 的分区全純函数；跳跃曲綫有时亦叫做边界曲綫.

如果在定义分区全純函数时，我們允許它可以不連續拓展到位在构成 L 的光滑弧上的某些有限个已知点上，而在这些点附近不等式(10.1)成立，那么，我們事实上并沒有得出任何推广；实际上(参考§8末尾的注釋1)，我們可以把这些点归入結点.

如果 $\Phi(z)$ 在无穷远点的邻域内的展开式

$$\Phi(z)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j \tag{10.2}$$

中只具有有限多个 z 的正幂项，我們就說，$\Phi(z)$ 在无穷远处有有限阶.

如果 a_k 是展开式(10.2)中最后一个不等于零的系数(我們現在除掉了所有 $a_j=0$ 的情形，亦就是，除掉了在包含点 $z=\infty$ 的某一个区域内 $\Phi(z)=0$ 的情形)，那么，我們就說，$\Phi(z)$ 在无穷远处

① 为了避免混淆起見，已将大写的 C 改为 K. ——譯者注

的阶数为 k. 当 $k>0$ 时,点 $z=\infty$ 是函数 $\Phi(z)$ 的 k 阶极点,而当 $k<0$ 时,点 $z=\infty$ 则是这个函数的 $(-k)$ 阶(或重数)零点(或根). 当 $k=0$ 时,亦就是,当 $\Phi(\infty)=a_0$ 是一个确定的、异于零的有限数时,为了方便起見,我們就說,$\Phi(z)$ 在 $z=\infty$ 处有零阶的极点或者有零阶的零点. 最后,当 $k\leqslant 0$ 时,我們就說,$\Phi(z)$ 是包括无穷远点在内的分区全純函数.

2°. 我們現在提醒一下,我們以后常要用到的解析函数的一个著名的性质.

假定 S_1 与 S_2 是平面上两个沒有公共內点的,但是沿着某一条光滑弧 L 相互銜接的連通部分,弧 L 是它們边界的公共部分;我們不把 L 的端点当作 L 上的点. 再假定 $\Phi_1(z)$ 和 $\Phi_2(z)$ 分别是在 S_1 与 S_2 內为全純的,又可以分别从 S_1 及 S_2 內連續拓展到 L 上的函数,还假定它們的边值在 L 上彼此相等:

$$\Phi_1(t)=\Phi_2(t), \tag{10.3}$$

此处以 t 表示 L 上的点,而用 $\Phi_1(t)$ 与 $\Phi_2(t)$ 表示函数 $\Phi_1(z)$ 与 $\Phi_2(z)$ 的边值. 那么,用下面的方法所定义的函数 $\Phi(z)$,在区域 S_1+S_2+L 內是全純的:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(z)=\Phi_1(z), && \text{当 } z\in S_1 \text{ 时},\\ &\Phi(z)=\Phi_2(z), && \text{当 } z\in S_2 \text{ 时},\\ &\Phi(t)=\Phi_1(t)=\Phi_2(t), && \text{当 } z=t\in L \text{ 时}. \end{aligned}\right\} \tag{10.4}$$

显然,只要証明下述事实就够了:上面所定义的函数 $\Phi(z)$ 在弧 L 上每一个不与它的端点重合的点 t_0 的邻域內都是全純的. 以 t_0 为中心画一个半徑为充分小的圓周 γ,使得 γ 恰好与 L 相交于两点 a 和 b. 假定 σ 是由 γ 所圍成的圓域,而 σ_1 与 σ_2 是这一个圓域分别位于 S_1 及 S_2 內的部分;再設 γ_1 和 γ_2 是这两个部分 σ_1 与 σ_2 按正方向的边界;γ_1 与 γ_2 有公共部分 ab,而 γ_1 与 γ^2 在 ab 上的方向正好是相反的.

根据 Cauchy 定理,容易直接驗証:对位于区域 σ_1 或者 σ_2 內

部的所有点 z，我們都有

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{\Phi_1(t)dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{\Phi_2(t)dt}{t-z},$$

因为第一个积分当 $z\in\sigma_1$ 时等于 $\Phi_1(z)$，当 $z\in\sigma_2$ 时等于零；而第二个积分当 $z\in\sigma_2$ 时等于 $\Phi_2(z)$，当 $z\in\sigma_1$ 时等于零．但是，上面两个积分之和可以归結为展布在 γ 上的一个积分，因为，依据在 L 上成立的条件(10.3)，展布在弧 ab 上的积分是相互抵消的．因此，上面的公式可以改写成

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\Phi(t)dt}{t-z},$$

至此我們的結論便变成显然的了，因为，这一个公式的右端显然是 γ 內部的全純函数．

3°. 由上述結果，可以导出我們在以后經常要用到的下述結論．

正象在 1° 段中那样，令 L 表示任意一条逐段光滑曲綫，而 $\Phi(z)$ 是具有跳跃曲綫 L 的分区全純函数．又設在曲綫 L 的某一部分 L' 上有 $\Phi^+(t)=\Phi^-(t)$，其中 t 表示部分 L' 上任意一个不是結点的点(端点亦包括在結点之中)．那么，在 L' 上的各点处适当地規定了 $\Phi(z)$ 的值以后，便可以把曲綫 L 的 L' 部分去掉，并且使得函数 $\Phi(z)$ 是一个具有跳跃曲綫 $L-L'$ 的分区全純函数．这个結果可以从 2° 段的結果导出．值得怀疑的只是函数 $\Phi(z)$ 在所去掉的部分內的結点邻域內之性质．但是，如果注意到，由于(10.1)，在这些点处，$\Phi(z)$ 只可能有可去奇点①，亦就是說，$\Phi(z)$ 在这些点处取适当的值后，便可以使得它在那些点的邻域內是全純的，这个怀疑便会消除．

4°. 上述結果还可以导出下述結論．假定 $\Phi(z)$ 是在平面的某

① 例如，参看 И. И. Привалов[6] 第 221～222 頁．由于条件(10.1)(此处提醒一下，$\alpha<1$)，函数 $\Phi(z)$ 在結点 c 的邻域內的 Laurent 級数不包含 $(z-c)$ 的負冪項．

个連通部分（区域）S 內为全純的函数，而 S 的边界包含了（无論怎样小的）光滑弧 l，又假定函数 $\Phi(z)$ 可以連續拓展到 l 上，并且它在 l 上的边值是等于零的；那么，$\Phi(z)$ 在整个区域 S 內是恒等于零的．事实上，如果 S' 是某个从 l 的另一側和区域 S 衔接着的任意区域，那么，在 S' 內和在 l 上令 $\Phi(z)=0$，我們就得到在 $S+S'+L$ 內为全純的函数 $\Phi(z)$，它在 S' 內恒等于零，但是，这样的函数在整个区域 $S+S'+L$ 內必然等于零，于是，便可以得出我們的結論．

II. Cauchy 型积分

在这一部分中，我們研究在下一节中要定义的 Cauchy 型积分的主要性质．

我們在以后經常要用到这一部分的結果．

§ 11. Cauchy 型积分的定义

1°. 假定 L 表示一条逐段光滑曲綫，又假定 $\varphi(t)$ 在 L 上，可能除了在有限个点处外，都是有定义的．我們将假定，函数 $\varphi(t)$ 在 L 上，可能除了上述点的任意小的邻域外，处处都是有界的．

在构成 L 的每一条光滑弧 L_k $(k=1, 2, \cdots, p)$ 上，函数 $\varphi(t)$ 同时又是 t 对应的弧坐标 s 的函数．在以后各处，当我們讲到函数 $\varphi(t)$ 是**可积的**时，我們是指积分

$$\int_{L_k} \varphi(t)\,ds, \quad k=1, 2, \cdots, p \tag{*}$$

当函数 $\varphi(t)$ 在 L_k 上有界时，它在 Riemann 意义下是存在的，而当函数 $\varphi(t)$ 无界时，它在“旁义积分”的意义下是存在的①．如果

① 我們所指的“旁义积分”的定义是分析教程中所給出的那一个定义；例如，可参看 Г. М. Фихтенгольц[2]，卷二．

函数 $\varphi(t)$ 是可积的，另外，积分

$$\int_{L_k} |\varphi(t)|\,ds, \quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ p \tag{**}$$

在剛才所指出的意义下是存在的，我們就說，**函数 $\varphi(t)$ 在 L 上是絕对可积的**．如果函数 $\varphi(t)$ 是有界的，那么，从它的可积性便可推出它的絕对可积性．而如果 $\varphi(t)$ 是无界函数，那么，它既可以是可积的，又可以不是絕对可积的．

我們提醒一下，如果函数 $\varphi(t)$ 是絕对可积的，而 $\psi(t)$ 是有界可积函数，那么，函数 $\varphi(t)\psi(t)$ 亦是絕对可积的．

特別是，由此可以导出，如果函数 $\varphi(t)$ 对 s 是絕对可积的，那么，它对 t 亦是絕对可积的，亦就是說，如果积分

$$\int_{L_k} \varphi(t)\,dt = \int_{L_k} \varphi(t)\frac{dt}{ds}\,ds$$

是存在的，那么，积分

$$\int_{L_k} |\varphi(t)|\,|dt|$$

亦是存在的，而后一个积分应該理解为

$$\int_{L_k} |\varphi(t)|\left|\frac{dt}{ds}\right| ds = \int_{L_k} |\varphi(t)|\,ds,$$

这个积分正好是积分 (**)．反之，从对 t 的絕对可积性亦可以推出它对 s 的絕对可积性．

不言而喻，展布在 L 上的积分是定义为展布在 L_k 上的积分之和，亦就是說，

$$\int_L \varphi(t)\,ds = \sum_{k=1}^{p} \int_{L_k} \varphi(t)\,ds,$$

$$\int_L \varphi(t)\,dt = \sum_{k=1}^{p} \int_{L_k} \varphi(t)\,dt.$$

2°. 假定 L，正象在上一段中那样，表示一条逐段光滑曲綫，而函数 $\varphi(t)$ 在 L 上，可能除了在有限多个点处外，是給定的絕对可积函数．

我們考察积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \tag{11.1}$$

其中 z 是平面上的任意点;我們把这个积分叫做 Cauchy **型积分**. 有时把函数 $\varphi(t)$ 叫做**密度**.

在点 z 位于曲綫 L 上的已知情形下, 我們在后面 (§ 13) 要給这个积分以完全确定的意义; 但是, 暂时, 我們将假定点 z 不在 L 上.

显然,函数 $\Phi(z)$ 在每一个不包含曲綫 L 上的点的区域内都是全純的,并且 $\Phi(\infty)=0$; 更确切地讲,对于大的 $|z|$, 我們有

$$\Phi(z)=O\left(\frac{1}{z}\right)^{①}, \tag{11.2}$$

这是因为 L 是有限长的.

作为例子, 我們考察当 $L=ab$ 是一条簡单的、逐段光滑的敞开弧,而 $\varphi(t)=1$ 的最簡单的情形. 此时,显然

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{b-z}{a-z}=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z-b}{z-a}, \tag{11.3}$$

其中把

$$\ln\frac{z-b}{z-a}=\ln\frac{b-z}{a-z}$$

理解为在沿着弧 ab 而割开的平面上是全純的,又在无穷远处取值零的函数的一个分枝,这是因为由前述結果,总有 $\Phi(\infty)=0$.

§ 12. 和对数势的联系

Cauchy 型积分的概念和展布在曲綫 L 上的单层对数势或者双层对数势的概念有着緊密的联系, 我們在此处对这种联系准备讲几句話.

---

① 我們提醒一下: 如果 ξ 表示取値于某个集合 M 上的变量 (一般来讲, 它是复变量), 而在 M 内取的值 ξ 按模是可以任意大 [任意小] 的, 那么, $O(\xi)$ 即表示这样的量: 当 ξ 的值按模任意变大[小]时, 比值 $O(\xi)/\xi$ 按模保持有界.

为了簡单起見，我們将假定 L 是一条光滑曲綫．并且还假定 $\varphi(t)$ 是实函数，因为一般情形可以直接归結为这一种情形．

假定 z 不在 L 上，我們令

$$\Phi(z)=U(x,\ y)+iV(x,\ y)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-z},\qquad(12.1)$$

其中 U 与 V 都是实函数．再令

$$t-z=re^{i\vartheta},\qquad(12.2)$$

其中 $r=|t-z|$，$\vartheta=\vartheta(z,\ t)=\arg(t-z)$．将上式取对数并对 t 微分(把 z 固定)，我們得出

$$\frac{dt}{t-z}=d\ln r+id\vartheta=\frac{dr}{r}+id\vartheta;\qquad(12.3)$$

将这个表示式代入(12.1)中以后，再分开实部和虛部，我們便导出公式

$$U(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\int_L\varphi d\vartheta=\frac{1}{2\pi}\int_L\varphi\frac{d\vartheta}{ds}ds$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\int_L\varphi\frac{d\ln r}{dn}ds=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\varphi\cos(r,\ n)}{r}ds,\qquad(12.4)$$

$$V(x,\ y)=-\frac{1}{2\pi}\int_L\varphi d\ln r=-\frac{1}{2\pi}\int_L\varphi\frac{dr}{r},\qquad(12.5)$$

其中 s 为点 t 的弧坐标，n 为点 t 处指向 L 左側的法綫，而 $(r,\ n)$ 是向量 $\overrightarrow{tz}$ 和 n 之間的夹角(图 6)．

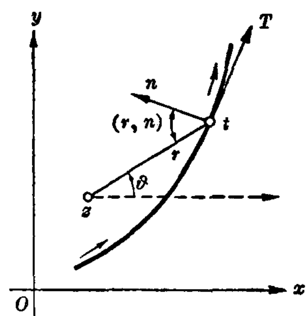


图　6

在(12.4)中进行改变时，我們利用了关系式

$$\frac{d\vartheta}{ds}=-\frac{d\ln r}{dn},\qquad(12.6)$$

在由正切綫 T 和法綫 n 所組成的坐标系中(在这个坐标系中規定方向时，正好象在 Oxy 坐标系中那样，n 軸指向 T 軸的左側)，关系式(12.6)是解析函数 $\ln(t-z)=i\vartheta+\ln r$ (z 为常数，t 为变量) 的 Cauchy-Riemann

方程①.

从(12.4)可以导出，$U(x, y)$是密度为 $\frac{\varphi}{2\pi}$ 的双层势.

在对(12.5)进行了分部积分(为了簡单起見，我們假定 φ 具有对于弧坐标 s 是可积的导函数②)以后，公式(12.5)可以改写成

$$V(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_L \frac{d\varphi}{ds}\ln r\,ds+\frac{1}{2\pi}\sum \pm\varphi(c_k)\ln r_k, \quad (12.7)$$

其中 c_k 表示曲綫 L 的端点(如果它包含一些敞开弧)，而 r_k 是点 (x, y) 到点 c_k 的距离. 如果 L 仅由一些封閉圍綫构成，那么

$$V(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_L \frac{d\varphi}{ds}\ln r\,ds. \quad (12.7a)$$

后一个公式表明：在封閉圍綫的情形下，$V(x, y)$ 是密度为

$$\mu(s)=\frac{-1}{2\pi}\frac{d\varphi}{ds} \quad (12.8)$$

的单层势:

$$V(x, y)=\int_L \mu(s)\ln\frac{1}{r}ds=-\int_L \mu(s)\ln r\,ds③. \quad (12.9)$$

在 L 包含了一些敞开弧的情形下，还要把集中在端点 c_k 处的“点质量”势加到势(12.7a)上.但是，应該指出，虽然一方面由公式(12.5)所确定的函数 $V(x, y)$ 是单层势的一种推广[因为，在所提到的公式中，并沒有假定函数 $\varphi(t)$ 是可微的]，但即使在函数 $\varphi(t)$ 是可微的情形下，它也可不給出通常的一般形式的单层势. 亦就是，由公式(12.5)所确定的势，只对应于通常的单层势的这样一种

---

① 一般讲来，如果 $f(z)=u+iv$ 是解析函数，那么，由 Cauchy-Riemann 方程，有

$$\frac{du}{ds}=\frac{dv}{dn}, \quad \frac{du}{dn}=-\frac{dv}{ds}.$$

② 如果利用 Stieltjes 积分，这个假定就可以用更一般的条件(例如，假定函数 φ 只是連續的)来替代.

③ 这里为了符合中文的习慣起見，将原书中式子的号碼(12.8)和(12.9)对調了一下. ——譯者注

特殊情形，在这种特殊情形下，分布在构成 L 的各条封閉圍綫 L_k 上的“质量”

$$m_k=\int_{L_k}\mu(s)ds$$

皆等于零；由(12.8)，这一点是很清楚的．因此，在今后，我們把形式为(12.5)的表示式叫做变态的单层势．

依据上述，显然，研究 Cauchy 型积分可以归結为討論单层对数势和双层对数势．

A. Harnack 的論文[1]事实上就是在这一个方向上进行的，这一篇論文是致力于研究 Cauchy 型积分最早的重要成果之一(1885 年)．

但是，直接研究这些积分会得出更一般的和更容易看出的結果，而这些結果从应用角度来看都是极重要的．

在这一个方向上所进行的第一个重要的研究是属于 G. Morera[1] 的 (1889 年)，但是，它并沒有引起人們很大的注意．

今后，我們将沿着后一条路綫走，我們并不利用 Cauchy 型积分和势的联系．有关的文献以后会指出．

§13. Cauchy 型积分在积分曲綫上的值

我們回过来直接研究 Cauchy 型积分，并且討論当在公式(11.1)中的点 z 位于 L 上时的情形，我們現在用 t_0 来表示 z．我們純粹形式地暂时写出

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}. \tag{13.1}$$

从通常的角度来看，右端的积分一般是沒有意义的．但是，对于一类比較广泛的和重要的函数 $\varphi(t)$，只要引进积分的 Cauchy 主值的概念，我們就可以給予这个积分以确定的意义．在下面我們就讲这一个概念．

假定 t_0 不和 L 的任何一个結点(包括端点在内)重合．以 t_0

为中心画一个半徑 ε 为充分小的圆周，使得这个圆周与 L 恰好相交于两点 t' 和 t''，并考察积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \tag{13.2}$$

其中 l 表示弧 $t't''$. 如果当 $\varepsilon\to 0$ 时，后一个积分趋于确定的极限，我們就說，这个极限是积分的 Cauchy 主值. 显然，如果积分 (13.1) 在普通意义[①]下(亦就是，在 Riemann 意义下)存在，那么，主値亦是存在的(但是，反之則不然). 因此，我們可以用和普通积分同样的記号[②]来表示积分的主値，而且当积分在普通意义下不存在时，我們就把它理解为它的主値.

我們不准备指明能保証主値存在的最一般的条件，而只准备闡述能够保証主値存在的一个重要情形.

这就是，我們現在假定，函数 $\varphi(t)$ 在点 t_0 的邻域内是适合 H 条件的. 我們来証明，在这一种情形下，主値是存在的，同时，我們要找出它通过普通意义下的积分而給出的表示式.

当然，我們只需要討論 L 仅由一条光滑弧构成的情形. 首先假定 $L=ab$ 是一条敞开弧. 我們有

$$\int_{L-l}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=\int_{L-l}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}dt+\varphi(t_0)\int_{L-l}\frac{dt}{t-t_0}. \tag{13.3}$$

可以把最后一个积分計算出为有限形式. 为此，必須精确地定出在計算中要出現的对数項的値. 以 t_0 为中心，画出一个通过点 t' 和 t''，半徑为 ε 的圆弧 $t'ct''$，此圆弧位于 L 的右側(图 7). 于是

---

① 如果对于从 t_0 附近无論怎样截取的弧 l 来讲，都只要弧 l 的長度趋于零时，积分 (13.2) 便趋于确定的极限，而积分 (13.1) 便在普通意义下是存在的；在主値的定义中，很关鍵的一点在于：弧 l 的端点 t' 与 t'' 和 t_0 是等距的；还可以参看本节末尾的注釋 2.

② 与此不同，許多著者用一个特殊的記号来表示它，例如，用在积分号上加一撇 “$\prime$” 或者积分号前加一个記号 VP (“Valeur Principale”).

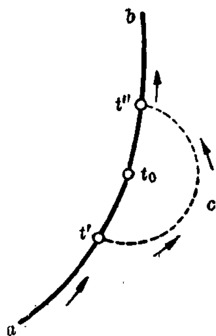


图 7

$$\int_{L-l}\frac{dt}{t-t_0}=\int_{L^*}\frac{dt}{t-t_0}-\int_{\gamma}\frac{dt}{t-t_0},$$

其中 L^* 表示一条简单弧 $at'ct''b$, 而 γ 是圆弧 $t'ct''$.

但是,依据(11.3)

$$\int_{L^*}\frac{dt}{t-t_0}=\ln\frac{t_0-b}{t_0-a},$$

此处,把右端理解为函数 $\ln\frac{z-b}{z-a}$ 的在沿着 L^* 而割开的平面上为全純的、在无穷远处取值零的一个分枝在点 t_0 处所取的值, 或者这显然可以归結为函数 $\ln\frac{z-b}{z-a}$ 在沿着 L 而割开的平面上是全純的、在无穷远处取值零的一个分枝,在点 t_0 处从 L 的左侧而取的值.

其次,显然①,

$$\int_{\gamma}\frac{dt}{t-t_0}=[\ln(t-t_0)]\Big|_{t'}^{t''}=\ln\frac{|t''-t_0|}{|t'-t_0|}+i\theta=i\theta,$$

其中 θ 表示,当 t 沿着弧 γ 从 t' 处移至 t'' 处时, $t-t_0$ 的幅角的变化. 显然,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\theta=\pi.$$

更其次,由于在 t_0 附近

$$|\varphi(t)-\varphi(t_0)|\leqslant A|t-t_0|^{\mu}\quad (A,\mu\text{ 皆为正常数}),$$

(13.3)右端第一个积分的极限是存在的, 并且它等于在普通意义下的积分:

$$\int_L\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}dt.$$

这样一来, 我們看出, 当 $\varepsilon\to 0$ 时, (13.3)右端的两項都趋于确定的极限, 依据定义, 这两个极限之和就是积分(13.1)的主值; 依据上述,这个主值由公式

① 我們提醒一下,此处要用到条件 $|t''-t_0|=|t'-t_0|$.

$$\Phi(t_0)=-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\ln\frac{t_0-b}{t_0-a}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}dt \tag{13.4}$$

給出,其中我們提醒一下,

$$\ln\frac{t_0-b}{t_0-a}=\ln\frac{b-t_0}{a-t_0}$$

是理解为函数

$$\ln\frac{z-b}{z-a}=\ln\frac{b-z}{a-z}$$

在沿着 $L=ab$ 而割开的平面上为全純的、在无穷远处取値零的一个分枝从 L 的左侧而取得的值.

特别是,当 $\varphi(t)=1$ 时,我們有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{dt}{t-t_0}=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{b-t_0}{a-t_0}-\frac{1}{2}. \tag{13.4a}$$

在推导公式 (13.4) 时, 我們假定了 L 为一条光滑的敞开弧. 在 L 为任意一条逐段光滑曲綫的情形下, 公式(13.4)当然一般讲来是不成立的,但是,主要結果仍然是有效的. 这就是說,从上述显然可以得出, 如果 $\varphi(t)$ 在 L 上的点 t_0 (t_0 不是 L 的結点)的邻域内是适合 H 条件的,那么,积分 $\Phi(t_0)$ 的主値是存在的.

注釋 1 依据主值的定义本身,如果把(逐段光滑的)积分曲綫 L 分成几条 (亦是逐段光滑的) 曲綫 $L', L'', \cdots, L^{(k)}$, 但是, 使得点 t_0 不与后面这些曲綫中的任意一个結点重合,那么,显然

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}+\frac{1}{2\pi i}\int_{L''}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}+\cdots+\frac{1}{2\pi i}\int_{L^{(k)}}\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0},$$

只要左端的积分主值是存在的.

注釋 2 我們来考察任一条从曲綫 L 上截下的、并且包含 t_0 的充分小的光滑弧 t_1t_2. 当在公式(13.4a)中选定了对数值以后,根据

这一个公式可得

$$I=\int_{t_1t_2}\frac{dt}{t-t_0}=\ln\frac{t_2-t_0}{t_1-t_0}-\pi i=\ln\frac{|t_2-t_0|}{|t_1-t_0|}+\omega i,$$

其中 $\omega(-\pi<\omega<\pi)$ 是方向 $\overrightarrow{t_0t_2}$ 与方向 $\overrightarrow{t_1t_0}$ 之間所夹的角，并且它是从后者量起的(图 8)；为了証实这一点，只需探索，当 z 由无穷远点(在那一点处 $\Theta=0$) 从弧 t_1t_2 的左侧而接近于点 t_0 时，角

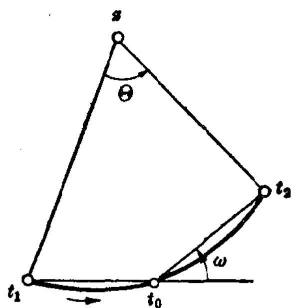


图　8

$$\Theta=\arg\frac{z-t_2}{z-t_1}=\arg\frac{t_2-z}{t_1-z}$$

的变化就够了；此时，Θ 显然趋于 $\pi+\omega$.

現在如果 t_2 与 $t_1\to t_0$，那么，显然，$\omega\to0$；如果，除此而外，$|t_2-t_0|$ 与 $|t_1-t_0|$ 又是等价无穷小，亦就是說，如果

$$\frac{|t_2-t_0|}{|t_1-t_0|}\to1,\tag{*}$$

那么，I 显然趋于零. 如果在(*)中左端(关于 t_0 的位置)一致地趋于右端，那么显然，I 将一致地趋于 0.

注釋 3 我們仍然假定，$\varphi(t)$ 在点 t_0 的邻域內适合 H 条件. 从前面的一些注釋可以知道，当积分 (13.1) 的主値看成积分(13.2)的极限时，要計算它，并不需要假定从积分路徑上截取的部分(前面曾經用 $l=t't''$ 表示它)正好适合条件 $|t''-t_0|=|t_0'-t|$，而只需使得比值

$$\frac{|t''-t_0|}{|t'-t_0|}\to1;\tag{**}$$

特别是，可以这样来选取点 t' 与 t''，使得弧 $t't_0$ 与 t_0t'' 的长度彼此是相等的.

由上所述，显然，如果在(**)中左端(对 t_0) 一致地趋于右端，

那么,当 $|t''-t_0|\to 0$ 及 $|t'-t_0|\to 0$ 时,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}$$

也一致地趋于主值

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0};$$

例如,当 $|t'-t_0|=|t''-t_0|$ 时,或者当弧 $t't_0$ 与 t_0t'' 的长度彼此相等时,便有这种情形发生. 在証明积分主值存在的推导中,把条件 $|t'-t_0|=|t''-t_0|$ 换成条件 (**) 以后,自然地便可以直接得出这些結論.

注釋 4 为使积分 (13.1) 的主値存在,同时为了保証公式 (13.4) 的正确性,显然,并不需要假定 $\varphi(t)$ 在点 t_0 的邻域內是适合 H 条件的,而只需假定,对已給的定値 t_0,下述不等式是成立的就够了:

$$|\varphi(t)-\varphi(t_0)|\leqslant A|t-t_0|^{\mu}\quad (A \text{ 为常数}, \mu \text{ 为正的常数}),$$

这个不等式对 t_0 的其他值可能是不成立的. 在这一种情形下,我們就說,$\varphi(t)$ 在已知点 t_0 处是适合 H 条件的.

注釋 5 有时,把积分曲綫 L 换成别的积分曲綫 Λ 是合理的. 假定 Λ 是平面上这样一条逐段光滑曲綫:在构成 L 的簡单光滑弧上的点 t 和构成 Λ 的簡单光滑弧上的点 τ 之間,可以建立双方单值的对应关系

$$t=t(\tau),$$

并且在 Λ 上 $t(\tau)$ 有不等于零的又属于 H_0 类的导函数

$$t'(\tau)=\frac{dt}{d\tau}.$$

又假定,在公式(13.1)中的 $\varphi(t)$ 在点 t_0 (t_0 不是結点)的邻域內是适合 H 条件的. 那么,依据上面的結果,容易看出,展布在曲綫 L 上的 Cauchy 型积分(13.1),可以用展布在曲綫 Λ 上的 Cauchy 型积分来表出,且后一个 Cauchy 型积分可以直接从在 (13.1) 中

作变量置换 $t=t(\tau)$ 而得出，它是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda}\frac{\psi(\tau)d\tau}{\tau-\tau_0},$$

其中 τ_0 是曲綫 Λ 上对应于曲綫 L 上点 t_0 的点，而

$$\psi(\tau)=\frac{(\tau-\tau_0)t'(\tau)}{t(\tau)-t(\tau_0)}\varphi(t(\tau)). \tag{13.5}$$

依据在 §7 (1° 段) 中所述，$\psi(\tau)$ 在点 τ_0 的邻域内是适合 H 条件的①.

注釋 6　当积分(13.1)在上述意义下存在时，可以把它表成一种有时是有用的形式. 令(与前一节作一比較)

$$t-t_0=re^{i\vartheta},$$

其中 $r=r(t_0,\ t)=|t-t_0|$, $\vartheta=\vartheta(t_0,\ t)=\arg(t-t_0)$. 把 t_0 看成常量，把 t 当作变量，将上式取对数后，再对 t 微分，我們得出，

$$\frac{dt}{t-t_0}=\frac{dr}{r}+id\vartheta,$$

由此可以得出

$$\begin{aligned}\Phi(t_0)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_L\varphi(t)d\vartheta+\frac{1}{2\pi i}\int_L\varphi(t)\frac{dr}{r}.\end{aligned} \tag{13.6}$$

如果在构成 L 的每一条光滑弧 L_k 上，取弧坐标 s 当作积分变量，并且注意②

$$\frac{dr}{ds}=\cos\alpha(t_0,\ t),\quad \frac{d\vartheta}{ds}=\frac{\sin\alpha(t_0,\ t)}{r(t_0,\ t)}=\frac{\cos(r,\ n)}{r(t_0,\ t)}, \tag{13.7}$$

其中 $\alpha(t_0,\ t)$ 表示 L 在点 t 处的(正)切綫 T 与向量 $\overrightarrow{t_0t}$ 之間所夹

---

① 为了能够应用 §7 (1° 段) 中已經証明过的命題，只需指出

$$\frac{\tau-\tau_0}{t(\tau)-t(\tau_0)}=\frac{\tau-\tau_0}{\sigma-\sigma_0}:\frac{t(\tau)-t(\tau_0)}{\sigma-\sigma_0}$$

就够了(其中 σ 为 Λ 上的弧坐标). 我們指出，变量置換 $t=t(\tau)$ 把 L 或者 Λ 上的每一个 H_0 类的函数变成 Λ 或者 L 上的同一类函数.

② 参看公式(7.7)以及在它前面的公式. 亦可以与上一节作一比較.

的角，并且此角是从后者（正方向）量起的，而(r, n)是向量$\overrightarrow{tt_0}$与t处指向左侧的法綫n之間所夹的角（图 9）①，我們就有所要找的表示式：

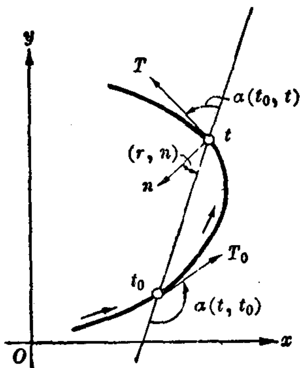


图 9

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=\frac{1}{2\pi}\int_L\varphi(t)\frac{\sin\alpha(t_0, t)}{r(t_0, t)}ds+\frac{1}{2\pi i}\int_L\varphi(t)\frac{\cos\alpha(t_0, t)}{r(t_0, t)}ds. \tag{13.8}$$

如果曲綫L在点t_0的邻域內适合 Ляпунов 条件（参看 §7 末尾的注释 2），那么在右端的第一个积分就可以在普通意义下来理解，这是因为在这一个情形下（§7, 3° 段），

$$\frac{\sin\alpha(t_0, t)}{r(t_0, t)}=\frac{d\vartheta}{ds}=\frac{K(t_0, t)}{|t-t_0|^\lambda}\quad(\lambda=\text{常数}<1),$$

其中$K(t_0, t)$在点t_0的邻域内是連續函数（甚至是适合H条件的）；但是，第二个积分則应該按照 Cauchy 主值的意义来理解.

§14. 单层势的切微商②

我們在这里要給出单层对数势的切微商公式，把它当作应用积分的 Cauchy 主值概念的最簡单的例子. 从奇异积分方程理論发展史的角度来看，这个公式是很重要的，因为它曾經促使 H. Poincaré 去研究这一类方程③.

---

① 当点t与結点重合时，便不再能确定这一些角了，但是，当t沿着过已知結点的弧中一条弧趋于这个結点时，这些角便趋于确定的极限. 我們提醒一下，按照条件，点t_0不是結点.

② 这一节可以略去，因为它对今后的学习并无影响.

③ H. Poincaré[1] 第 252 頁；H. Poincaré 本人对在下面导出的公式(14.3)的合理性，并未給出任何理論基础.

首先假定 $L=ab$ 为一条光滑弧．此外，我們还假定 L 是适合 Ляпунов 条件的（§7，注释 2）．

其次假定 $\varphi(t)$ 是定义在 L 上并且适合 H 条件的函数．我們来考察单层势

$$V(x, y)=\int_L \varphi(t)\ln r\, ds, \tag{14.1}$$

其中 $r=|z-t|$ 是点 $z=x+iy$ 与点 $t(s)$ 之間的距离．众所周知，函数 $V(x, y)$ 包括曲綫 L 在内（在平面的有限部分上）处处都是連續的；它在 L 上点 t_0 处的值 $V(t_0)$ 可以由在公式(14.1)中用 t_0 直接替代 z 而得出，因此，

$$V(t_0)=\int_L \varphi(t)\ln r\, ds=\int_L \varphi(t)\ln|t-t_0|\,ds. \tag{14.2}$$

我們来証明，在我們所采用的条件下，对于所有不是端点 a 与 b 的点 $t(s_0)$，导函数 $\frac{dV}{ds_0}$ 都是存在的，并且由公式

$$\frac{dV}{ds_0}=\int_L\varphi(t)\frac{\cos\alpha(t, t_0)}{r}ds=\int_L\varphi(t)\frac{\partial\ln r}{\partial s_0}ds \tag{14.3}$$

給出，这个公式可形式地求导等式(14.2)而得出；在公式(14.3)中，$\alpha(t, t_0)$ 表示向量 $\overrightarrow{tt_0}$ 与点 t_0 处的（正）切綫 T_0 所夹的角（参看上一节中的图 9），而积分是在 Cauchy 主值的意义下来理解的．

事实上，假定弧 $a'b'$ 是构成弧 ab 的某一个确定的部分，并且它与弧 ab 沒有共同的端点．我們假定，点 t_0 总位于 $a'b'$ 上．在 L 上从点 t_0 的两側截取彼此相等的两段弧 $t't_0$ 和 t_0t''，它們的长度为充分小的正数 ε，我們用 l 表示以 t_0 为中心的弧 $t't''$．令

$$\begin{aligned}V_\varepsilon(t_0)&=\int_{L-l}\varphi(t)\ln r\,ds\\&=\int_{s_a}^{s_0-\varepsilon}\varphi(t)\ln r\,ds+\int_{s_0+\varepsilon}^{s_b}\varphi(t)\ln r\,ds,\end{aligned} \tag{14.4}$$

其中 s_a 与 s_b 是点 a 与 b 的弧坐标．

显然

$$\lim_{\varepsilon\to 0} V_\varepsilon(t_0) = V(t_0).$$

(14.4)两端对 s_0 微分,我們得出

$$\frac{dV_\varepsilon}{ds_0} = \int_{L-l} \varphi(t)\frac{\partial \ln r}{\partial s_0} ds + \varphi(t')\ln r' - \varphi(t'')\ln r'', \quad (14.5)$$

其中 $r' = |t'-t_0|$, $r'' = |t''-t_0|$.

注意到, $\varphi(t)$ 适合 H 条件以及

$$\varphi(t'')\ln r'' - \varphi(t')\ln r' = [\varphi(t'') - \varphi(t')]\ln r'' + \varphi(t')\ln\frac{r''}{r'},$$

容易断言,当 $\varepsilon\to 0$ 时,前面的差式(对 t_0)一致地趋于零.

我們現在轉到研究出現在(14.5)右端的积分. 在被积分式中,我們可以写出

$$\frac{\partial \ln r}{\partial s_0} = \frac{\cos\alpha(t, t_0)}{r}; \quad (14.6)$$

但是,为了使得积分具有上一节中所研究过的形式,我們按照另一个方式来入手討論,我們有

$$r = (t-t_0)e^{-i\vartheta},$$

其中 ϑ 表示差式 $t-t_0$ 的幅角. 取对数后,再对 s_0 微分,我們便得出

$$\frac{\partial \ln r}{\partial s_0} = -\frac{1}{t-t_0}\frac{dt_0}{ds_0} - i\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0} = -\frac{e^{i\theta(t_0)}}{t-t_0} - i\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0},$$

其中 $\theta(t_0)$ 表示 L 在点 t_0 处的切綫与 Ox 軸之間所夹的角.

依据所假定的条件(参看 §7, 3° 段),

$$\left|\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0}\right| < \frac{\text{常数}}{r^\lambda}, \quad \lambda<1,$$

因此,当 $\varepsilon\to 0$ 时,积分

$$\int_{L-l}\varphi(t)\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0}ds$$

一致地趋于

$$\int_L \varphi(t)\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0}ds.$$

再者,依据上一节末尾的注释 3，当 $\varepsilon \to 0$ 时,积分

$$\int_{L-l} \frac{\varphi(t) e^{i\theta(t_0)}}{t-t_0} ds = \int_{L-l} \frac{\varphi(t) e^{i[\theta(t_0)-\theta(t)]}}{t-t_0} dt$$

亦一致地收斂于

$$\int_{L} \frac{\varphi(t) e^{i[\theta(t_0)-\theta(t)]}}{t-t_0} dt = \int_{L} \frac{\varphi(t) e^{i\theta(t_0)}}{t-t_0} ds,$$

此处在这一次积分应該在主値意义下来理解.

这样一来,我們看出,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{dV_\varepsilon}{ds_0} = \int_L \varphi(t) \frac{\partial \ln r}{\partial s_0} ds,$$

并且左端是一致地趋于右端的.

由此，再依据数学分析的著名定理①，便可以断言，导函数 $\dfrac{dV}{ds_0}$ 是存在的,并且

$$\frac{dV}{ds_0} = \int_L \varphi(t) \frac{\partial \ln r}{\partial s_0} ds,$$

由此再依据(14.6)，便导出所要求的結果(14.3).

显然，如果 L 是任意一条逐段光滑曲綫，并且在不是結点的点 t_0 的邻域内适合 Ляпунов 条件,而 $\varphi(t)$ 是絕对可积函数,并且它在上述点的同一个邻域内是适合 H 条件的，那么，上面所得出的結果仍然是有效的.

在很不一般的假定下，G. Bertrand[2] 用了要复杂得多的方法才証明了公式(14.3)；É. Picard[1] 重复了 Bertrand 的証明. 此处所叙述的非常簡单的証明是 A. B. Бицадзе 告訴我的，而且在本书的第一版中曾經引进过这个証明.

Л. Г. Магнарадзе[6]，С. Г. Михлин[7] 及 Я. Л. Геронимус[1, 5] 在不同的方向上作了推广.

---

① Г. М. Фихтенгольц[2]，卷二，408 小节中的定理. ——譯者注

§15. Cauchy 型积分的边値

1°. 我們現在轉向研究对我們来讲是比較重要的一个問題，就是研究 Cauchy 型积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-z} \tag{15.1}$$

在积分曲綫 L 附近的性质，此处，亦象通常那样，我們假定，L 是一条逐段光滑曲綫.

下面的簡单的注释对簡化討論通常是有帮助的.

假定要求研究的是积分 $\Phi(z)$ 在曲綫 L 的某一部分 L_0 附近的性质. 如果我們把积分 $\Phi(z)$ 分成两个积分 $\Phi_1(z)$ 与 $\Phi_2(z)$ 之和，其中一个积分 $\Phi_1(z)$ 展布在曲綫 L 包含 L_0 的 L_1 部分上，而另一个积分 $\Phi_2(z)$ 展布在曲綫 L 的其余部分 L_2 上，又若后一部分 L_2 和我們所要討論的部分 L_0 隔开一个有限距离，那么，函数 $\Phi_2(z)$ 在部分 L_0 的邻域内（包括 L_0 在内）是全純的，因此，問題可以归結为研究函数 $\Phi_1(z)$.

在这一节中所要証明的基本結果陈述如下.

定理 如果密度 $\varphi(t)$ 在曲綫 L 的某个光滑部分上是适合 H 条件的，那么，函数 $\Phi(z)$ 可以从左側以及右側連續拓展到这一部分上，它的端点（如果有这种端点[①]）可能除外.

如果注意到前面所作的注释，那么，在証明时，显然只要考虑下列情形就可以了：L 是一条敞开的光滑弧，而 $\varphi(t)$ 在 L 上包括端点在内是适合 H 条件的.

我們首先討論，当 $z\to t_0$ 时，积分

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-z}dt \tag{15.2}$$

① 圓括号內这句話看来是多余的，在后面（2° 段）将要指出，除了使 $\varphi(t)\neq0$ 的那些端点外，$\Phi(z)$ 亦可以連續拓展到端点上. ——譯者注

的性质，此处 t_0 是 L 上任意一点；这并不排斥 t_0 是 L 的一个端点的情形. 我們来証明下述引理.

引理 假定 β_0 是任意一个非鈍角 $\left(亦就是說 0<\beta_0\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, 又假定当 z 趋于 t_0 时，綫段 t_0z 和 L 在点 t_0 处的切綫之間所夹的非鈍角 β 保持不小于 β_0, 那么，$\Psi(z)$ (对于 L 上点 t_0 的位置) 一致地趋于极限

$$\Psi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}dt \tag{15.3}$$

(这一个极限与 z 是从切綫的左側还是右側而趋于 t_0 是无关的).

显然，只須要对于积分

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-z}dt$$

来証明我們的引理就够了，此处 l 是对应于标准半徑 $R(\alpha_0)$ 且包含 t_0 (在其內部或者在其一个端点处) 的一条确定的标准弧，此处 $0<\alpha_0<\beta_0$ (参看 §2, V).

我們来考察差式

$$\psi(z)-\psi(t_0)=\frac{h}{2\pi i}\int_l\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{(t-t_0)(t-z)}dt,$$

其中 $h=z-t_0$. 以 t_0 为中心，以 ρ 为半徑，画一个圓周 γ；当 ρ 足够小时，这个圓周 γ 与 l 相交于一点或者两点，我們是这样假定的. 用 t_1t_2 表示 l 上包含在 γ 內部的部分，而用 $l-t_1t_2$ 表示 l 的其余部分.

那么，

$$\psi(z)-\psi(t_0)=I_1+I_2,$$

此处

$$I_1=\frac{h}{2\pi i}\int_{t_1t_2}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{(t-t_0)(t-z)}dt,$$

$$I_2=\frac{h}{2\pi i}\int_{l-t_1t_2}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{(t-t_0)(t-z)}dt.$$

我們先研究 I_1. 利用 $\varphi(t)$ 在 t_1t_2 上的值是适合 H 条件的①，亦就是，利用不等式 $|\varphi(t)-\varphi(t_0)|\leqslant A|t-t_0|^{\mu}$，又引进記号 $r=|t-t_0|$，再利用由于 (2.2) 而得出的 $|dt|=|ds|\leqslant K|dr|$，我們便有

$$|I_1|\leqslant\frac{\delta AK}{2\pi}\int_{t_1t_2}\frac{r^{\mu-1}|dr|}{|t-z|},$$

其中 $\delta=|h|$. 但是，如果 ω 是綫段 t_0z 与 t_0t 之間所夹的非鈍角(图 10)，那么，显然

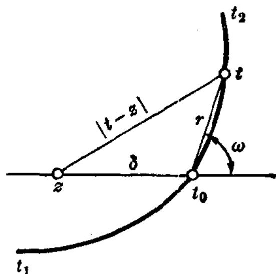


图 10

$$|t-z|\geqslant\delta\sin\omega\geqslant\delta\sin\omega_0,$$

其中 ω_0 是某个常数，并且 $0<\omega_0<\frac{\pi}{2}$ (§2). 因此

$$|I_1|\leqslant\frac{AK}{2\pi\sin\omega_0}\int_{t_1t_2}r^{\mu-1}|dr|\leqslant\frac{AK}{\pi\sin\omega_0}\int_0^{\rho}r^{\mu-1}dr=\frac{AK\rho^{\mu}}{\pi\mu\sin\omega_0}.$$

我們选取 ρ 如此小，使得 $I_1<\varepsilon/2$，此处 ε 是任意給定的正数；ρ 的选法显然可以作得和 t_0 在 l 上的位置以及和 z 的位置无关.

另外，再取 $\delta\leqslant\frac{\rho}{2}$. 那么，当 t 在 $l-t_1t_2$ 上时，亦即，当 t 在圆 γ 外时，我們有 $|t-t_0|\geqslant\rho$, $|t-z|\geqslant\frac{\rho}{2}$，并因此

$$|I_2|\leqslant\frac{\delta}{\pi\rho^2}\int_{l-t_1t_2}|\varphi(t)-\varphi(t_0)|ds\leqslant\frac{\delta M}{\pi\rho^2},$$

其中 M 是某个常数，它既与 t_0 在 L 上的位置无关，又与 z 的位置无关. 因此，对充分小的 δ，我們有 $|I_2|<\varepsilon/2$，于是，我們可以认为我們的引理已經証明.

現在着手于証明在这节一开始所叙述过的定理，并找出函数 $\Phi(z)$ 的边值.

正象前面已指出过那样，只需考察下列情形就够了：$L=ab$

① 我們应注意，我們仅对包含 t_0 的足够小的部分 l 利用 H 条件.

为一条光滑的敞开圍綫，而 $\varphi(t)$ 在 L 上(包括端点在内)是适合 H 条件的.

我們有

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-z}\,dt+\frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\int_L \frac{dt}{t-z},$$

或者依据公式(15.2)及(11.3)，有

$$\Phi(z)=\Psi(z)+\frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\ln\frac{z-b}{z-a}, \tag{15.4}$$

此处，我們把对数理解为在沿着 $L=ab$ 而割开的平面上是全純的，又在无穷远处取値零的一个分枝. 依据已証明过的引理，当 z 象引理叙述中那样趋于 t_0 时，$\Psi(z)$ 一致地趋于确定的极限 $\Psi(t_0)$. 显然，当 z 从左侧或者从右侧趋于 L 上的任意点 t_0 (t_0 和端点相隔一个有限的距离)时，(15.4)右端的第二項一致地趋于确定的极限. 但是，由趋于极限的一致性可以知道(§9)，函数 $\Phi(z)$ 可以从左侧或者右侧連續拓展到 L 上任意一个不是端点的点 t_0 上.

这样一来，便証明了我們的定理①. 在(15.4)中取当 z 从左側或者右側趋于 t_0 的极限，我們分别得出

$$\begin{aligned}\Phi^+(t_0)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt+\frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\ln\frac{t_0-b}{t_0-a},\\ \Phi^-(t_0)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt+\frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\ln\frac{t_0-b}{t_0-a}-\varphi(t_0),\end{aligned} \tag{15.5}$$

---

① 我难于断定：这一个定理是属于那一位著者的，因为，它以多种形式出現在上世紀所发表的很多論文中，并且附有各种不同严格程度的証明，例如，在下列各篇論文中便是这样：Ю. В. Сохоцкий[1]，G. Morera[1]，A. Harnack[1]. 在 G. Morera 的論文[1]中，便給出了，当 L 为一条封閉圍綫(亦即，$a=b$)时，由(15.5)而得出的公式.

后来有几位著者給出了定理的严格証明，在現代分析的基础上，这样的証明并沒有任何困难.

此处 $\ln\frac{t_0-b}{t_0-a}$ 是按照在 § 13 中那样来理解的. 如果注意到: 由定义本身(§ 13), 前面的表示式 $\ln\frac{t_0-b}{t_0-a}$ 是函数 $\ln\frac{z-b}{z-a}$ 从 L 左側而取得的边值, 那么, 公式(15.5)中的第一式就是显然的了. 如果注意到, 当 z 从 L 的左側(比如)繞过端点 a 而到它的右側时, $\ln(z-a)$ 得到增量 $2\pi i$, 而 $\ln(z-b)$ 則仍然回到起始值, 那么, 上述表示式从 L 的右側而取得的边值等于

$$\ln\frac{t_0-b}{t_0-a}-2\pi i,$$

从而, 便也显然得出公式(15.5)中的第二式.

2°. 我們对于上面的結果补充下述一点. 如果在端点 a [或者 b] 处, $\varphi(t)=0$, 那么, 依据上面所得出的結果, 容易証明, 函数 $\Phi(z)$ 亦可以連續拓展到端点 a [或者 b] 上. 为了証实这一点, 只需把弧 $L=ab$ 在端点 a [或者端点 b] 处往外稍为延伸 (例如, 把 L 在对应的端点处的切綫段接到 L 上, 就可以把 L 往外延伸), 并在延伸的部分上令 $\varphi(t)=0$, 再把上面的結果应用到这样所得出的新的弧 [点 a (或者点 b) 已不再是它的端点] 上, 就可以了. 此时, 公式(15.5)表明, 如果 t_0 位在延伸的部分上 [t_0 可以是端点 a (或者端点 b)], 那么

$$\Phi^+(t_0)=\Phi^-(t_0)=\Phi(t_0);$$

由此直接便导出我們的結論. 如果我們用 c 表示端点 a 和 b 中的任意一个, 又若在 a 点与 b 点处 $\varphi(t)=0$, 那么, 当 z 沿着任意路徑而趋于 c 时, 根据公式(15.5), 我們便得出函数 $\Phi(z)$ 的边值 $\Phi(c)$ 的表示式

$$\Phi(c)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-c}. \tag{15.6}$$

在 $\varphi(c)\neq 0$ 的情形下 (此处, 正象上面那样, c 表示端点 a 和 b 中的一个点), 亦容易闡明函数 $\Phi(z)$ 在那个端点附近的性质; 此时, 我們可以假定, $\varphi(t)$ 仅在 L 上点 c 的邻域內(包括点 c 在内)

是适合 H 条件的. 依据公式(15.4), 我們有

$$\Phi(z)=\Psi(z)+\frac{\varphi(c)}{2\pi i}\ln\frac{z-b}{z-a},$$

其中

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\psi(t)dt}{t-z},\quad \psi(t)=\varphi(t)-\varphi(c),$$

此处,我們仍然把

$$\ln\frac{z-b}{z-a}=\ln(z-b)-\ln(z-a)$$

理解为在沿着 L 而割开的平面上是全純的、在无穷远处取值零的一个分枝.

为了确定起見,我們假定 $c=a$. 在点 a 的邻域内,我們可以把 $\ln(z-a)$ 理解为在沿着 L 而割开的平面上在这个邻域内是全純的任意一个分枝;此时,在点 a 的邻域内, 函数 $\ln(z-b)$ 亦可以取得确定的值,并且它在沒有割开的平面上在这个邻域内是全純的. 再者, 因为, $\psi(a)=0$, 因此, 在点 a 的邻域内(也包括点 a 在内), 函数 $\Psi(z)$ 可以从左側以及右側連續拓展到 L 上. 因此, 在点 a 附近我們有

$$\Phi(z)=-\frac{\varphi(a)}{2\pi i}\ln(z-a)+\Phi_0(z),\tag{15.7}$$

其中函数 $\Phi_0(z)$ 在已割开的平面上点 a 的附近是全純的, 并且在点 a 附近, 它可以从左側或者右側連續拓展到 L 上以及点 a 上.

在端点 b 附近,完全类似地我們有

$$\Phi(z)=+\frac{\varphi(b)}{2\pi i}\ln(z-b)+\Phi_0(z),\tag{15.8}$$

其中函数 $\Phi_0(z)$ 在沿着 L 割开的平面上点 b 的附近是全純的, 并且在点 b 附近, 它可以从左側或者右側連續拓展到 L 上以及点 b 上.

这样一来,我們可以看出,如果在弧 $L=ab$ 上 $\varphi(t)$ 是属于 H

类的，那么，$\Phi(z)$ 是一个具有跳跃曲綫 L 的分区全純函数，在无穷远处取値零. 以后，我們要讲到（§22, 2° 段及 §26, 4° 段），在关于曲綫 L 以及函数 $\varphi(t)$ 的更一般的假定下，Cauchy 型积分亦具有这样的性质.

注釋 1 把公式(15.5)中的两式相加，并把它与公式(13.4)作一比較，我們得出，

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2}[\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0)]. \tag{15.9}$$

在下一节中，将在更一般的情形下証明这个重要的公式.

注釋 2 如果不是假定函数 $\varphi(t)$ 在点 t_0（它不是端点）的邻域内适合 H 条件，而仅假定在那一点处是适合 H 条件的（§13，注釋 4），那么，由上面所进行的推导，容易看出，在这一种情形下，当 z 沿着不相切的路徑从左側或者从右側而趋于 t_0 点时[更确切地說，当 z 趋于 t_0 时，綫段 t_0z 与点 t_0 处的切綫所夹的非鈍角保持大于某个（任意小的）正常数（和 §9 末尾的注釋 2 作一比較）]，$\Phi(z)$ 趋于确定的极限.

注釋 3 在此处我們指出一个以后有时要用到的簡单的估計式. 仍然假定 $\varphi(t)$ 在光滑弧 ab 上是属于 H 类的，又假定 c' 与 c'' 是这一条弧上两个有次序的点，特别是，它們可以分别与 a 及 b 重合. 考察积分

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c'c''}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \tag{15.10}$$

我們来証明：对于平面上分布在有限距离内的所有的点 z [包括弧 L 上的点在内，但是，点 c' 与 c'' 本身必須除外（一般讲来，在这两个点处，积分沒有意义）]，都有

$$|\Omega(z)|<\frac{\text{常数}}{|z-c'|^{\varepsilon'}|z-c''|^{\varepsilon''}}, \tag{15.11}$$

其中 ε' 与 ε'' 都是（任意小的）正常数；如果 $\varepsilon'+\varepsilon''\leqslant 1$，那么，上述不等式在无穷远点的邻域内显然亦是成立的.

为了証明这一点，可以这样来进行．例如，用点 a 和点 b 处的切綫段 aa' 和 bb'，便可以把弧 ab 从两端向外稍許延伸，并且可以使得弧 ab 是光滑弧 $a'b'$ 的一部分，而弧 ab 与 $a'b'$ 沒有公共的端点，我們引进这样定义的函数 $\varphi_0(t)$ 来考虑：在弧 $a'c'$ 上，$\varphi_0(t)=\varphi(c')$；在弧 $c'c''$ 上，$\varphi_0(t)=\varphi(t)$；在弧 $c''b'$ 上，$\varphi_0(t)=\varphi(c'')$，并且考察积分

$$\Omega_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a'b'}\frac{\varphi_0(t)\,dt}{t-z},$$

暂时假定其中的点 z 不在弧 $a'b'$ 上．

因为函数 $\varphi_0(t)$ 在弧 $a'b'$ 上显然是属于 H 类的，于是，由上所述，函数 $\Omega_0(z)$ 可以从左侧及右侧連續拓展到这一条弧上，从而它在弧 ab 的邻域內是有界的．另一方面，（当选定了对数的值以后）我們有

$$\begin{aligned}\Omega(z)&=\Omega_0(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{a'c'}\frac{\varphi(c')\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{c''b'}\frac{\varphi(c'')\,dt}{t-z}\\&=\Omega_0(z)-\frac{\varphi(c')}{2\pi i}\ln\frac{z-c'}{z-a'}-\frac{\varphi(c'')}{2\pi i}\ln\frac{z-b'}{z-c''},\end{aligned}$$

由此，再注意到点 a' 和 b' 与弧 ab 相隔一个有限距离，就容易导出，对于充分靠近弧 L 的点 z，有估計式

$$|\Omega(z)|<A+B[|\ln(z-c')|+|\ln(z-c'')|],\qquad(15.12)$$

其中 A 与 B 是某些正常数．从 (15.12) 亦可以导出所要求的（稍粗糙一些的）估計式(15.11)．正如由公式(15.9)可以知道，所得出的估計式对弧 $a'b'$ 上的点（它在弧 ab 上或者在弧 ab 附近）仍然是有效的．

§16. Сохоцкий-Plemelj 公式

給出 Cauchy 型积分边值的公式 (15.5) 只能直接应用于当 L 为一条簡单的敞开弧的情形，从这一点来看，它是不够方便的．

但是，如果引进积分的 Cauchy 主值来討論，那么，这些公式

可以改变成极简单的形式，幷且它可以适用于任何一条逐段光滑积分曲綫的情形．这就是說，如果注意到公式(13.4)，那么显然，給出积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \tag{16.1}$$

的边值的公式(15.5)，可以改写成

$$\begin{aligned}\Phi^+(t_0)&=\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\Phi(t_0)\\&=\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0},\\\Phi^-(t_0)&=-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\Phi(t_0)\\&=-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0},\end{aligned} \tag{16.2}$$

其中在右端出现的是积分的主值．

現在容易看出，在 L 为任意一条逐段光滑曲綫的情形下，在下列条件下，上述公式仍然是成立的：点 t_0 不是結点（包括端点在内①），而 $\varphi(t)$ 在 t_0 的邻域内是适合 H 条件的．

事实上，为了証明这一点，只須把积分 $\Phi(z)$ 表成下述两个积分之和的形式：$\Phi(z)=\Phi_1(z)+\Phi_2(z)$，就够了，此处，第一个积分 $\Phi_1(z)$ 是展布在包含点 t_0 的任意一条光滑弧 ab 上的积分，而第二个积分 $\Phi_2(z)$ 則是展布在 L 的其余部分上的积分，把当 $L=ab$ 时的公式(16.2)应用到第一个积分上，而因为点 t_0 不在第二个积分的积分路徑上，因此，对于第二个积分，有

$$\Phi_2^+(t_0)=\Phi_2^-(t_0)=\Phi_2(t_0).$$

Ю. В. Сохоцкий 在 1873 年首先給出了和公式 (16.2) 等价的公式(Ю. В. Сохоцкий[11]) ②，但是，他在証明时仅考虑了这样的情

① 容易把公式 (16.2) 推广到点 t_0 与曲綫 L 的角点是重合的情形；参看本书末尾的附录二．

② 这就是說，Ю. В. Сохоцкий 給出了公式 (16.2) 中的第一个和后面导出的公式(16.3)．

形：L 是直綫段，而 z 是沿着 L 的法綫而趋于 t_0 的．多年以后，J. Plemelj[1] 重新得出了公式(16.2)，他在証明时利用了和我們这里大体上相同的假定．

晚些时候，在更一般的条件下，И. И. Привалов 得出了这些公式(参看 И. И. Привалов 的論文[2]，[4]，[7])．

前面所叙述的公式(16.2)的証明，按思路来讲，与 J. Plemelj 的証明并沒有什么区别，此处只是作了一些簡化和訂正．

我們把公式(16.2)叫做 Сохоцкий-Plemelj 公式①．

我們再指出两个和公式(16.2)等价的公式：

$$\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0)=\varphi(t_0), \tag{16.3}$$

$$\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{16.4}$$

我們在以后經常要用到它們．

§17．边值的差的公式之推广

我們在 $\varphi(t)$ 至少在点 t_0 (假定 t_0 不是結点，亦一定不是端点)的邻域內是适合 H 条件的假定下，得出了公式(16.3)

$$\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0)=\varphi(t_0). \tag{17.1}$$

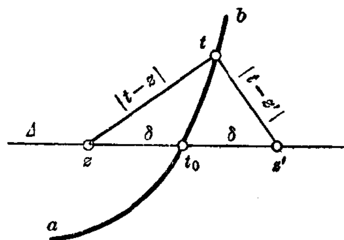


图　11

但是，在 $\varphi(t)$ 只是連續的情形下，也可以給这个公式以确定的意义．

我們在过点 t_0 而在 t_0 处不和 L 相切的直綫 Δ (图 11)上，分别在 L 的左側和右側选取两个点 z 和 z'，使它們到 t_0 的距离是相等的，并且約定好，把 $\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0)$ 理解为

① 几乎在很长的时間內，数学家們一直不知道 Ю. В. Сохоцкий 的論文[1](以及他的具有很高价值的成果的其他論文)．遺憾的是，我在本书第一版出版时，亦不知道他的这些論文，所以，我曾經把公式(16.2)叫做 Plemelj 公式．А. И. Маркушевич[4] 首先指出了 Ю. В. Сохоцкий 的优先性．

极限

$$\lim_{\substack{z\to t_0\\ z'\to t_0}}[\Phi(z)-\Phi(z')]. \tag{17.2}$$

我們証明：如果函数 $\varphi(t)$ 在点 t_0 的邻域内是連續的，那么，上述极限存在，并且等于 $\varphi(t_0)$．此外，当直綫 Δ 与点 t_0 处的切綫之間所夹的非鈍角 β 不小于某个定角 β_0 时（β_0 是任意取定的，但是不等于零），只要 $\varphi(t)$ 在 L 的每一光滑部分上是連續的，那么，这个极限在那一部分上是一致地达到的（在这一部分端点的邻域内可能除外）．

在証明时，我們显然可以只考虑 L 为一条光滑的封閉弧或者是敞开弧的情形．

我們令

$$z=t_0+h,\quad z'=t_0-h.$$

此时

$$\Phi(z)-\Phi(z')=\frac{1}{2\pi i}\int_L\varphi(t)\left\{\frac{1}{t-t_0-h}-\frac{1}{t-t_0+h}\right\}dt$$
$$=\frac{h}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{(t-t_0)^2-h^2},$$

或者

$$\Phi(z)-\Phi(z')=\frac{h}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{(t-t_0)^2-h^2}dt$$
$$+\frac{h\varphi(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{dt}{(t-t_0)^2-h^2}. \tag{*}$$

后一个积分可以簡单地計算出，但是，为了进一步简化它的表示式，我們假定，曲綫 L 是一条封閉圍綫，这当然并不影响一般性．假定 L 上的正方向是这样来选取的，它选定后，可以使得，由 L 所圍成的平面上的有限部分保持在 L 之左側，又若注意到，点 $t_0+h=z$ 位于这一部分之內，而点 $t_0-h=z'$ 則是在它的外面，利用留数定理，我們立可看出，在(*)中右端的第二項等于 $\varphi(t_0)$，于是，

$$\Phi(z)-\Phi(z')=\varphi(t_0)+I,$$

其中

$$I=\frac{h}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{(t-t_0)^2-h^2}dt.$$

留待証明的是：当 $h\to 0$ 时，$I\to 0$. 我們以 t_0 为中心，画一个半徑 ρ 为充分小的圓周 γ，圓周 γ 与 L 相交于两个点 a 与 b. 我們假定 ρ 如此小，使得对于 ab 上的所有点 t 都有 $|\varphi(t)-\varphi(t_0)|<\eta$，此外 η 是已知的正数，我們令 $I=I_1+I_2$，其中 I_1 是展布在 ab 上的积分，而 I_2 是展布在 $L-ab$ 上的积分.

我們有

$$|I_1|\leqslant\frac{\delta\cdot\eta}{\pi}\int_{ab}\frac{ds}{|t-z|\,|t-z'|},$$

其中 $\delta=|h|$. 令 $|t-t_0|=r$，根据 (2.2)，只要 $\rho\leqslant R_0(\alpha_0)$，便有 $ds\leqslant K|dr|$，其中 α_0 是小于 β_0 的任意正数，而 $R_0(\alpha_0)$ 为对应的标准圓的半徑.

再者，如果 ϑ 是向量 $\overrightarrow{t_0z}$ 和 $\overrightarrow{t_0t}$ 之間所夹的角，又若当 $\vartheta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$\omega=\vartheta$，而当 $\vartheta>\frac{\pi}{2}$ 时，$\omega=\pi-\vartheta$，則我們又有

$$\begin{aligned}|t-z|^2&=r^2+\delta^2-2r\delta\cos\vartheta\geqslant r^2+\delta^2-2r\delta\cos\omega\\&\geqslant r^2+\delta^2-2r\delta\cos\omega_0,\end{aligned}$$

其中 $\omega_0=\beta_0-\alpha_0(>0)$ 为一固定的銳角[1]；类似地

$$|t-z'|^2\geqslant r^2+\delta^2-2r\delta\cos\omega_0.$$

因此，

$$|t-z|\,|t-z'|\geqslant r^2+\delta^2-2r\delta\cos\omega_0=(r-\delta\cos\omega_0)^2+\delta^2\sin^2\omega_0,$$

$$\begin{aligned}|I_1|&\leqslant\frac{2K\delta\eta}{\pi}\int_0^\rho\frac{dr}{(r-\delta\cos\omega_0)^2+\delta^2\sin^2\omega_0}\\&=\frac{2K\eta}{\pi\sin\omega_0}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{r}{\delta\sin\omega_0}-\operatorname{ctg}\omega_0\right)\right]\Bigg|_{r=0}^{r=\rho}\leqslant\frac{2K\eta}{\sin\omega_0},\end{aligned}$$

由此我們看出，对于充分小的 ρ，我們有 $|I_1|<\varepsilon/2$，其中 ε 是任

---

[1] 参看 §2，性质 V.

意小的正数.

其次，显然，选定了足够小的 δ（当取定 ρ 时）之后，便有 $|I_2|<\varepsilon/2$，由此便可以导出上述命题.

我們指出已經証明过的命題的一个重要推論，如果注意到在 § 9, 3° 段中所讲到过的結果，那么这个推論几乎是明显的.

假定函数 $\varphi(t)$ 在曲綫 L 的某个光滑部分 L' 上是連續的（L' 可以与 L 重合），又假定函数 $\Phi(z)$ 可以从左側［右側］連續拓展到 L' 上；那么，函数 $\Phi(z)$ 亦可以从右側［左側］連續拓展到 L' 上，但是 L' 的端点可能例外.

在上面所提到的 Ю. В. Сохоцкий 的論文[1]中，包含了在这节一开始所叙述过的結論的主要部分（他叙述得不完全精确）.

这一节所叙述的結果，按照此处陈述的形式来讲，大致上是属于 J. Plemelj[1] 的. 此处所引进的証明，只是把他的証明补得更詳細些而已［亦可以和 É. Picard[1] 作一比較］.

§ 18. 边值的連續特性

1°. 仍然假定 L 是一条逐段光滑曲綫，又假定函数 $\varphi(t)$ 在曲綫 L 的某个光滑部分 L' 上是适合 H 条件的.

我們已經看到，在这些条件下，函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \tag{18.1}$$

可以从左側以及右側連續拓展到部分 L' 上，L' 的端点可能除外. 因此（§ 9, 2° 段），边值 $\Phi^+(t)$ 与 $\Phi^-(t)$ 是点 t（端点可能除外）在 L' 上处处連續的函数. 对于这些边值可以得出更一般的結論，亦就是，成立着下述重要定理.

Plemelj-Привалов 定理 如果 $\varphi(t)$ 在 L' 上是适合 H 条件的，那么，边值 $\Phi^+(t)$ 和 $\Phi^-(t)$ 在 L' 上（L' 的端点的任意小的邻域可能除外），当 $\mu<1$ 时，是适合 $H(\mu)$ 条件的，当 $\mu=1$ 时，它是

适合 $H(\mu-\varepsilon)$ 条件的，此处 ε 是任意小的正常数[①].

在証明时，显然可以只考虑 L 仅由一条光滑的敞开弧 ab 构成，并且 L' 与 L 是重合的情形.

假定 $L''=a''b''$ 是弧 $L'=L=ab$ 的任意一部分，并且 L'' 的端点和弧 L 的端点 a 与 b 相距一个有限距离. 我們必須証明：对于弧 L'' 上的任意一对点 t_0 与 t_1,

$$\begin{aligned}|\Phi^+(t_1)-\Phi^+(t_0)|\leqslant C|t_1-t_0|^\nu,\\ |\Phi^-(t_1)-\Phi^-(t_0)|\leqslant C|t_1-t_0|^\nu,\end{aligned}\tag{18.2}$$

其中 C 为某个常数，而当 $\mu<1$ 时，$\nu=\mu$，又当 $\mu=1$ 时，$\nu=1-\varepsilon$；ε 表示任意小的正常数.

依据公式(16.2)，我們有

$$\begin{aligned}\Phi^\pm(t_0)&=\pm\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}\\ &=\pm\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}dt\\ &\quad+\frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\int_L\frac{dt}{t-t_0},\end{aligned}\tag{18.3}$$

此处应該同时取上面的或者下面的符号. 因为(18.3)右端的第一項和第三項显然在 L'' 上都是适合 $H(\mu)$ 条件的[②]，因此，剩下要証明的是函数

$$\Psi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}dt \tag{18.4}$$

对于 L'' 上的任意一对点 t_0 和 t_1 适合条件

$$|\Psi(t_1)-\Psi(t_0)|\leqslant C|t_1-t_0|^\nu, \tag{18.5}$$

其中 C 为某个常数，而 ν 所表示的和上面的相同.

---

① 更确切地說，当 $\mu=1$ 时，对于 L' 上的任意两个充分接近的点 t_0 与 t_1，我們都有

$$|\Phi^\pm(t_1)-\Phi^\pm(t_0)|\leqslant 常数\cdot|t_1-t_0|\ln\frac{1}{|t_1-t_0|}.$$

② 参看公式(13.4a).

象通常那样，我們用 s, s_0, s_1 表示点 t, t_0, t_1 所对应的弧坐标，再引进記号

$$t_1-t_0=h, \quad s_1-s_0=\sigma;$$

不失一般性，我們显然可以认为：$\sigma>0$，并且 2σ 不超过点 a'', b'' 到点 a, b 的距离.

我們有

$$\Psi(t_1)-\Psi(t_0)=\Psi(t_0+h)-\Psi(t_0)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L\left\{\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0+h)}{t-t_0-h}-\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\right\}dt. \quad (18.6)$$

我們沿着 L 从 t_0 的两侧截取长度同为 2σ 的两段弧 $t't_0$ 和 t_0t''，并且用 $l=t't''$ 表示这两条弧的全体；用 $L-l$ 表示 L 的其余部分.

与此相应，把前一个积分分成两个积分之和

$$\Psi(t_0+h)-\Psi(t_0)=I_0+I,$$

其中 I_0 是展布在 l 上的积分，而 I 则是展布在 $L-l$ 上的积分.

从 $\varphi(t)$ 所适合的 $H(\mu)$ 条件，亦就是，从条件

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant A|t_2-t_1|^\mu$$

(其中 t_1 与 t_2 是 L 上的任意两个点) 可以知道，

$$|I_0|\leqslant\frac{A}{2\pi}\int_l|t-t_0-h|^{\mu-1}ds+\frac{A}{2\pi}\int_l|t-t_0|^{\mu-1}ds. \quad (18.7)$$

另外，再回想起，对于 L 上的任意两点 t_1 和 t_2，都有

$$0<k_0\leqslant\frac{|t_2-t_1|}{|s_2-s_1|}\leqslant1, \quad (18.8)$$

其中 k_0 是常数，經过簡单的計算以后，由 (18.7) 我們导出

$$|I_0|\leqslant A_0\left\{\int_{s_0-2\sigma}^{s_0+2\sigma}|s-s_0-\sigma|^{\mu-1}ds+\int_{s_0-2\sigma}^{s_0+2\sigma}|s-s_0|^{\mu-1}ds\right\}$$
$$\leqslant B_0\sigma^\mu\leqslant C_0|h|^\mu,$$

其中 A_0, B_0, C_0 是某些常数.

回到研究积分 I，現在把它改写成

$$I=I_1+I_2,$$

其中

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{\varphi(t_0)-\varphi(t_0+h)}{t-t_0}dt$$
$$=\frac{1}{2\pi i}[\varphi(t_0)-\varphi(t_0+h)]\left\{\ln\frac{b-t_0}{a-t_0}-\ln\frac{t''-t_0}{t'-t_0}\right\}$$

(参照 §13),

$$I_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}[\varphi(t)-\varphi(t_0+h)]\left\{\frac{1}{t-t_0-h}-\frac{1}{t-t_0}\right\}dt$$
$$=\frac{h}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0+h)}{(t-t_0-h)(t-t_0)}dt.$$

在 I_1 的表示式中花括号内的因子，当点 t_0 在 $a''b''$ 上时，显然是有界的．因此

$$|I_1|\leqslant C_1|h|^{\mu},$$

其中 C_1 是常数． 留待考察的是积分 I_2． 应用(18.8)，并且注意到量 $\tau=\sigma/(s-s_0)$ 的絕对值不超过 1/2， 那么，我們便得出

$$|I_2|\leqslant A_2|h|\int_{L-l}\frac{ds}{|s-s_0||s-s_0-\sigma|^{1-\mu}}$$
$$=A_2|h|\int_{L-l}\frac{ds}{|s-s_0|^{2-\mu}(1-\tau)^{1-\mu}}$$
$$\leqslant B_2|h|\int_{L-l}\frac{ds}{|s-s_0|^{2-\mu}}$$
$$=B_2|h|\left\{\int_{s_a}^{s_0-2\sigma}\frac{ds}{(s_0-s)^{2-\mu}}+\int_{s_0+2\sigma}^{s_b}\frac{ds}{(s-s_0)^{2-\mu}}\right\},$$

其中 s_a 与 s_b 是弧 $L=ab$ 的端点 a 与 b 所对应的弧坐标，而 A_2 与 B_2 都是常数．計算这些积分，容易得出

$$|I_2|\leqslant C_2|h|^{\mu},\qquad 当\ \mu<1\ 时,$$

$$|I_2|\leqslant C_2|h|\ln\frac{1}{|h|},\qquad 当\ \mu=1\ 时,$$

其中 C_2 是常数；在后一个不等式中，当然 $|h|$ 表示充分小的量．已得出的一些不等式便証明了上述的定理．

容易把这个定理推广到 L' 为任意一条簡单的逐段光滑曲綫

的情形，L' 甚至还可以有尖点(参看本书末尾的附录二).

所証明的定理是属于 J. Plemelj[1] 的；但是，这位著者并沒有能够精确地指出对积分路徑所加的条件；从上下文来判断，他所指的是光滑曲綫的情形. 此外，J. Plemelj 亦沒有讲到 $\mu=1$ 的情形，看来，他所討論的是 $\mu<1$ 的情形. 在 1916 年 И. И. Привалов[1] 不依据 J. Plemelj 的工作，証明了在 L 为圓周的情形下的这一定理①. 后来，在短文[4]中，他又給出了在 L 为任意一条沒有尖点的簡单的逐段光滑曲綫情形下的証明. 我們在此处所給出的証明实质上是由 J. Plemelj 指出的；我們仅作了一些精确化；亦可以和 И. И. Привалов[6]，[7] 作一比較.

我們再指出一个几乎是显然的，但是又是重要的情况. 为了簡单起見，假定 L 是一条光滑的敞开弧，又假定 $\varphi(t)$ 在这条弧的端点 c 的邻域內 (包括这个端点在內) 是适合 $H(\mu)$ 条件的，并且 $\varphi(c)=0$. 此时，如果把 $\Phi^+(c)=\Phi^-(c)$ 理解为 $\Phi(c)$，那么，$\Phi^+(t)$ 及 $\Phi^-(t)$ 也在端点 c 的邻域內 (包括点 c 在內) 适合 $H(\nu)$ 条件；当 $\mu<1$ 时，ν 表示常数 μ，当 $\mu=1$ 时，$\nu=1-\varepsilon$，其中 ε 为任意小的正常数. 如果在所討論的端点处把弧 L 向外延伸(例如，用切綫段来延伸)，并且在延伸部分上令 $\varphi(t)=0$，那么，由上面所得的結論可以直接导出所述結論.

2°. 根据公式 (16.2) 或者根据在証明它时所作的推导，由 Plemelj–Привалов 定理可以得出：**如果 $\varphi(t)$ 在曲綫 L 的光滑部分 L' 上是适合 $H(\mu)$ 条件的，那么，函数**

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} \tag{18.9}$$

在 L' 上 (它的端点的邻域可能除外) 也是适合 $H(\mu)$ 条件的 (当

---

① 亦可以参看 И. И. Привалов[2]. 我們指出，在 1906 年 P. Fatou[1]在 L 是一个圓周的情形下証明了：如果 $\varphi(t)$ 在 L 上适合 $H(\mu)$ 条件，那么，$\Phi(t)$ 适合 $H\left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)$ 条件.

$\mu<1$ 时) 或者是适合 $H(\mu-\varepsilon)$ 条件的 (当 $\mu=1$ 时，其中 ε 为任意小的正常数).

3° 我們現在来考察密度还依賴于某个参数 τ 的情形，亦就是，考察积分

$$\Phi(t_0, \tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t, \tau)\,dt}{t-t_0}, \tag{18.10}$$

我們假定，当点 t 位于曲綫 L 的某个光滑部分 L' 上，τ 位于某个集合 T 上时，函数 $\varphi(t, \tau)$ 对 t 与 τ 是适合 H 条件的，并且假定对 L 上其余的 t 值有

$$\begin{gathered}|\varphi(t, \tau+h)-\varphi(t, \tau)| \leqslant A(t)\,|h|^{\nu}, \\ \nu=\text{常数}>0, \quad \tau\in T, \quad \tau+h\in T,\end{gathered} \tag{18.11}$$

其中 $A(t)$ 为 L 上正值可积函数①. 又設 L'' 是 L' 的一部分，它与 L' 沒有公共端点.

我們来証明：在这些条件下当 $t_0\in L''$, $\tau\in T$ 时，函数 $\Phi(t_0, \tau)$ 对两个变量 t_0 与 τ 是适合 H 条件的.

为此，只須証明函数 $\Phi(t_0, \tau)$ 对变量 τ 是适合 H 条件的就够了，因为我們已經知道，$\Phi(t_0, \tau)$ 当 τ 固定时对 $t_0\in L''$ 是适合 H 条件的.

由条件(18.11)，在証明时，显然只要假定 L 是一条光滑的敞开弧，并且 L' 与 L 是重合的就够了.

在这些条件下，我們有

$$\begin{aligned}\Phi(t_0, \tau+h)-\Phi(t_0, \tau)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t, \tau+h)-\varphi(t, \tau)}{t-t_0}\,dt \\ =\frac{1}{2\pi i}\int_L &\frac{[\varphi(t, \tau+h)-\varphi(t_0, \tau+h)]-[\varphi(t, \tau)-\varphi(t_0, \tau)]}{t-t_0}\,dt \\ &+[\varphi(t_0, \tau+h)-\varphi(t_0, \tau)]\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{dt}{t-t_0}.\end{aligned}$$

① 我們不說，对于 L 上所有的 t，$\varphi(t, \tau)$ 对变量 τ 是适合 H 条件的，因为此时由 §3 (2° 段) 中所加的条件可以知道，我們应該假定，形式为 (18.11) 的不等式对有界的系数 $A(t)$ 是成立的，但是我們在这里并沒有作这样的假定.

第二项的絕对值显然不超过 $B|h|^{\nu}$，其中 ν 为函数 $\phi(t,\tau)$ 对于变量 τ 的 H 条件的指数，而 B 为常数. 剩下要考察的是积分

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{[\varphi(t,\tau+h)-\varphi(t_0,\tau+h)]-[\varphi(t,\tau)-\varphi(t_0,\tau)]}{t-t_0}\,dt.$$

假定 l 是以 t_0 为中心长度等于 $\sigma=|h|$ 的弧；我們假定 $|h|$ 足够小，以致 l 整个容納在 L 內. 将积分 I 分成两个积分之和：

$$I=I_1+I_2,$$

其中 I_1 是展布在 l 上的积分，而 I_2 是展布在 $L-l$ 上的积分. 我們显然有

$$|I_1|\leqslant A_1\int_l \frac{ds}{|s-s_0|^{1-\mu}}\leqslant B_1\sigma^{\mu},$$

其中 μ 是函数 $\varphi(t,\tau)$ 对于变量 t 所适合的 H 条件的指数，而 A_1 和 B_1 都是常数. 再者，我們又有

$$I_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{\varphi(t,\tau+h)-\varphi(t,\tau)}{t-t_0}\,dt$$
$$-[\varphi(t_0,\tau+h)-\varphi(t_0,\tau)]\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{dt}{t-t_0}.$$

第二项的絕对值不超过 $B'\sigma^{\nu}$，其中 B' 是常数. 对于充分小的 σ，第一项的絕对值不超过

$$A_2|h|^{\nu}\int_{L-l}\frac{ds}{|s-s_0|}\leqslant B_2\sigma^{\nu}\,|\ln\sigma|,$$

其中 A_2, B_2 都是常数. 这样一来，便証明了我們的結論.

显然，可以把所得到的結果推广到不是一个参数 τ，而是有几个参数的情形.

4°. 特别是，我們来考察积分

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t,t_0)}{t-t_0}\,dt,$$

其中 L 是一条逐段光滑曲綫，又其中 $\varphi(t,t_0)$ 当 $t\in L'$, $t_0\in L'$ 时，对于两个变量是适合 H 条件的，而对 L 上其他的 t 值，它适合

条件

$$|\varphi(t,\ t_0+h)-\varphi(t,\ t_0)|\leqslant A(t)\,|h|^{\nu},$$
$$\nu=\text{常数}>0,\quad t_0'\in L',\quad t_0+h\in L',$$

其中 $A(t)$ 是 L 上的正值可积函数①；正象上面那样，L' 表示曲綫 L 的任一光滑部分.

由上述結果可直接导出，$\Phi(t_0)$ 在 L 的任何一个属于 L' 但与 L' 沒有公共端点的光滑部分上是适合 H 条件的.

§19. 展布在无穷长直綫上的 Cauchy 型积分

在整个这一本书内，除了为数不多的以后常常要指出的例外情形外，我們所要研究的，亦正象在前几节中那样，仍然是边界曲綫或者积分曲綫整个位在有限距离内的情形. 但是，在这里我們仍准备对积分曲綫或者边界曲綫延伸至无穷远处的情形作一些注释.

1°. 将前面引进的概念以及对应的命題推广到剛才所提到过的情形，并沒有什么困难. 例如，分区全純函数的概念很自然地可以推广到这个情形；除了根据所研究的問題的特点，对函数在无穷远点(它現在在边界曲綫上)邻域内的性质，需要另加某些条件外，前面的定义仍然是保持有效的.

Cauchy 型积分的概念，Сохоцкий-Plemelj 公式，Plemelj-Привалов 定理等等，同样可以自然地移植到所討論的情形.

为了要闡明展布在无穷长曲綫上的积分收斂性条件，并为了要能保留(在有限长曲綫情形下所得出的)基本命題，需要用到(未知的或者已知的)函数在无穷远点邻域内的性质，因此，还需要单独地补充研究函数的这种性质. 用来进行这种研究的最自然和簡单的方法，是通过复数平面上的分式綫性变換把无穷远点的邻域

---

① 在 А. И. Гусейнов[1] 及 W. Pogorzelski[2] 的論文中，在有关函数 $\varphi(t_0,\ t)$ 的另一些假定下，研究了函数 $\Phi(t_0)$ 的性质.

变成某个有限点的邻域，从而，把积分曲綫延伸至无穷远处的情形归結为有限长曲綫 L 的情形来研究．在后面 3° 段中，我們将給出这种分式綫性变换的例子．

2°．由于上述推广几乎是完全明显的，在这里我們仅考虑积分曲綫是无穷长的直綫的最簡单的（但在应用上重要的）情形，我們现在用 D 来表示无穷长的直綫．

不失一般性，我們假定 D 是实軸，并考察 Cauchy 型积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}; \qquad (19.1)$$

在所討論的情形中，t 是实变量，它可以取遍所有的实数值，而 $\varphi(t)$ 一般讲来是定义在整个直綫 D 上的实变量 t（D 上有限个点对应的值可能除外）的复值函数．我們假定，可能除了上述点的任意小的邻域外，函数 $\varphi(t)$ 处处都是有界的，并且它在直綫 D 的每个有限长的綫段上是絕对可积的（参照 §11，1° 段）．

暂时我們假定点 z 不在 D 上．如果对于充分大的 $|t|$，不等式

$$|\varphi(t)|<\frac{B}{|t|^{\mu}} \qquad (19.2)$$

成立，其中 B 及 μ 都是正常数①，那么积分 (19.1) 就一定是收斂的．但是，在今后我們要遇到当 $|t|\to\infty$ 时（或者同样当 $t\to+\infty$ 及 $t\to-\infty$ 时）$\varphi(t)$ 趋于有限极限的更一般的情形；我們将用 $\varphi(\infty)$ 来表示这个极限．

我們将假定，对于充分大的 $|t|$，我們有

$$\varphi(t)=c+O\left(\frac{1}{|t|^{\mu}}\right)=\varphi(\infty)+O\left(\frac{1}{|t|^{\mu}}\right), \quad \mu=\text{常数}>0. \qquad (19.3)$$

在这种情形下，当 $c\neq 0$ 时，积分 (19.1) 是发散的，亦就是說，当 N' 与 N'' 相互独立地分别趋于 $-\infty$ 及 $+\infty$ 时，表示式

---

① 这个条件是充分的，但是，它当然不是必要的．

$$\int_{N'}^{N''} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}$$

不趋于某个极限. 事实上,我們有

$$\int_{N'}^{N''} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} = \int_{N'}^{N''} \frac{\varphi(t)-c}{t-z}\,dt + c\int_{N'}^{N''} \frac{dt}{t-z}. \qquad (*)$$

通过簡单的討論,可以知道

$$\int_{N'}^{N''} \frac{dt}{t-z} = \pm\alpha_i + \ln\frac{r''}{r'},$$

其中 $\alpha(0<\alpha<\pi)$ 是点 z 和 Ox 軸上点 $t=N'$ 及 $t=N''$ 的連綫之間所夹的角,而 r' 和 r'' 是点 z 分别到点 N' 和 N'' 的距离;这时,当 z 在上半平面时取"正"号,而当 z 在下半平面时取"負"号. 如果 N' 和 N'' 相互独立地分别趋于 $-\infty$ 和 $+\infty$, 那么, α 将趋于 π, 但是, $\ln\left(\frac{r''}{r'}\right)$ 不趋于任何极限. 这說明上述积分不趋于任何极限,因为,由条件(19.3),(*)右端的第一个积分是收斂的,因此,这亦就說明了(*)左端亦不趋于任何极限.

但是, 如果 $-N'$ 和 N'' 在增大时不是相互独立的, 而是假定了处处都有 $-N'=N''$, 那么, $\ln\left(\frac{r''}{r'}\right)$将趋于零,并且由前所述,我們有

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{+N} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)-c}{t-z}\,dt \pm \pi ic. \qquad (19.4)$$

出現在左端的表示式叫做无穷积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \quad 或者 \quad \int_D \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}$$

的 Cauchy 主值. 今后,我們在遇到无穷积分时,如果在普通意义下积分不存在,我們便把它理解为它的主值.

正象我們所看到过的那样,当满足条件(19.3)时,主值是存在的[①],并且

---

① 在确定主値时不必假定恰好有 $N'=-N''$, 只需假定 $\lim\frac{-N'}{N''}=1$ 就够了.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)-\varphi(\infty)}{t-z}\,dt\pm\frac{1}{2}\varphi(\infty),\tag{19.5}$$

其中左端出現的是主值，而右端出現的是在普通意义下的积分；当 z 在上半平面时取“正”号，而当 z 在下半平面时則取“負”号.

这样一来，我們把“主值”这一个术語应用于两种不同的，但又是类似的情形：被积函数在某一点处变成无穷的情形（象前面几节中那样）以及积分限为无穷的情形.

我們現在假定，点 $z=t_0$ 位在积分曲綫上，亦就是說，它在实軸上. 此时，我們把积分

$$\int_D\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}$$

理解为上述两种意义下的主值，亦就是說，当下述极限

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}\,dt=\lim_{\substack{N\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left\{\int_{-N}^{t_0-\varepsilon}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\int_{t_0+\varepsilon}^{N}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}\right\}\tag{19.6}$$

存在时，就把它定义成 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}$ 的主值. 特别是，容易看出

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t-t_0}=0.\tag{**}$$

显然，如果适合条件(19.3)，又若 $\varphi(t)$ 在点 t_0 的邻域內适合 H 条件，那么主值(19.6)一定是存在的.

根据(**)容易看出，主值可以由下列公式中的任意一个来表示：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)-\varphi(\infty)}{t-t_0}\,dt,\tag{19.6a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt,\tag{19.6b}$$

此处可以把右端的积分仅理解为上述两种意义之一的主值.

假定 $\varphi(t)$ 是适合条件(19.3)的，当然，还加上一开始所提到的条件. 那么，由公式(19.1)所定义的函数 $\Phi(z)$，显然在上半平面以及在下半平面內都是全純的. 我們用 S^+ 及 S^- 分别表示上

半平面及下半平面；而边界 D 既不属于 S^+，又不属于 S^-.

沒有什么困难便可以把 Сохоцкий-Plemelj 公式以及在前面几节已經証明过的有关边值的定理移植到在此处所考虑的情形上来. 亦就是，如果 t_0 是 D 上位在有限距离内的点，又若 $\varphi(t)$ 在这点的邻域内是适合 H 条件的，那么

$$\Phi^+(t_0)=\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{19.7}$$

$$\Phi^-(t_0)=-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{19.8}$$

如果 $\varphi(t)$ 在直綫 D 的某个綫段上适合 H 条件，那么，$\Phi^+(t_0)$ 及 $\Phi^-(t_0)$ 在这个綫段上(端点可能例外)是适合 H 条件的. 在 §17 中所述的結果对我們的情形亦仍然是正确的.

3°. 到現在为止，当讲到函数 $\Phi(z)$ 在边界 D 上一点附近的性质时，以及当我們讲到这个函数的边值时，我們所研究的都是位在有限距离内的点处的情形.

我們現在在无穷远点的邻域内研究函数 $\Phi(z)$ 的性质以及它的边値. 在我們的情形下，无穷远点是边界的一个点. 这种研究可以直接进行，但是，我們宁愿利用在 1° 段末尾所指出的方法来研究它，亦就是，把它归結为有限长的边界的情形来研究.

我們可以利用下述变量置换来实現这一个目的：

$$z+i=\frac{-1}{\zeta+i}, \tag{19.9}$$

亦就是，

$$z=\frac{-i\zeta}{\zeta+i},\quad \zeta=\frac{-iz}{z+i}; \tag{19.9a}$$

当然，我們亦可以利用任何其他把直綫 D 变成一个圓周的(分式)綫性变換来实現这一个目的，但是，我們只讲到变量置換 (19.9)，因为，它是最簡单的并且具有对称性的置換之一.

在这个变換下，z 平面上的实軸 D 变成 ζ 平面上具有下列性

质的圓周 L: L 与 ζ 平面上的实軸相切于 $\zeta=0$ 点，并且通过点 $\zeta=-i$. 当 z 平面的点 t 在正方向(上半平面保持在它的左側)描出直綫 D 时，它对应的点

$$\tau=\frac{-it}{t+i} \tag{19.10}$$

在 ζ 平面上循着反时針方向描繪出圓周 L(它所包圍的圓域在它的左側).

关系式(19.9)給出了把 z 平面的上半平面映射到 ζ 平面上由圓周 L 所包圍的圓域之保角映射，这个保角映射同时把 z 平面上的下半平面映射到 ζ 平面上的圓周 L 的外部. 此外它还把 z 平面上的无穷远点映射为圓周 L 的点 $\zeta=-i$.

在公式(19.1)中进行变量置换(19.9), (19.10), 并且引进記号

$$\Phi(z)=\Phi\left(\frac{-i\zeta}{\zeta+i}\right)=\Phi^*(\zeta), \quad \varphi(t)=\varphi\left(\frac{-i\tau}{\tau+i}\right)=\varphi^*(\tau),$$

我們就得出

$$\Phi(z)=\Phi^*(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\zeta+i}{\tau+i}\,\frac{\varphi^*(\tau)d\tau}{\tau-\zeta}, \tag{19.11}$$

或者經过明显的变换以后,

$$\Phi(z)=\Phi^*(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^*(\tau)d\tau}{\tau-\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^*(\tau)d\tau}{\tau+i}. \tag{19.12}$$

应該把在被积函数分母中包含表示式 $(\tau+i)$ 的积分理解为它的主值. 容易看出，由于条件(19.3)，这个主值是存在的[①].

上式右端第二个积分是个常量，因此，研究函数 $\Phi(z)$ 在点 $z=\infty$ 的邻域內的性质，可以归結为我們已經熟悉的有关右端第一个积分在边界上的点 $\tau=-i$ 附近的性质的問題.

为了直接利用我們已經熟悉的結果，我們对函数 $\varphi(t)$ 加上这

① 容易看出，由于条件(19.3)，在 L 上的点 $\tau=-i$ 附近，我們有

$$|\varphi^*(\tau)-\varphi^*(-i)|\leqslant 常数\cdot|\tau+i|^{\mu},$$

亦就是說，$\varphi^*(\tau)$ 在点 $\tau=-i$ 处适合 L 上的 H 条件(参看 §13，注釋 4).

样的条件，使得函数 $\varphi^*(\tau)$ 在点 $\tau=-i$ 的邻域内是适合 H 条件的，亦就是，适合条件：

$$|\varphi^*(\tau_2)-\varphi^*(\tau_1)|\leqslant A|\tau_2-\tau_1|^\mu,\quad A=\text{常数}>0,\ \mu=\text{常数}>0;$$

这个条件可以归結为下述的关于 t 的条件：对充分大的 $|t_1|$ 与 $|t_2|$，有

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant A\left|\frac{it_1}{t_1+i}-\frac{it_2}{t_2+i}\right|^\mu=A\left|\frac{1}{t_2+i}-\frac{1}{t_1+i}\right|^\mu,$$

或者，显然等价地，归納为条件：对充分大的 $|t_1|$ 与 $|t_2|$，有

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant A\left|\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right|^\mu\quad (A=\text{常数}>0,\ \mu=\text{常数}>0). \tag{19.13}$$

我們把条件(19.13)叫做**在无穷远点邻域內的 H 条件**，或者更精确地把它叫做**在无穷远点邻域內的 $H(\mu)$ 条件**[①].

在假定了 $\varphi(t)$ 适合这个条件之后，我們来証明：当 z 沿着**任意一条**恒保留在上半平面或者下半平面內的**路綫**而趋于无穷远点时，函数 $\Phi(z)$ 的边値是存在的；我們分別用 $\Phi^+(\infty)$ 及 $\Phi^-(\infty)$ 表示这些边値．为了証明它們的存在性并且計算出它們的値，我們回到公式(19.12)．

如果 z 保留在上半平面或者下半平面內而趋于 ∞，那么，ζ 相应地保留在 L 的內部或者外部而趋于 $-i$．因此，把 Сохоцкий-Plemelj 公式应用到(19.12)右端的第一个积分上，我們便得出

$$\Phi^+(\infty)=\Phi^{*+}(-i)$$
$$=\frac{1}{2}\varphi^*(-i)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi^*(\tau)d\tau}{\tau+i}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi^*(\tau)d\tau}{\tau+i},$$

由此直接便导出下列公式中的第一个：

$$\Phi^+(\infty)=\frac{1}{2}\varphi(\infty),\quad \Phi^-(\infty)=-\frac{1}{2}\varphi(\infty); \tag{19.14}$$

完全类似地可以証明第二个公式．

① 与此相应，可以把条件(19.3)叫做在点 $t=\infty$ 处的 H 条件．

4°. 我們順便再来指出通过展布在直綫D上的积分来表示展布在圓周L上的 Cauchy 型积分的公式；今后我們在求解某些問題时要利用到这些公式.

假定

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\zeta}; \tag{19.15}$$

此时,在变量置换(19.9)及(19.10)下,我們有

$$\Phi^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{z+i}{t+i}\frac{\varphi^*(t)dt}{t-z}, \tag{19.16}$$

或者还有

$$\Phi^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{\varphi^*(t)dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{\varphi^*(t)dt}{t+i}, \tag{19.17}$$

此处已令

$$\Phi^*(z)=\Phi\left(\frac{-iz}{z+i}\right),\quad \varphi^*(t)=\varphi\left(\frac{-it}{t+i}\right).$$

如果假定公式(19.17)右端的第二个积分在 Cauchy 主值意义下是存在的,例如,只須假定函数$\varphi^*(t)$在点$t=\infty$处是适合H条件的(亦就是,函数$\varphi(\tau)$在点$\tau=-i$处是适合H条件的),那么,公式(19.17)就有意义,并且可以由公式(19.16)得出. 但是,如果这个公式不成立,那么,便应該利用公式(19.16).

由于上面所指出的理由,对展布在无穷长的直綫D上的 Cauchy 型积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{\varphi(t)dt}{t-z}$$

的研究,通常很容易地可换成对形式为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{z+i}{t+i}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}=\frac{z+i}{2\pi i}\int_D\frac{\varphi(t)dt}{(t+i)(t-z)}$$

的积分的研究，当$\varphi(t)$适合条件(19.3)时，后一个积分仅和前一个积分差一常数項.

§20. Cauchy 型积分的导函数在积分曲綫附近的性质

今后，我們需要用到 Cauchy 型积分的导函数的模在积分曲綫附近的一个簡单的估計式，这个估計式本身亦是有价值的.

在这里我們只需假定积分曲綫 L 是一条封閉的或者敞开的光滑弧就够了. 另外，我們还假定，$\varphi(t)$ 在 L 上是适合 $H(\mu)$ 条件的.

我們来考察 Cauchy 型积分的导函数

$$\Phi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-z)^2}. \tag{20.1}$$

假定 t_0 是 L 上的任意点，但是，当曲綫 L 是一条敞开弧时，它到曲綫 L 最近的一个端点的距离不小于某任意取定了的正数 R.

我們用 $R_0=R_0(\alpha_0)$ 表示曲綫 L 的对应于任意取定了的某个銳角 α 的标准半徑. 最后，假定 ρ 为适合下列条件的任意正常数：

$$\rho<R_0,\quad \rho<R; \tag{*}$$

在 L 是一条封閉圍綫的情形下，沒有第二个条件.

今后，我們假定，点 z 到点 t_0 的距离 δ 不超过 ρ：

$$\delta=|z-t_0|\leqslant\rho, \tag{**}$$

又假定綫段 t_0z 与 L 在 t_0 处的切綫所夹的非鈍角不小于某个固定的量 $\beta_0>\alpha_0$.

此时，下述估計式是成立的：

$$\begin{aligned}&|\Phi'(z)|<C\delta^{\mu-1}, &&\text{当 }\mu<1\text{ 时},\\ &|\Phi'(z)|<C|\ln\delta|, &&\text{当 }\mu=1\text{ 时},\end{aligned} \tag{20.2}$$

其中 C 是常数①.

事实上，以 t_0 为中心，以 R_0 为半徑我們画一个圓周 Γ_0，并用 $l=ab$ 表示 L 上包含在 Γ_0 内部的部分；与此相应，我們把积分 (20.1) 分成两个积分之和

① 当然，在 $\mu=1$ 的情形，在估計式中假定了 δ 为充分小的量.

$$\Phi'(z)=\Psi_1(z)+\Psi_2(z),$$

其中第一个积分 $\Psi_1(z)$ 是展布在 l 上的积分，第二个积分 $\Psi_2(z)$ 是展布在 $L-l$ 上的积分. 因为，依据条件(**)，函数 $\Psi_2(z)$ 对于所討論的值 z 显然是有界的，因此，只需討論下述积分：

$$\Psi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(t)dt}{(t-z)^2}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{(t-z)^2}dt+\frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\left\{\frac{1}{z-b}-\frac{1}{z-a}\right\}. \tag{20.3}$$

因为右端第二項是有界的(依据对 z 的位置所加的条件而得出的)，因此，还留待考慮的是第一項. 令 $r=|t-t_0|$，并且回想起

$$|ds|\leqslant K|dr|,\quad |\varphi(t)-\varphi(t_0)|\leqslant A|t-t_0|^\mu,$$
$$|t-z|^2\geqslant(r-\delta\cos\omega_0)^2+\delta^2\sin^2\omega_0,$$

其中 $\omega_0=\beta_0-\alpha_0$ (参照第 68 頁)，又若引进記号

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{(t-z)^2}dt,$$

我們就有

$$|I|\leqslant\frac{AK}{2\pi}\int_{ab}\frac{r^\mu|dr|}{(r-\delta\cos\omega_0)^2+\delta^2\sin^2\omega_0}$$
$$\leqslant\frac{AK}{\pi}\int_0^{R_0}\frac{r^\mu dr}{(r-\delta\cos\omega_0)^2+\delta^2\sin^2\omega_0}.$$

当 $\mu<1$ 时，进行变量置换 $r=\delta\mu$，我們得到

$$|I|<\frac{AK}{\pi}\delta^{\mu-1}\int_0^\infty\frac{u^\mu du}{(u-\cos\omega_0)^2+\sin^2\omega_0}=C\delta^{\mu-1},$$

其中 C 是常数. 当 $\mu=1$ 时，前一个公式右端的积分可以算出为有限形式，并且可以导出估計式 $|I|\leqslant C|\ln\delta|$. 于是，便証明了我們的命題.

如果曲綫 L 为一条敞开弧，又若放弃要求点 t_0 和端点相隔一个有限距离的条件，与此相应，应該抛去条件(*)中的第二个，那么，根据公式(20.3)，容易看出，当保留了关于点 z 的位置的其余条件时，便有

$$|\Phi'(z)| < C\delta^{-1}, \tag{20.4}$$

其中C是常数.

回到(20.2),我們还可以作出下述推論. 假定z_1和z_2是通过点t_0而与t_0点处的切綫所夹的非鈍角不小于β_0的直綫上的两个点. 又假定z_1和z_2位在L的同一侧,我們有

$$\Phi(z_2) - \Phi(z_1) = \int_{z_1}^{z_2} \Phi'(z)\,dz,$$

此处可以认为积分是展布在直綫段z_1z_2上的. 現在利用估計式(20.2),并且先假定$\mu<1$, 再用δ_1与δ_2表示点z_1与z_2到点t_0的距离,我們得出

$$|\Phi(z_2) - \Phi(z_1)| \leqslant \frac{C}{\mu}|\delta_2^\mu - \delta_1^\mu| \leqslant C_0|\delta_2 - \delta_1|^\mu$$
$$= C_0|z_2 - z_1|^\mu, \tag{20.5}$$

其中C_0为常数.

当$\mu=1$时,类似地,我們得出

$$|\Phi(z_2) - \Phi(z_1)| \leqslant C_0|\delta_2 - \delta_1|^{1-\varepsilon} = C_0|z_2 - z_1|^{1-\varepsilon}, \tag{20.6}$$

其中ε为任意取定的正数. 現在用z表示z_2, 用δ表示δ_2, 并且假定$z_1 \to t_0$, 而且认为z位在L的左侧,我們便得出

$$|\Phi(z) - \Phi^+(t_0)| \leqslant C_0\delta^\mu, \quad \text{当 } \mu<1 \text{ 时}, \tag{20.7}$$

$$|\Phi(z) - \Phi^+(t_0)| \leqslant C_0\delta^{1-\varepsilon}, \quad \text{当 } \mu=1 \text{ 时}. \tag{20.8}$$

对于位在L右侧的z, 完全类似的估計式亦是成立的.

§21. Cauchy 型积分在积分曲綫附近的性质

現在我們进一步研究 Cauchy 型积分在积分曲綫L附近的性质,亦就是說,我們要証明下述定理.

定理 假定L为一条光滑的封閉圍綫,又假定$\varphi(t)$在L上是适合$H(\mu)$条件的,再假定S^+, S^-是平面上由L所圍成的部分. 那么,在区域$S^+ + L$和$S^- + L$的每一个内,函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-z}\tag{21.1}$$

满足条件

$$|\Phi(z_2)-\Phi(z_1)|\leqslant C|z_2-z_1|^{\mu},\quad 当\ \mu<1\ 时,\tag{21.2}$$

或者

$$|\Phi(z_2)-\Phi(z_1)|\leqslant C|z_2-z_1|^{1-\varepsilon},\quad 当\ \mu=1\ 时;\tag{21.2a}$$

其中 ε 为任意正数，C 是常数，并且当 $z\in L$ 时，应该把 $\Phi(z)$ 理解为对应的边值（Φ^+ 或者 Φ^-）.

在証明时，我們可以假定 $\mu<1$，因为，在 $\mu=1$ 的情形下，我們可以从下述事实出发：当 $\varphi(t)$ 适合 $H(1)$ 条件时，它一定更适合 $H(1-\varepsilon)$ 条件. 我們把平面的有限部分用 S^+ 表示，又用 S^- 表示平面的无界部分，并且可以假定，对应地已經选定 L 的正方向.

假定 t_0 是圍綫 L 上的任一个点，而 z 是区域 S^+ 内的动点. 我們研究 z 的函数

$$\Psi(z)=\frac{\Phi(z)-\Phi^+(t_0)}{(z-t_0)^{\nu}},\quad 0\leqslant\nu<\mu\tag{21.3}$$

在 S^+ 内的任意一个单值分枝. 根据 Plemelj–Привалов 定理以及在 § 6, 3° 段中所述結果，这个函数的边值

$$\Psi^+(t)=\frac{\Phi^+(t)-\Phi^+(t_0)}{(t-t_0)^{\nu}}\tag{21.4}$$

在 L 上是适合 H 条件的. 为了能应用最大模原理，还应該証明：函数 $\Psi(z)$ 在 S^++L 上是連續的. 后一点可以从下面的考虑得出. 我們从区域 S^+ 挖去它的无穷小部分 σ，而 σ 是以 t_0 为中心的无穷小的圓域和 S^+ 的公共部分. 此时，在区域 $S^+-\sigma$ 内，函数 $\Psi(z)$ 可以用 Cauchy 积分

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}\frac{\Psi^+(t)dt}{t-z}$$

表出，其中 L' 是区域 $S^+-\sigma$ 的边界. 但是，因为在 t_0 附近

$$\Psi(z)=O\left(\frac{1}{|z-t_0|^{\nu}}\right),\quad \nu<1,$$

因此,展布在圍繞 t_0 的无穷小圆周上弧的积分趋于零,从而,在整个区域 S^+ 內,有

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Psi^+(t)\,dt}{t-z}.$$

但是,如果在 L 上把它的值写成 $\Psi^+(t)$,那么,由 §15 中証明过的定理可知,函数 $\Psi(z)$ 在 S^++L 上是連續的,从而,

$$\frac{|\Phi(z)-\Phi^+(t_0)|}{|z-t_0|^{\nu}}=|\Psi(z)|\leqslant\max|\Psi^+(t)|\leqslant C,$$

其中 C 既与 t_0 在 L 上的位置无关,又与量 $\nu<\mu$ 无关①. 因此,上述不等式当 $\nu=\mu$ 时亦仍然是成立的,于是,我們有

$$|\Phi(z)-\Phi^+(t_0)|\leqslant C|z-t_0|^{\mu}. \tag{21.5}$$

对于位在 S^- 中的点 z,亦可以完全类似地建立同样的不等式②.

这样一来,在 z_1 与 z_2 中至少有一个点位在 L 上的情形下,便証明了不等式(21.2).

我們現在来考察两个点 z_1 与 z_2 都位在 S^+ 內的情形. 容易看出,我們可以只討論这两个点中至少有一个,比如說 z_1,到边界的距离小于某个常数 $\rho<R_0$ 的情形,此处 R_0 是某个标准半徑③. 我們現在用 z_0 表示 z_1,用 z 表示 z_2. 假定 t_0 是圍綫 L 上最靠近 z_0 的点.

我們用直綫段 t_0z_0 将区域 S^+ 割开(綫段 t_0z_0 显然是 L 在点 t_0 处的法綫),并且考察函数

---

① 这是由于,函数 $\Phi^+(t)$ 是适合 $H(\mu)$ 条件的.

② 函数 $\Psi(z)$ 在 S^- 內不是单值的. 但是,由于我們所感兴趣的只是在 t_0 附近的点 z,因此,我們可以只討論区域 S^- 的有限部分,这一部分是由 L 上包含点 t_0 的任一部分延伸而成的任意一条光滑封閉圍綫所圍成的区域(并使它在 S^- 內). 此时,我們就可以把問題归結为前一种情形来討論.

③ 如果两点到边界的距离都不小于 ρ,其中 ρ 是任意固定的数,那么,由于函数 $\Phi(z)$ 的全純性,不等式(21.2)必然是成立的.

$$\Psi_0(z)=\frac{\Phi(z)-\Phi(z_0)}{(z-z_0)^\mu}, \tag{21.6}$$

它在已割开的区域内是全純的，并且它可以連續拓展到这个区域的整个边界上．依据(21.5)，这个函数在 L 上的边值适合条件 $|\Psi_0^+(t)|\leqslant C$．而 $\Psi_0(z)$ 在割縫 z_0t_0 两边的每一边上的边值也适合同样的条件(这一次是根据条件(20.5)而得出的)．因此，依据最大模原理，在 S^+ 内处处都有 $|\Psi_0(z)|\leqslant C$．对 S^- 亦可以完全类似地建立同样的不等式．这样一来，便証明了我們的定理．

注释1 从上述定理可以导出下述結論．假定 $\Phi(z)$ 是某个在 S^+ (或者在包括无穷远点的 S^-) 内全純，又可以連續拓展到 L 上的函数，又假定它从左側[右側]而取得的边值[我們把它簡单地記作 $\Phi(t)$]在 L 上是适合 $H(\mu)$ 条件的($0<\mu<1$)．此时，对于区域 S^++L $[S^-+L]$ 内的任何两点 z_1, z_2, 都有

$$|\Phi(z_2)-\Phi(z_1)|\leqslant C|z_2-z_1|^\mu,$$

其中 C 是常数①．

事实上，如果在区域 S^+ 内把函数 $\Phi(z)$ 用 Cauchy 型积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Phi(t)\,dt}{t-z}$$

---

① 这个結果是 J. L. Walsh 和 W. E. Sewell 的論文[1] (亦可以参看 W. E. Sewell[1]) 中所証明过的定理的特殊情形，并且它可以包括在下述定理之中：

假定 L 是一条封閉的 Jordan 曲綫，又假定 S 是由 L 所圍成的有界区域；另外，又設 $f(z)$ 是在 S 内为全純、在 $S+L$ 内为連續的函数．設 μ 是常数，$0\leqslant\mu\leqslant1$，又設对 L 上所有的点 z 与 z_0，都有

$$\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|^\mu}\leqslant K=\text{常数};$$

那么，对 $S+L$ 内所有的 z 与 z_0，这一个不等式亦都是成立的．

这一个定理是 S. Warschawski[2] 所得出的一个結果的推广，該結果仅討論了点 z 与 z_0 中的一个位在 L 上的情形．

这些著者的証明比这里所引用的要复杂得多，这是由于我們仅討論了 L 为光滑圍綫的情形．我們的初等証明容易推广到 L 为一条簡单的逐段光滑圍綫的情形；参看本书末尾的附录二．

表出，那么，由前面的定理直接就可以得出上述的結果；对区域 S^- 亦可以类似地加以討論.

反之，如果再利用 Plemelj-Привалов 定理，那么，由这个結果亦可以得出上面已証明过的定理.

注釋 2 从上面这些結果还可以直接得出下述結果. 假定在公式 (21.1) 中 L 是任意一条逐段光滑曲綫，又假定 $\varphi(t)$ 在属于 L 而不包含 L 的結点的某一条光滑弧 L' 上是适合 H 条件的. 此时，在弧 L' 的任意一个与它的端点以及与曲綫 L 上不属于 L' 的点都相隔一个有限距离的左[右]邻域內，不等式(21.2)是成立的.

为了証明这个結果，只要把积分(21.1)表成两个积分之和，而这两个积分中有一个是展布在 L' 上的积分，另一个是展布在 L 的其余部分上的积分，同时，把对展布在 L' 上的积分之研究换成对展布在光滑的封閉圍綫 $L'+L''$ 上的积分之研究，此处 L'' 是某一条弧，把 L'' 补充到 L' 上，可以得出一条整个位在上述邻域內的光滑封閉圍綫(图 12)；此时，可以把 L'' 上的 $\varphi(t)$ 理解为任何一个使得 $\varphi(t)$ 在整个圍綫 $L'+L''$ 上适合 H 条件的函数.

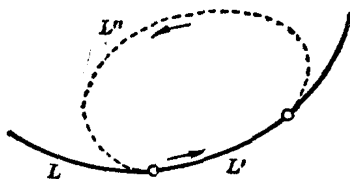


图 12

注釋 3 和前面类似，如果 $\Phi(z)$ 是在弧 L' 的左[右]邻域內全純的(参看前一个注釋)，又可以連續拓展到 L' 上的函数，又如果 $\Phi^+(t)$ $[\Phi^-(t)]$ 在 L' 上适合 H 条件，那么，对于上述邻域內与 L' 的端点以及曲綫 L 上不属于 L' 的点相隔有限距离的点，不等式(21.2)是成立的.

§22. Cauchy 型积分在积分曲綫端点附近的性质①

在前面几节中，只是在下列假定下，我們研究了 Cauchy 型积分在积分曲綫上和它的附近的性质：假定积分曲綫至少在所討論的部分是光滑的，而密度 $\varphi(t)$ 在这一部分上是属于 H 类的. 但是，在很多(甚至是最簡单的)应用中，这种限制有时会导致失掉一些比較重要的結果.

另一方面，在大量的应用中，假定曲綫 L 是一条逐段光滑曲綫，而 $\varphi(t)$ 在 L 上是属于 H^* 类的 (§8, 4° 段)，就完全足够了. 我們亦需要来研究这一种情形.

为了闡明比較重要的問題，只要考虑积分曲綫是一条簡单的敞开弧，而 $\varphi(t)$ 在它的一个端点的邻域内是属于 H^* 类的情形，并研究 Cauchy 型积分在这一个端点附近的性质就够了；把它推广到任意一条逐段光滑曲綫的情形是并不困难的(§26).

1° 于是，我們假定积分曲綫

$$L=ab$$

是一条光滑的敞开弧，又假定 $\varphi(t)$ 在端点 a 或者 b 之一的邻域内是属于 H^* 类的，我們用 c 表示那一个端点；正象通常那样，我們可以认为在 L 上的正方向是由 a 到 b.

---

① 如果不考虑这一章中的某几节，那么我們只是在第四、第五章中才要用到在 §§22～26 中所叙述的結果，如果仅討論更特殊的情形，那么在这一章的上述各节中亦可以不利用 §§22～26 中的結果(在有关的地方将要指出)，而那些更特殊的情形只是在第二、第三、第六章中我們需要用到.

著者得出了在 §§22～25 中所述的結果，并把它們发表在下述論文(主要部分沒有証明)中：Н. И. Мусхелишвили[6] 以及 Н. И. Мусхелишвили 和 Д. А. Квеселава[1]. 其証明发表在本书的第一版中(1946 年). F. Tricomi[3] 在 1951 年发表的公式是用了很复杂的方法才得出的，并且它們只是公式(22.7)及(22.8)的特殊情形，显然沒有必要再来介紹这一篇論文. 亦可以和更晚一些发表的 H. Söhngen[2] 的論文作一比較. W. Pogorzelski 最近发表的一系列論文是专門研究在此处我們所感兴趣的問題的；关于这一点可以参看 §26 起首的注.

为了要得出表征 Cauchy 型积分在所討論的端点 c 附近的性质的公式,并且把这些公式写成今后我們要用的形式,我們把函数 $\varphi(t)$ 表成下述形式[①]

$$\varphi(t)=\frac{\varphi^*(t)}{(t-c)^\gamma},\quad \gamma=\alpha+i\beta,\quad 0\leqslant\alpha<1, \tag{22.1}$$

其中 α 与 β 都是实常数, 而 $\varphi^*(t)$ 在 L 上端点 c 的邻域内是属于 H 类的函数. 在上述的表示式中, $(t-c)^\gamma$ 表示任意一个在 L 上是連續变化的确定的分枝(若 $\alpha=0$, $\beta\neq0$, 則必須去掉点 c).

我們指出,由(22.1)可以知道,

$$\varphi(t)=\frac{\varphi^{**}(t)}{|t-c|^\alpha}, \tag{22.1a}$$

其中 $\varphi^{**}(t)$ 是在 c 的邻域内属于 H_ε^* 类的有界函数; 所謂在 c 的邻域内是属于 H_ε^* 类的意味着(§8, 5° 段),对于每一个 $\varepsilon>0$[②],乘积 $|t-c|^\varepsilon\varphi^{**}(t)$ 在 c 的邻域内是属于 H 类的; 显然, 这一个乘积在点 $t=c$ 处取值零.

我們还指出,由同一个条件(22.1)給出

$$\varphi(t)=\frac{\varphi_*(t)}{(t-c)^\mu},\quad \varphi(t)=\frac{\varphi_{**}(t)}{|t-c|^\nu}, \tag{22.2}$$

其中 μ, ν 都是任意正常数, 它們都比 α 要大一个任意小的量, 而 $\varphi_*(t)$, $\varphi_{**}(t)$ 在 c 的邻域内都是属于 H 类的(并且在 $t=c$ 处取值零). 亦显然, 如果 $\varphi(t)$ 适合条件 (22.2) 中的第二个, 而其中 $\varphi_{**}(t)$ 在 c 的邻域内是属于 H 类的 (在这个点处它不一定等于零), 那么, 当 μ 比 ν 大一个任意小的量时, $\varphi(t)$ 亦适合条件 (22.2) 中的第一个.

---

① 在 c 的邻域内是属于 H^* 类的函数, 总可以表成(22.1)的形式, 这可以从本书下面所讲的[亦就是,从公式(22.2)及紧接着这个公式之后所讲的]导出.

② 我們有

$$\varphi^{**}(t)=\varphi^*(t)e^{-i\alpha\theta}(t-c)^{-i\beta},$$

其中 $\theta=\arg(t-c)$; 如果注意到在 §6, 3° 段中所讲过的結果,那么, 由此可以导出在本书正文中所讲的結論.

2°. 我們現在考察积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \tag{22.3}$$

其中 $\varphi(t)$ 由公式(22.1)确定.

在上述条件下,对于和端点 c 足够接近,但是又不位在 L 上的点 z, 下列命題是成立的.

命題 I 如果 $\gamma=0$ (此时 $\varphi^*(t)=\varphi(t)$), 那么,有

$$\Phi(z)=\mp\frac{\varphi(c)}{2\pi i}\ln(z-c)+\Phi_0(z), \tag{22.4}$$

此处,当 $c=a$ 时,取上面的符号,而当 $c=b$ 时,取下面的符号. 把 $\ln(z-c)$ 理解为在沿着 L 而割开的平面上点 c 的邻域内是全純的任意一个分枝; $\Phi_0(z)$ 表示在已割开的平面上点 c 的邻域内是全純的函数,并且当 z 沿着任意一条路徑而趋于 c 时, $\Phi_0(z)$ 趋于确定的极限.

命題 II 如果 $\gamma=\alpha+i\beta\neq 0$, 那么,有

$$\Phi(z)=\pm\frac{e^{\pm\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{\varphi^*(c)}{(z-c)^\gamma}+\Phi_0(z), \tag{22.5}$$

此处符号的选法与命題 I 的一样; $(z-c)^\gamma$ 表示此函数在沿 L 割开的平面上点 c 附近是全純的一个分枝, 并且它在 L 的左側取值 $(t-c)^\gamma$ ①, 而 $\Phi_0(z)$ 在已割开的平面上点 c 的邻域内是全純的函数,并且具有下列性质: 如果 $\alpha=0$, 那么,当 z 沿着任意一条路綫而趋于 c 时,它趋于确定的极限;如果 $\alpha>0$, 那么,便有

$$|\Phi_0(z)|<\frac{K}{|z-c|^{\alpha_0}}, \tag{22.6}$$

其中 K 及 α_0 都是正常数,并且 $\alpha_0<\alpha$.

从命題 I 与 II 可以知道: 如果 $\varphi(t)$ 在 L 上是属于 H^* 类的,

① 把 $(t-c)^\gamma$ 理解为出現在公式(22.1)中的值.

那么，函数 $\Phi(z)$ 是一个具有跳跃曲綫 L 的分区全純函数[①]（在 §10 中所給出的定义的意义下）．

对于位在 L 上的点 t_0，下列命題是成立的．

命題 III 如果 $\gamma=0$，那么，有

$$\Phi(t_0)=\mp\frac{\varphi(c)}{2\pi i}\ln(t_0-c)+\Phi^*(t_0), \tag{22.7}$$

此处，$\Phi^*(t_0)$ 在点 c 的邻域內是属于 H 类的；符号的选法同命題 I；把 $\ln(t_0-c)$ 理解为在 L 上（当然，端点 c 应該除外）是連續变化的任意值．

命題 IV 如果 $\gamma=\alpha+i\beta\neq0$，那么，有

$$\Phi(t_0)=\pm\frac{\operatorname{ctg}\gamma\pi}{2i}\cdot\frac{\varphi^*(c)}{(t_0-c)^\gamma}+\Phi^*(t_0), \tag{22.8}$$

并且当 $\alpha=0$ 时，$\Phi^*(t_0)$ 在 c 的邻域內是属于 H 类的；而当 $\alpha>0$ 时，则有

$$\Phi^*(t_0)=\frac{\Phi^{**}(t_0)}{|t_0-c|^{\alpha_0}}, \tag{22.9}$$

其中 $\Phi^{**}(t_0)$ 在 c 的邻域內是属于 H 类的；$\alpha_0=$ 常数 $<\alpha$；符号的选法同命題 I．

命題 I 在 §15［公式(15.7)，(15.8)］中已經証明过．依据在 §18 (1° 段末尾) 中所讲过的結果以及下述公式，完全类似地可以証明命題 III：公式

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-t_0}dt+\frac{\varphi(a)}{2\pi i}\int_{ab}\frac{dt}{t-t_0}$$

---

① 这时，$\varphi(t)$ 属于 H^* 类的条件（或者任意类似的条件）是很重要的．正如 И. Н. Карцивадзе[1] 曾經指出过的：甚至在密度 $\varphi(t)$ 在 L 上处处是連續的，且它具有在 L 上除了端点 c 处外处处都是連續的导函数的情形下，当 $z\to c$ 时，函数 $\Phi(z)$ 增长的速率可以是任意快的．

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-t_0}dt+\frac{\varphi(a)}{2\pi i}\ln\frac{t_0-b}{t_0-a}+\text{常数}^{①} \quad (22.10)$$

以及对应于端点 b 的类似的公式. 命题 II 和 IV 将在 §§ 23～25 中証明②.

3° 假定上述命题已經証明过, 我們还指出在公式(22.4), (22.5) 右端出現的函数 $\Phi_0(z)$ 的某些性质; 这些函数当然和在公式(22.7), (22.8)右端出現的函数 $\Phi^*(z)$ 有着紧密的联系.

我們从公式(22.4)入手, 为了确定起見, 假定 $c=a$. 让 z 从 L 的左側而趋于 t_0 来取极限(此处 t_0 表示弧 L 上和端点 a 充分接近,但是又不与 a 重合的点),并且把 Сохоцкий-Plemelj 公式应用到左端,我們得出

$$\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\Phi(t_0)=-\frac{1}{2\pi i}\varphi(a)\ln(t_0-a)+\Phi_0^+(t_0),$$

此处把 $\ln(t_0-a)$ 理解为函数 $\ln(z-a)$ 在 a 附近选定的分枝在 L 的左側所取得的値. 类似地,从 L 的右側取极限,我們得出

$$-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\Phi(t_0)=-\frac{1}{2\pi i}\varphi(a)\,[\ln(t_0-a)+2\pi i]+\Phi_0^-(t_0),$$

此处 $\ln(t_0-a)$ 应按照前面那样来理解. 这样一来,我們得出

$$\Phi_0^+(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\varphi(a)\ln(t_0-a)+\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\Phi(t_0),$$

$$\Phi_0^-(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\varphi(a)\ln(t_0-a)+\varphi(a)-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\Phi(t_0),$$

由此, 和公式(22.7)作一比較, 并且在那些公式中把 $\ln(t_0-c)=\ln(t_0-a)$ 理解为和此处是同一个値,那么我們就导出

---

① 这个常数和对数項的选擇是有关的. 例如, 如果象在公式(13.4a)中那样选定对数項, 那么,这个常数等于 $-\frac{1}{2}\varphi(a)$.

② 我們指出, И. М. Мельник[1]~[3] 已經把这些命題推广到了将(22.1)换成 $\varphi(t)=\varphi^*(t)(t-c)^{-\gamma}\ln^p(t-c)$ (其中 p 为正整数)或者

$$\varphi(t)=\varphi^*(t)(t-c)^{-\gamma}\ln\ln(t-c)$$

的情形.

$$\Phi_0^+(t_0)=\Phi^*(t_0)+\frac{1}{2}\varphi(t_0),$$

$$\Phi_0^-(t_0)=\Phi^*(t_0)+\varphi(a)-\frac{1}{2}\varphi(t_0).$$

因为，依据命題 III，函数 $\Phi^*(t_0)$ 在 a 的邻域内是属于 H 类的，因此，如果在点 a 处給边值 $\Phi_0^+(t_0)$ 及 $\Phi_0^-(t_0)$ 以适当的值(亦就是，当 $t_0\to a$ 时，它們所取得的极限值)，那么，便可以使得这两个边值在这个邻域内亦是属于 H 类的. 由上面这些公式可以知道，这些极限値是相同的:

$$\lim_{t_0\to a}\Phi_0^+(t_0)=\lim_{t_0\to a}\Phi_0^-(t_0)=\Phi^*(a)+\frac{1}{2}\varphi(a),$$

这正象是从函数 $\Phi_0(z)$ 可以連續拓展到点 a 上所导出的一样.

我們当然亦可以直接从公式 (15.7) 及 (22.10) 导出所有这些結果. 我們进行上面这些簡单的推导，只是因为完全类似的推导亦可以应用于公式(22.5)，(22.8). 我們把最后的結果写成下述形式，而把这些簡单的推导留給讀者去做.

在 $\alpha=0$ 的情形下(亦就是，当 $\gamma=\alpha+i\beta=0$ 或者 $\gamma=i\beta$ 时)，出現在公式 (22.4)，(22.5) 中的函数 $\Phi_0(z)$ 在端点 c 附近可以从左側及右側連續拓展到 L 上以及这一个端点上；如果把 $\Phi_0^+(c)$ 及 $\Phi_0^-(c)$ 理解为函数 $\Phi_0(z)$ 当 $z\to c$ 时的边值 $\Phi_0(c)$，那么，这些函数的边值 $\Phi_0^+(t_0)$ 及 $\Phi_0^-(t_0)$ 在 L 上 c 的邻域内是属于 H 类的.

在 $\alpha>0$ 的情形下，函数

$$\Omega_0(z)=(z-c)^\gamma\Phi_0(z)$$

[其中 $\Phi_0(z)$ 所表示的与公式(22.5)中的一样]在端点 c 附近可以从左側及右側連續拓展到 L 上以及这一个端点上，并且 $\Omega_0(c)=0$；如果約定好規定 $\Omega_0^+(c)=\Omega_0^-(c)=0$，那么，边值 $\Omega_0^+(t_0)$ 及 $\Omega_0^-(t_0)$ 在 L 上 c 的邻域内是属于 H 类的.

4°. 在很多应用中，可以只討論 $\alpha>0$ 的情形，因为，如果 $\varphi(t)$ 具有形式(22.1)，那么，在有必要时，把 α 用稍大的量来替换后，

便可以认为 $0<\alpha<1$.

在这些条件下，命题 II 及 IV 可以用它們的推論来替代，我們把这些推論单独地叙述成命題的形式.

命題 V 对于和 c 足够接近而又不位在 L 上的点 z，在沿着 L 而割开的平面上 c 点附近是全純的函数

$$\Omega(z)=(z-c)^{\gamma}\Phi(z), \tag{22.11}$$

在端点 c 的邻域内可以从左侧及右侧連續拓展到 L 上以及端点 c 上；此时，如果用 A 表示当 $z\to c$ 时 $\Omega(z)$ 的极限，那么，在 c 附近，有

$$|\Omega(z)-A|\leqslant 常数\cdot|z-c|^{\varepsilon},\quad \varepsilon=常数>0. \tag{22.12}$$

对于位在 L 上的点 t_0，如果在点 c 处給函数

$$\Omega(t_0)=(t_0-c)^{\gamma}\Phi(t_0)$$

以适当的值 A_0，那么，$\Omega(t_0)$ 在 c 的邻域内是属于 H 类的.

如果不計較由命題 II 和 IV 可以給出 A 与 A_0 的明显表示式，那么这个命題便等价于命題 II 与 IV（当 $\alpha>0$ 时）的綜合.

我們还补充一点：如果在点 c 处让 $\Omega^+(t_0)$ 及 $\Omega^-(t_0)$ 都取值 $A=\Omega(c)$，那么，由前所述，边值 $\Omega^+(t_0)$ 及 $\Omega^-(t_0)$ 在 L 上 c 的邻域内是适合 H 条件的.

5°. 最后，我們来考察密度依賴于某个参数的情形. 亦就是，仍然假定 $L=ab$ 是一条光滑的敞开弧，考察积分

$$\Phi(t_0,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t,\tau)}{t-t_0}dt, \tag{22.13}$$

其中

$$\varphi(t,\tau)=\frac{\varphi^*(t,\tau)}{(t-c)^{\gamma}},\quad \gamma=\alpha+i\beta,\ 0<\alpha<1,\ c=a\ 或者\ b, \tag{22.14}$$

此处 α 与 β 都是实常数，它們中的第一个是适合上述不等式的，而 $\varphi^*(t,\tau)$ 表示 L 上点 t 和参数 τ（τ 的値属于某个集合 T）的函数，并且当 $t\in L$ 以及 $\tau\in T$ 时，$\varphi^*(t,\tau)$ 对两个变量 t 和 τ 是适合 H

条件的. 在这些条件下,下述命题成立.

命题 VI 当 $t_0 \in L'$, $\tau \in T$ 时,函数

$$\Omega(t_0, \tau) = (t_0 - c)^{\gamma} \Phi(t_0, \tau) \qquad (22.15)$$

对 t_0 及 τ 是适合 H 条件的, 此处 L' 表示弧 L 上的任意一部分, L' 与端点 c 是联接的,并且它和别的端点相隔一有限距离.

可以从命题 IV (或者命题 V) 得出有关变量 t_0 的結論; 关于 τ 的結論将在 § 25 (2° 段) 中加以証明.

§ 23. 續. 某些輔助估計式

在証明上一节中所叙述过的命题时, 我們需要用到某些有关积分 (22.3) 的輔助估計式,我們現在就推导这些估計式.

为了簡化(但是,是无关紧要的)某些叙述和推导,我們在此处假定,在这个积分号下的函数 $\varphi^*(t)$ 不仅在端点 c 的邻域內, 而且在整个弧 $L=ab$ 上是适合 H 条件的;因为, 我們所感兴趣的只是积分在点 c 邻域內的性质,因此,这样假定,显然不失一般性.

1°. 于是,利用上一节中的記号,我們考察积分(22.3)

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ab} \frac{\varphi^*(t)\,dt}{(t-c)^{\gamma}(t-z)}, \qquad (23.1)$$

$$\gamma = \alpha + i\beta, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \quad c = a \text{ 或者 } b,$$

假定 z 位在端点 c 的邻域內,我們要証明下述估計式(它比我們最終所要求的估計式要稍許粗糙些):

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{常数}}{|z-c|^{\nu}}, \qquad (23.2)$$

其中 ν 是任何一个使得 $\alpha < \nu < 1$ 的实数.

用 $\varphi^{**}(t)$ 表示和公式(22.1a)中同样的函数,我們就有

$$|z-c|^{\nu}\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ab} \frac{|z-c|^{\nu} - |t-c|^{\nu}}{|t-c|^{\alpha}(t-z)}\,\varphi^{**}(t)\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{ab} \frac{|t-c|^{\nu-\alpha}\varphi^{**}(t)\,dt}{t-z}.$$

因为，$|t-c|^{\nu-\alpha}\varphi^{**}(t)$ 在 c 的邻域内是属于 H 类的，并且当 $t=c$ 时它取值零，因此，右端第二个积分在 c 附近是保持有界的.

我們現在考察右端第一个积分(把它記作 I). 注意到

$$||z-c|^{\nu}-|t-c|^{\nu}|\leqslant|z-t|^{\nu},$$

我們便有

$$|I|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{ab}\frac{|\varphi^{**}(t)|ds}{|t-c|^{\alpha}|t-z|^{1-\nu}}.$$

令 $|t-c|=r$, $|z-c|=\delta$, 又若注意到 $|t-z|\geqslant|r-\delta|$, 并且假定弧 ab 是标准弧(这当然并不影响一般性)，那么利用公式(2.2)，我們便得出

$$|I|\leqslant\text{常数}\cdot\int_0^R\frac{dr}{r^{\alpha}|r-\delta|^{1-\nu}},$$

其中 $R=|b-a|$. 但是，再注意到 $1+\alpha-\nu<1$, 便容易断言，右端的积分是有界量[①]. 因此，便証明了不等式(23.2).

2°. 我們現在考察积分(23.1)的一个特殊形式，亦就是，积分

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{dt}{(t-c)^{\gamma}(t-z)},\quad\gamma=\alpha+i\beta,\ 0\leqslant\alpha<1,\ \gamma\neq0,\tag{23.3}$$

其中 $c=a$ 或者 b.

我們先假定 $c=a$. 依据 Сохоцкий-Plemelj 公式(§16)，对于 $L=ab$ 上任意一个异于端点的点 t_0, 我們有

$$\Omega^+(t_0)-\Omega^-(t_0)=(t_0-a)^{-\gamma}.$$

对于在沿着 $L=ab$ 而割开的平面上点 a 附近是单值的，并且在 L 之左側取値 $(t_0-a)^{-\gamma}$ 的函数 $(z-a)^{-\gamma}$, 我們显然有

① 为此，例如，只要把积分区間分成三部分

$$\left(0,\frac{\delta}{2}\right),\ \left(\frac{\delta}{2},\delta\right),\ (\delta,R),$$

并且在这些区間的每一个上，把 $r^{\alpha}|r-\delta|^{1-\nu}$ 换成較小的量，亦就是，分别用

$$r^{1+\alpha-\nu},\quad(\delta-r)^{1+\alpha-\nu},\quad(r-\delta)^{1+\alpha-\nu}$$

来替代，就够了. 因为这样一来，所得到的积分立可計算出来，并且可以看出，它們是有界的.

$$[(t_0-a)^{-\gamma}]^+ - [(t_0-a)^{-\gamma}]^- = (1-e^{-2\pi i\gamma})(t_0-a)^{-\gamma}.$$

因此，如果令

$$\omega(z) = \frac{(z-a)^{-\gamma}}{1-e^{-2\pi i\gamma}} = \frac{e^{i\gamma\pi}}{2i\sin\gamma\pi}(z-a)^{-\gamma},$$

那么，在 L 上点 a 的附近，有

$$[\Omega-\omega]^+ = [\Omega-\omega]^-.$$

再者，把估計式(23.2)应用于函数 $\Omega(z)$，并且注意到函数 $\omega(z)$ 的形式，我們有

$$|\Omega(z)-\omega(z)| < \frac{\text{常数}}{|z-a|^{\nu}}, \quad \nu<1.$$

从前面的結果，再依据在§10, 3°段中所述，便可以知道，如果函数 $\Omega(z)-\omega(z)$ 在 L 上取适当的值，那么，它在点 a 的邻域内是全純的，亦就是，在这一个邻域内，

$$\Omega(z) = \frac{e^{i\gamma\pi}}{2i\sin\gamma\pi}(z-a)^{-\gamma} + A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \cdots. \tag{23.4}$$

再者，对 L 上的 $z=t_0$，我們有

$$2\Omega(t_0) = \Omega^+(t_0) + \Omega^-(t_0),$$

容易看出，由此可以知道，对于 L 上点 a 的邻域内的 t_0，我們有

$$\Omega(t_0) = \frac{1}{2i}\operatorname{ctg}\gamma\pi\,(t_0-a)^{-\gamma} + A_0 + A_1(t_0-a) + A_2(t_0-a)^2 + \cdots. \tag{23.5}$$

当 $c=b$ 时，在点 b 的邻域内，完全类似地有

$$\Omega(z) = -\frac{e^{-i\gamma\pi}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot(z-b)^{-\gamma} + B_0 + B_1(z-b) + B_2(z-b)^2 + \cdots, \tag{23.6}$$

$$\Omega(t_0) = -\frac{1}{2i}\operatorname{ctg}\gamma\pi\cdot(t_0-b)^{-\gamma} + B_0 + B_1(t_0-b) + B_2(t_0-b)^2 + \cdots. \tag{23.7}$$

注釋 我們再指出一个簡单的并且和在§15注釋3中已推导

过的类似的估計式．正象在前面已約定好的那样，假定 $\varphi^*(t)$ 在整个弧 $L=ab$ 上是适合 H 条件的，我們在这一条弧上取两个点 c' 和 c''，考察积分

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c'c''}\frac{\varphi^*(t)dt}{(t-c)^{\gamma}(t-z)}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c'c''}\frac{\varphi^{**}(t)dt}{|t-c|^{\alpha}(t-z)},\quad \gamma=\alpha+i\beta,\ 0\leqslant\alpha<1,\quad (23.8)$$

它与积分(23.1)的区别仅在于：积分不是展布在整个弧 L 上的，而只是展布在 L 的一部分 $c'c''$ 上；c' 或者 c'' 与 a 或者 b 重合的情形并不例外．我們来証明：在上述条件下，对于位在弧 L 的邻域內所有的点 z，都有

$$|\Psi(z)|<\frac{\text{常数}}{|z-c|^{\nu}|z-c'|^{\varepsilon'}|z-c''|^{\varepsilon''}},\qquad(23.9)$$

其中 ν 是任何一个大于 α 的正常数，而 ε' 及 ε'' 都是任意(任意小的)正常数．

事实上，类似于 1° 段，我們有

$$|z-c|^{\nu}\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c'c''}\frac{|z-c|^{\nu}-|t-c|^{\nu}}{|t-c|^{\alpha}(t-z)}\varphi^{**}(t)dt$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{c'c''}\frac{|t-c|^{\nu-\alpha}\varphi^{**}(t)dt}{t-z}.$$

正象在 1° 段中估計积分 I 那样，容易估出右端的第一个积分，并且証实它是有界的．对第二个积分应用估計式(15.11)，便导致估計式(23.9)．

估計式(23.9)显然对于位在 L 上的点 $z=t_0$ 都是适用的，因此，

$$|\Psi(t_0)|<\frac{\text{常数}}{|t_0-c|^{\nu}|t_0-c'|^{\varepsilon'}|t_0-c''|^{\varepsilon''}}.\qquad(23.9\text{a})$$

如果 $\varphi^*(t)$ 不是在整个弧 ab 上而只是在它的某一部分(它和端点 c 是联結的)上适合 H 条件，那么，上述估計式显然对下列情形亦是适用的：当 c' 及 c'' 与 c 足够接近，同时 z 位在弧 L 的某一部分(这一部分联結 c 又包含弧 $c'c''$) 的邻域內时的情形．

§24. 續. 命題 II 的証明

利用§22中的記号，我們有

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\varphi^*(t)\,dt}{(t-c)^{\gamma}\,(t-z)},\tag{24.1}$$

其中 $\varphi^*(t)$ 在 c 的邻域内是属于 H 类的(而 c 表示 a 或者 b).

在 $\alpha=0$, $\gamma=i\beta\neq 0$ 的情形下，可把上述公式改写成

$$\Phi(z)=\frac{\varphi^*(c)}{2\pi i}\int_{ab}\frac{dt}{(t-c)^{\gamma}\,(t-z)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{[\varphi^*(t)-\varphi^*(c)]\,(t-c)^{-i\beta}}{t-z}\,dt.\tag{24.2}$$

因为，$[\varphi^*(t)-\varphi^*(c)]\,(t-c)^{-i\beta}$ 在 c 的邻域内是属于 H 类的①，并且它在 $t=c$ 处取値零，因此，在 c 附近，右端第二个积分是有界函数，它当 $z\to c$ 时趋于确定的极限. 而第一个积分的性质由上一节中的公式(23.4)及(23.6)确定，由此就导出在 $\alpha=0$ 的情形下的公式(22.5).

我們来研究 $\alpha>0$ 的情形(应該提醒一下，$\alpha<1$)，我們把 $\Phi(z)$ 表成

$$\Phi(z)=\frac{\varphi^*(c)}{2\pi i}\int_{ab}\frac{dt}{(t-c)^{\gamma}\,(t-z)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\varphi^*(t)-\varphi^*(c)}{(t-c)^{\gamma}\,(t-z)}\,dt.$$

第一項在 c 附近的性质由公式(23.4)，(23.6)确定. 第二項中的被积函数可以改写成

$$\frac{[\varphi^*(t)-\varphi^*(c)]\,(t-c)^{-\varepsilon}}{(t-c)^{\gamma-\varepsilon}(t-z)},$$

其中 ε 为如此足够小的正数，使得分子在 c 的邻域内仍然是适合 H 条件的. 現在把估計式(23.2)应用于所考慮的第二項，并且选取适合不等式 $\alpha-\varepsilon<\nu<\alpha$ 的任意一个数 ν 当作 $\nu=\alpha_0$，我們便可以断言，在 $\alpha>0$ 的情形下，公式(22.5)亦是正确的. 这样一来，便証明了命題 II.

---

① 参看§6.

§ 25. 續. 命題 IV 和 VI 的証明

我們剩下要証明的是 § 22 中的命題 IV 与 VI.

1° 我們来証明命題 IV. 在 $\alpha=0$ 的情形下，它可以直接从下述公式得出:

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\varphi^*(t)(t-c)^{-i\beta}dt}{t-t_0}$$
$$=\frac{\varphi^*(c)}{2\pi i}\int_{ab}\frac{(t-c)^{-i\beta}dt}{t-t_0}$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{[\varphi^*(t)-\varphi^*(c)](t-c)^{-i\beta}dt}{t-t_0}, \tag{25.1}$$

这是由于: 右端第一項在 c 附近的性质由公式(23.5)或者(23.7)确定，而第二項中被积函数的分子在 c 的邻域内是适合 H 条件的，并且当 $t=c$ 时，它取値零.

剩下要考虑的是 $\alpha>0$ 的情形. 为了确定起見，假定 $c=a$ (可以类似地研究 $c=b$ 的情形)，我們令

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\varphi^*(t)dt}{(t-a)^{\gamma}(t-t_0)}$$
$$=\frac{\varphi^*(a)}{2\pi i}\int_{ab}\frac{dt}{(t-a)^{\gamma}(t-t_0)}+\Psi^*(t_0), \tag{25.2}$$

其中

$$\Psi^*(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\psi(t)dt}{(t-a)^{\gamma}(t-t_0)}, \tag{25.3}$$

$$\psi(t)=\varphi^*(t)-\varphi^*(a). \tag{25.4}$$

由公式(23.5)可以知道，(25.2)右端的第一項具有已証明过的公式(22.8)右端的形式. 再者，由于 $\psi(a)=0$, 故从公式(22.5)及(22.6)[在其中，我們現在用 $\Psi^*(z)$ 及 $\psi(t)$ 替代 $\Phi(z)$ 及 $\varphi^*(t)$]可以知道，当 $t_0\to a$ 时①，$(t_0-a)^{\gamma}\Psi^*(t_0)\to 0$. 因此，如果能証明:

① 为了能把公式 (22.5) 应用到 $z=t_0$ 位在弧 ab 上的情形，只需注意 $\Phi(t_0)=\frac{1}{2}[\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0)]$ 就够了.

函数

$$\Psi(t_0)=(t_0-a)^\gamma\Psi^*(t_0)=\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\psi(t)dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}\quad(25.5)$$

(当約定好认为 $\Psi(a)=0$ 时) 在点 a 的邻域内是属于 H 类的，公式(22.8)便可以得到証明. 事实上，此时我們有

$$\Psi^*(t_0)=\frac{\Psi(t_0)}{(t_0-a)^\gamma}=\frac{\Psi(t_0)-\Psi(a)}{(t_0-a)^\gamma},$$

因此，函数 $\Psi^*(t_0)$ 具有在已証明过的公式(22.8)右端中出現的函数 $\Phi^*(t_0)$ 的形式.

在这一段的其余部分中，我們致力于証明：在 a 的邻域内，函数 $\Psi(t_0)$ 是属于 H 类的. 不失一般性，我們可以认为 ab 是标准弧，$\psi(t)$ 在整个弧 ab 上是属于 H 类的.

我們有

$$\Psi(t_0)=\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}dt+\frac{\psi(t_0)(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int_{ab}\frac{dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}.$$

由公式(23.5)可以知道，上式右端第二項在 a 的邻域内是属于 H 类的.

我們来考察第一項

$$\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}dt$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{[\psi(t)-\psi(t_0)][(t_0-a)^\gamma-(t-a)^\gamma]}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0}dt.$$

但是，因为 $\psi(a)=0$，因此，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0}dt$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\psi(t)dt}{t-t_0}-\frac{\psi(t_0)}{2\pi i}\left\{\ln\frac{t_0-b}{t_0-a}+\text{常数}\right\}$$

在 a 的邻域内是属于 H 类的.

剩下要研究的是积分

$$\Omega(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{[\psi(t)-\psi(t_0)][(t_0-a)^\gamma-(t-a)^\gamma]dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}.$$

我們有

$$\Omega(t_0+h)-\Omega(t_0)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\left\{\frac{[(t_0+h-a)^\gamma-(t-a)^\gamma][\psi(t)-\psi(t_0+h)]}{(t-a)^\gamma(t-t_0-h)}\right.$$

$$\left.-\frac{[(t_0-a)^\gamma-(t-a)^\gamma][\psi(t)-\psi(t_0)]}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}\right\}dt. \qquad (25.6)$$

我們将用从 a 量起的弧坐标 s 来确定 t 在 ab 上的位置,假定点 b 所对应的弧坐标是 $s=s_b$, 点 t_0 与 t_0+h 分别对应的弧坐标是 s_0 与 $s_0+\sigma$; 不失一般性, 显然可以认为 $\sigma>0$, 此外, 还可以认为 $2\sigma<s_b-s_0$ (因为我們所感兴趣的只是 a 点的邻域).

我們用 t_2 表示与 $s_2=s_0+2\sigma$ 对应的点,当 $s_0-2\sigma>0$ 时,我們就用 t_1 表示与 $s_1=s_0-2\sigma$ 对应的点,或者当 $s_0-2\sigma\leqslant 0$ 时,我們就用点 a 表示与 s_1 对应的点.

把积分 (25.6) 分成两个积分之和 I_0+I: I_0 是展布在部分 $l=t_1t_2$ 上的积分, I 是展布在其余部分 $ab-t_1t_2=l'$ 上的积分,因此,

$$\Omega(t_0+h)-\Omega(t_0)=I_0+I. \qquad (25.7)$$

注意到, $(t-a)^\gamma=(t-a)^{\alpha+i\beta}$ 是适合 $H(\alpha)$ 条件的 (§6, 3° 段),我們便有

$$|(t-a)^\gamma-(t_0-a)^\gamma|\leqslant 常数\cdot|t-t_0|^\alpha. \qquad (25.8)$$

因此,如果 λ 是 $\psi(t)$ 所适合的 H 条件的指数,那么,有

$$|I_0|\leqslant 常数\left\{\int_l\frac{ds}{|t-a|^\alpha|t-t_0-h|^{1-\alpha-\lambda}}+\int_l\frac{ds}{|t-a|^\alpha|t-t_0|^{1-\alpha-\lambda}}\right\}$$

$$\leqslant 常数\left\{\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{s^\alpha|s-s_0-\sigma|^{1-\alpha-\lambda}}+\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{s^\alpha|s-s_0|^{1-\alpha-\lambda}}\right\};$$

我們提醒一下, $s_1=s_0-2\sigma$ 或 0, $s_2=s_0+2\sigma$.

做变量置换 $s=s_0+\sigma\rho$，其中 ρ 是新的积分变量，就容易断言，

$$|I_0|\leqslant 常数\cdot\sigma^{\lambda}. \tag{25.9}$$

轉到討論展布在 $l'=ab-t_1t_2$ 上的积分 I，我們現在把它改写成

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{l'}\left\{\frac{(t_0+h-a)^{\gamma}-(t-a)^{\gamma}}{(t-a)^{\gamma}(t-t_0-h)}\right.$$
$$\left.-\frac{(t_0-a)^{\gamma}-(t-a)^{\gamma}}{(t-a)^{\gamma}(t-t_0)}\right\}[\psi(t)-\psi(t_0+h)]dt$$
$$+\frac{\psi(t_0)-\psi(t_0+h)}{2\pi i}\int_{l'}\frac{(t_0-a)^{\gamma}-(t-a)^{\gamma}}{(t-a)^{\gamma}(t-t_0)}dt. \tag{25.10}$$

容易估算后面的一个积分；亦就是，注意到(25.8)，我們就得出

$$\left|\int_{l'}\frac{(t_0-a)^{\gamma}-(t-a)^{\gamma}}{(t-a)^{\gamma}(t-t_0)}dt\right|\leqslant 常数\cdot\int_{l'}\frac{ds}{s^{\alpha}|s-s_0|^{1-\alpha}}$$
$$=常数\left\{\int_0^{s_1}\frac{ds}{s^{\alpha}(s_0-s)^{1-\alpha}}+\int_{s_2}^{s_b}\frac{ds}{s^{\alpha}(s-s_0)^{1-\alpha}}\right\}; \tag{25.11}$$

如果 $s_0-2\sigma\leqslant 0$，那么，右端第一个积分便不出現．当 $s_1=s_0-2\sigma>0$ 时，作变量置換 $s=s_0\rho$，我們便得出

$$\int_0^{s_1}\frac{ds}{s^{\alpha}(s_0-s)^{1-\alpha}}=\int_0^{1-\frac{2\sigma}{s_0}}\frac{d\rho}{\rho^{\alpha}(1-\rho)^{1-\alpha}}$$
$$\leqslant\int_0^1\frac{d\rho}{\rho^{\alpha}(1-\rho)^{1-\alpha}}=常数.$$

对充分小的 σ，在 (25.11) 右端第二个积分中，作变量置换 $s=s_0+2\sigma\rho$ 后，給出

$$\int_{s_2}^{s_b}\frac{ds}{s^{\alpha}(s-s_0)^{1-\alpha}}=\int_1^{\frac{s_b-s_0}{2\sigma}}\frac{d\rho}{\left(\rho+\frac{s_0}{2\sigma}\right)^{\alpha}\rho^{1-\alpha}}$$
$$\leqslant\int_1^{\frac{s_b-s_0}{2\sigma}}\frac{d\rho}{\rho}=\ln\frac{s_b-s_0}{2\sigma}<常数\cdot|\ln\sigma|.$$

这样一来，(25.10) 右端的第二項将不超过常数与 $|\ln\sigma|\sigma^{\lambda}$ 之乘积，从而它更不会超过常数与 $\sigma^{\lambda-\varepsilon}$ 之乘积，其中 ε 是任意取定的正数．

現在我們估計 (25.10) 中右端的第一項，我們把它写成和式 I_1+I_2 的形式，其中

$$I_1=\frac{(t_0+h-a)^\gamma-(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int_L\frac{\psi(t)-\psi(t_0+h)}{(t-a)^\gamma(t-t_0-h)}dt,$$

$$I_2=\frac{h}{2\pi i}\int_L\frac{[\psi(t)-\psi(t_0+h)][(t_0-a)^\gamma-(t-a)^\gamma]dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0-h)(t-t_0)}.$$

我們有

$$|I_1|\leqslant 常数\cdot\sigma^\alpha\left\{\int_0^{s_1}\frac{ds}{s^\alpha(s_0+\sigma-s)^{1-\lambda}}+\int_{s_2}^{s_b}\frac{ds}{s^\alpha(s-s_0-\sigma)^{1-\lambda}}\right\},$$

并且当 $s_0-2\sigma\leqslant 0$ 时，第一个积分不出現.

如果 $\lambda\geqslant\alpha$，那么，正象在估算(25.11)的右端时那样，我們容易得出，当 $\lambda>\alpha$ 时，包含在花括弧中的表示式是有界的，当 $\lambda=\alpha$ 时，这个表示式不超过常数与 $|\ln\sigma|$ 之乘积；因此，当 $\lambda\geqslant\alpha$ 时，

$$|I_1|\leqslant 常数\cdot\sigma^{\alpha-\varepsilon},$$

其中 ε 为任意取定的正常数(当 $\lambda>\alpha$ 时，可以取 $\varepsilon=0$).

如果 $\lambda<\alpha$，那么，在做了象估算表示式(25.11)时所作的那样变量置換以后，(对第一个积分在 $s_0>2\sigma$ 的情形下①)我們便得出

$$\int_0^{s_1}\frac{ds}{s^\alpha(s_0+\sigma-s)^{1-\lambda}}=\frac{1}{s_0^{\alpha-\lambda}}\int_0^{1-\frac{2\sigma}{s_0}}\frac{d\rho}{\rho^\alpha\left(1+\frac{\sigma}{s_0}-\rho\right)^{1-\lambda}}$$

$$\leqslant\frac{1}{s_0^{\alpha-\lambda}}\int_0^1\frac{d\rho}{\rho^\alpha(1-\rho)^{1-\lambda}}<常数\cdot\sigma^{\lambda-\alpha},$$

$$\int_{s_2}^{s_b}\frac{ds}{s^\alpha(s-s_0-\sigma)^{1-\lambda}}=\frac{1}{(2\sigma)^{\alpha-\lambda}}\int_1^{\frac{s_b-s_0}{2\sigma}}\frac{d\rho}{\left(\rho+\frac{s_0}{2\sigma}\right)^\alpha\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^{1-\lambda}}$$

$$<\frac{1}{(2\sigma)^{\alpha-\lambda}}\int_1^\infty\frac{d\rho}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^{1+\alpha-\lambda}}=常数\cdot\sigma^{\lambda-\alpha}.$$

这样一来，当 $\lambda<\alpha$ 时，我們得出

$$|I_1|\leqslant 常数\cdot\sigma^\lambda.$$

① 因为当 $s_0\leqslant 2\sigma$ 时，这个积分便消失.

最后，我們轉到估計 I_2. 我們有

$$|I_2| \leqslant \text{常数}\cdot \sigma\left\{\int_0^{s_1} \frac{ds}{s^\alpha (s_0+\sigma-s)^{1-\lambda}(s_0-s)^{1-\alpha}} + \int_{s_2}^{s_b} \frac{ds}{s^\alpha (s-s_0-\sigma)^{1-\lambda}(s-s_0)^{1-\alpha}}\right\};$$

当 $s_0 \leqslant 2\sigma$ 时，第一个积分便消失.

在做了同前面情形中所做过的同样的变量置换以后，我們便得出

$$\int_0^{s_1} \frac{ds}{s^\alpha (s_0+\sigma-s)^{1-\lambda}(s_0-s)^{1-\alpha}} = \frac{1}{s_0^{1-\lambda}} \int_0^{1-\frac{2\sigma}{s_0}} \frac{d\rho}{\rho^\alpha \left(1+\frac{\sigma}{s_0}-\rho\right)^{1-\lambda}(1-\rho)^{1-\alpha}}.$$

再提醒一下，在这里我們应当假定 $\frac{\sigma}{s_0}<\frac{1}{2}$，我們現在分别考虑两种情形：$\frac{\sigma}{s_0}>\frac{1}{4}$ 和 $\frac{\sigma}{s_0}\leqslant\frac{1}{4}$.

在第一种情形下，后一个积分不超过积分

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\rho}{\rho^\alpha (1-\rho)^{2-\lambda-\alpha}} = \text{常数};$$

在第二种情形下，它不超过积分

$$\int_0^{1-\frac{2\sigma}{s_0}} \frac{d\rho}{\rho^\alpha (1-\rho)^{2-\lambda-\alpha}} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\rho}{\rho^\alpha (1-\rho)^{2-\lambda-\alpha}} + 2^\alpha \int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{2\sigma}{s_0}} \frac{d\rho}{(1-\rho)^{2-\lambda-\alpha}};$$

右端第一个积分是一个有限数，而右端第二个积分立可算出，易見它不超过

$$\text{常数}\cdot\left(\frac{\sigma}{s_0}\right)^{\lambda+\alpha-1} \quad (\text{当 } \lambda+\alpha<1),$$

$$\text{常数}\cdot\left|\ln\frac{\sigma}{s_0}\right| \quad (\text{当 } \lambda+\alpha=1),$$

而且当 $\lambda+\alpha>1$ 时，这个积分是保持有界的.

綜合上面的不等式,容易断言,在所有的情形下,都有

$$\sigma\int_0^{s_1}\frac{ds}{s^\alpha(s_0+\sigma-s)^{1-\lambda}(s_0-s)^{1-\alpha}}\leqslant\text{常数}\cdot\sigma^{\lambda-\varepsilon},$$

其中 ε 为任意取定的正常数.

再者,

$$\sigma\int_{s_1}^{s_b}\frac{ds}{s^\alpha(s-s_0-\sigma)^{1-\lambda}(s-s_0)^{1-\alpha}}$$

$$=\frac{\sigma^\lambda}{2^{1-\lambda}}\int_1^{\frac{s_b-s_0}{2\sigma}}\frac{d\rho}{\left(\rho+\frac{s_0}{2\sigma}\right)^\alpha\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^{1-\lambda}\rho^{1-\alpha}}$$

$$\leqslant\frac{\sigma^\lambda}{2^{1-\lambda}}\int_1^{\frac{s_b-s_0}{2\sigma}}\frac{d\rho}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^{2-\lambda}};$$

計算出最后一个积分以后,便可以断言,

$$\sigma\int_{s_1}^{s_b}\frac{ds}{s^\alpha(s_0+\sigma-s)^{1-\lambda}(s-s_0)^{1-\alpha}}\leqslant\text{常数}\cdot\sigma^{\lambda-\varepsilon},$$

其中 ε 是任意取定的正常数(当 $\lambda<1$ 时,可以假定 $\varepsilon=0$).

綜合上面的估計式,我們便得出估計式

$$|I|\leqslant\text{常数}\cdot\sigma^{\mu-\varepsilon},\tag{25.12}$$

其中 $\mu=\min(\sigma,\lambda)$,而 ε 是(任意小的)正常数.

不等式(25.9)及(25.12)便証明了所要証的命題.

2°. 我們轉到証明 §22 中的命題 VI. 利用 §18, 3° 段中在証明类似的命題时所用过的同样的方法,便可以証明这个命題.

为了确定起見,我們假定 $c=a$,因此,我們可以把 L' 理解为当 b' 不和 b 重合的条件下构成 ab 之一部分的任意一条弧 ab'. 再者,不失一般性,我們可以假定弧 ab 是标准弧. 我們再提醒一下,我們只要証明,函数 $\Omega(t_0,\tau)$ 对变量 τ 适合 H 条件,就够了.

我們有

$$\Omega(t_0, \tau+h)-\Omega(t_0, \tau)=\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\varphi(t, \tau+h)-\varphi(t, \tau)}{t-t_0}dt$$

$$=\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}$$

$$\cdot\int_{ab}\frac{[\varphi^*(t, \tau+h)-\varphi^*(t_0, \tau+h)]-[\varphi^*(t, \tau)-\varphi^*(t_0, \tau)]}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}dt$$

$$+[\varphi^*(t_0, \tau+h)-\varphi^*(t_0, \tau)]\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int_{ab}\frac{dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}. \tag{25.13}$$

由于(23.5)，右端的后一项按模不超过常数与$|h|^\nu$之乘积，此处ν是函数$\varphi^*(t, \tau)$对变量τ所适合的H条件之指数．剩下要討論的是右端的第一项，亦就是，

$$I=\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}$$

$$\cdot\int_{ab}\frac{[\varphi^*(t, \tau+h)-\varphi^*(t_0, \tau+h)]-[\varphi^*(t, \tau)-\varphi^*(t_0, \tau)]dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}. \tag{25.14}$$

我們引进記号$|h|=\sigma$，我們用由点a量起的弧坐标s与s_0来确定ab上的点t与t_0之位置．我們分別考虑两种情形：$s_0\leqslant 2\sigma$及$s_0>2\sigma$．

在第一种情形($s_0\leqslant 2\sigma$)下，我們要利用到函数$\varphi^*(t, \tau)$对变量t适合H条件．用λ表示对应的指数，我們便有(提醒一下，$\gamma=\alpha+i\beta$, $0<\alpha<1$)

$$|I|\leqslant 常数\cdot s_0^\alpha\int_0^{s_b}\frac{ds}{s^\alpha|s-s_0|^{1-\lambda}},$$

其中s_b表示点b的弧坐标．作变量置换$s=s_0\rho$，我們便容易断言(与§51作一比較)，

$$|I|\leqslant 常数\cdot\sigma^{\mu-\varepsilon}=常数\cdot|h|^{\mu-\varepsilon},$$

其中$\mu=\min(\alpha, \lambda)$，而$\varepsilon$为任意小的正常数．

剩下要考虑的是情形$s_0>2\sigma$．在这一种情形下，我們把

(25.14)右端的积分表成三个积分的和的形式

$$I=I_1+I_2+I_3,$$

其中 I_1、I_2 及 I_3 分别是从 0 积到 $s_0-\sigma$、从 $s_0-\sigma$ 积到 $s_0+\sigma$ 及从 $s_0+\sigma$ 积到 s_b 的积分.

用 b_1 表示弧坐标 $s_0-\sigma$ 所对应的点，我們就有

$$I_1=\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int_{ab_1}\frac{[\varphi^*(t,\ \tau+h)-\varphi^*(t,\ \tau)]dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}$$

$$-[\varphi^*(t_0,\tau+h)-\varphi^*(t_0,\tau)]\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int_{ab_1}\frac{dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}.$$

依据(23.9a)[①]容易看出，第二项按模不超过常数与 $|h|^{\nu-\varepsilon}$ 之乘积，其中 ε 是任意小的正常数. 用 I_1' 表示第一项；我們有

$$|I_1'|\leqslant 常数\cdot|h|^\nu\cdot s_0^\alpha\int_0^{s_0-\sigma}\frac{ds}{s^\alpha(s_0-s)}.$$

作变量置换 $s=s_0\rho$，并且注意到 $s_0>2\sigma$，我們便得出

$$|I_1'|\leqslant 常数\cdot|h|^\nu\int_0^{1-\frac{\sigma}{s_0}}\frac{d\rho}{\rho^\alpha(1-\rho)}$$

$$=常数\cdot|h|^\nu\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{d\rho}{\rho^\alpha(1-\rho)}+\int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{\sigma}{s_0}}\frac{d\rho}{\rho^\alpha(1-\rho)}\right\},$$

由此容易断言，$|I_1'|\leqslant$ 常数$\cdot|h|^{\nu-\varepsilon}$，其中 ε 是任意小的正常数，因此，

$$|I_1|\leqslant 常数\cdot|h|^{\nu-\varepsilon}.$$

正好同样地可以估計 I_3. 剩下要估計的是 I_2. 我們有

$$|I_2|\leqslant 常数\cdot s_0^\alpha\int_{s_0-\sigma}^{s_0+\sigma}\frac{ds}{s^\alpha|s-s_0|^{1-\lambda}}.$$

作变量置换 $s=s_0+\sigma\rho$，便得出

$$|I_2|\leqslant 常数\cdot|h|^\lambda\int_{-1}^{+1}\frac{d\rho}{\left(1+\frac{\sigma\rho}{s_0}\right)^\alpha|\rho|^{1-\lambda}},$$

① 在我們的情形下，在公式(23.9a)中，$c=c'=a$，$c''=b$.

由此，注意到 $\frac{\sigma}{s_0}<\frac{1}{2}$，就容易断言，

$$|I_2|\leqslant 常数\cdot|h|^\lambda.$$

綜合已得出的各个估計式，我們便导致所要証明的結論．

§26. Cauchy型积分在逐段光滑的积分曲綫之結点附近的性質①

在这一节中，我們要考察有关 Cauchy 型积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \tag{26.1}$$

在积分曲綫 L(我們現在假定它是一条逐段光滑曲綫)結点附近的性質的問題．我們把那些在几何意义下不是結点，而密度 $\varphi(t)$ 在那里成为不連續的点亦认为是結点；我們总假定这样的点之个数是有限个．这样一来，下面所得出的結果亦包括了当 L 是一条在几何意义下光滑的曲綫，而 $\varphi(t)$ 具有有限个确定类型的間断点的那种情形．

在研究結点附近的性質之前，我們在已知方面对 §22 中的結果先作一些注釋．

1° 我們从証明下述和 §21 中定理有着紧密联系的輔助命題入手．

假定 $L=ab$ 是一条光滑的敞开弧，假定 $\omega(z)$ 是在沿着 L 而割开的平面上 a 点的某个邻域內全純的函数，它在这个邻域內可

---

① 最近 W. Pogorzelski 发表了一系列有价値的論文 (W. Pogorzelski 的論文[2]～[7]) (后面的两篇論文发表在本书这一版向出版社交稿以后)，在这些論文中亦研究了 Cauchy 型积分在光滑的敞开积分曲綫以及逐段光滑的积分曲綫 (用我們的术語来讲) 情形下的性質．这位著者在 L 上引进了某些函数类，这些类都是 H^* 类 (用我們的記号来表示) 的子类，它們合起来就是 H^* 类．与此同时，从已知的观点来看，他給出了描述 Cauchy 型积分在积分曲綫上及其附近的性質更为精确一些的討論．W. Pogorzelski 的其余結果在很多方面和这一节中所叙述的結果是类似的；此处所讲到的結果，我在几年以前便得出了，可是在这里才第一次发表它們．这些結果差不多是曾发表在本书第一版中前几节所叙述的結果之直接推論．

以从左侧及右侧連續拓展到L上，亦可以連續拓展到点a上，又假定边值$\omega^+(t)$及$\omega^-(t)$在弧L包含在这一个邻域内的部分上是适合$H(\mu)$条件的，且$0<\mu<1$①.

另外，还假定弧ab在端点a处可以用光滑弧$a'a$向外作稍許延长(例如，用切綫段当作$a'a$)，并且使得延长而得的、包含弧$L=ab$的弧$L'=a'ab$是光滑的(图 13).

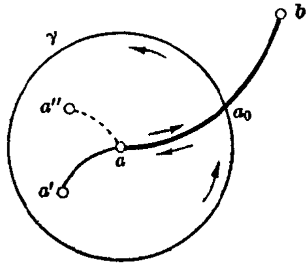


图 13

在上述条件下，函数$\omega(z)$在点a的邻域内可以从左侧及右侧連續拓展到L'上，并且边值$\omega^+(t)$及$\omega^-(t)$在这一个邻域内在L'上(而不仅在L上)是适合$H(\mu)$条件的.

事实上，以a为中心作一半徑为足够小的圓周γ，使得这个圓周整个地位在所考虑的邻域内，并且可以使它与L恰好相交于一点a_0. 依据 Cauchy 公式(現在把它应用到由圓周γ所圍成的并且沿着弧aa_0而割开的圓上)，对于位在γ内部而不在弧aa_0上的点z，我們都有

$$\omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\omega(t)\,dt}{t-z},$$

其中Γ表示从正方向来描繪的所考虑的已割开圓域之边界. 这条边界(图 13)是由下列几部分构成的：沿aa_0方向描繪的割綫之左边，沿反时針方向描繪的圓周γ，和沿a_0a方向描繪的割綫之右边. 我們用$\omega(t)$表示函数$\omega(z)$在Γ上所取的边值；特别是，在割綫aa_0之左边及右边，应该把$\omega(t)$分别理解为$\omega^+(t)$及$\omega^-(t)$. 这样一来，

$$\omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{aa_0}\frac{[\omega^+(t)-\omega^-(t)]\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\omega(t)\,dt}{t-z}.$$

---

① 我們取$\mu<1$，为的是不单独讲$\mu=1$的情形.

因为，右端第二个积分在点 a 的邻域内是全純的函数，因此，剩下要考虑的是积分

$$\omega_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{aa_0}\frac{[\omega^+(t)-\omega^-(t)]dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{a'aa_0}\frac{\psi(t)dt}{t-z},$$

其中 $\psi(t)=\omega^+(t)-\omega^-(t)$（当 t 在弧 aa_0 上时），$\psi(t)=0$（当 t 在延伸出来的弧 $a'a$ 上时）．因为，由函数 $\omega(z)$ 可以連續拓展到点 a 上的条件可以知道，当 t 在 L 上趋于 a 时，$\omega^+(t)-\omega^-(t)\to 0$，同时，由于按条件，$\omega^+(t)$ 及 $\omega^-(t)$ 在 L 上点 a 的邻域内是属于 $H(\mu)$ 类的，因此，函数 $\psi(t)$ 在 L' 上是属于 $H(\mu)$ 类的，并由此再依据 Plemelj–Привалов 定理，便导出上述的結果．

从剛才証明过的命题，依据 § 21 的注釋 2 还可以导出：在上述条件下，对于在点 a 的邻域内，同时位在 $L'=a'ab$ 的左侧或者右側的任意两个点 z_1 与 z_2，不等式

$$|\omega(z_2)-\omega(z_1)|\leqslant 常数\cdot|z_2-z_1|^{\mu} \tag{26.2}$$

成立．

当 z 在 L 上时，如果把 $\omega(z)$ 理解为从适当的一側而取得的边值，那么，当点 z_1 与 z_2（两者同时或有一个）在 L 上时，这个不等式显然亦是成立的．

上述不等式指出，特别是，函数 $\omega(z)$ 在点 a 的邻域内每一条光滑弧 aa'' 上是适合 $H(\mu)$ 条件的，此处弧 aa'' 是从点 a 引出的，并且位在沿着 L 而割开的平面上（如图 13 所示）．如果把弧 aa'' 看成是整个地位在弧 $L'=a'ab$ 的左邻域或者右邻域内（只要适当地选擇弧 $a'a$，这总是可能的），那么便不难証实这一点．

显然，上面所讲过的結果，当把端点 a 改为端点 b 以后的情形亦是适用的．

2°. 回到 § 22 中的命题，我們可以假定，在积分 (26.1) 中，$L=ab$ 表示一光滑的敞开弧，在 § 22 中的記号下，有

$$\varphi(t)=\frac{\varphi^*(t)}{(t-c)^{\gamma}},\ \gamma=\alpha+i\beta,\ 0\leqslant\alpha<1;\ c=a\ 或者\ b. \tag{26.3}$$

我們提醒一下，积分(26.1)在沿着L而割开的平面上点c附近的性质，由公式(22.4)，(22.5)：

$$\Phi(z)=\mp\frac{\varphi(c)}{2\pi i}\ln(z-c)+\Phi_0(z),\quad 当\ \gamma=0\ 时, \tag{26.4}$$

及

$$\Phi(z)=\pm\frac{e^{\pm\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\frac{\varphi^*(c)}{(z-c)^\gamma}+\Phi_0(z),\ 当\ \gamma\neq0\ 时 \tag{26.5}$$

确定．当$c=a$时，取上面的符号，当$c=b$时，取下面的符号．把$\ln(z-c)$理解为在沿着L而割开的平面上端点c附近是全純的任意一个分枝；把$(z-c)^\gamma$理解为在这同一个区域内是全純的、并且在L的左边取值$(t-c)^\gamma$的那一个分枝，而$(t-c)^\gamma$则出現在公式(26.3)之中①．在公式(26.4)右端中的$\Phi_0(z)$表示一个在已割开的平面上点c附近是全純的函数，它可以从左側及右側連續拓展到c附近的L上，亦可以連續拓展到点c上；边值$\Phi_0^+(t)$及$\Phi_0^-(t)$在L上点c的邻域内是属于H类的(§22, 3°段)．公式(26.5)右端中的函数$\Phi_0(z)$(当$\alpha=0$时)及乘积$\Omega_0(z)=(z-c)^\gamma\Phi_0(z)$(当$\alpha>0$时)亦具有同样的性质，并且$\Omega_0(c)=0$.

从这一节1°段中所指出的結果，可以导出，当$\alpha=0$时，公式(26.4)或者公式(26.5)右端中的函数$\Phi_0(z)$，在点c的邻域内每一条光滑弧cc'上是属于H类的，此处弧cc'是在沿着L而割开的平面上从点c所引出的．在$\alpha>0$的情形下，函数$(z-c)^\gamma\Phi_0(z)=\Omega_0(z)$亦具有同样的性质．因为，在后面这个情形下，$\Omega_0(c)=0$，因此，我們显然有

$$\Phi_0(z)=\frac{\Omega_0(z)-\Omega_0(c)}{(z-c)^\gamma}=\frac{\Phi_{00}(z)}{|z-c|^{\alpha_0}}, \tag{26.6}$$

其中α_0是小于α的某个正常数，而$\Phi_{00}(z)$是在c的邻域内在任意一条光滑弧cc'上适合H条件的函数，而弧cc'是在沿着L而割

① 我們提醒一下，依据$(t-c)^\gamma$在L上是連續变化的条件(当$\alpha=0$, $\beta\neq0$时，点c应除外)，当然可以任意地选定在公式(26.3)中出現的$(t-c)^\gamma$在L上的值．

开的平面上从点 c 所引出的.

最后,我們提醒一下,积分(26.1)在积分曲綫 $L=ab$ 上端点 c 的邻域內之性质由公式(22.7),(22.8):

$$\Phi(t_0)=\mp\frac{\varphi(c)}{2\pi i}\ln(t_0-c)+\Phi^*(t_0),\quad 当\ \gamma=0\ 时 \qquad (26.7)$$

及

$$\Phi(t_0)=\pm\frac{\operatorname{ctg}\gamma\pi}{2i}\cdot\frac{\varphi^*(c)}{(t_0-c)^\gamma}+\Phi^*(t_0),\quad 当\ \gamma\neq0\ 时 \quad (26.8)$$

确定,此处当 $c=a$ 时,取上面的符号,当 $c=b$ 时,取下面的符号;在公式(26.7)中的函数 $\Phi^*(t_0)$ 以及当 $\alpha=0$ 时也在公式(26.8)中的函数 $\Phi^*(t_0)$ 在 c 的邻域內是属于 H 类的;当 $\alpha>0$ 时,

$$\Phi^*(t_0)=\frac{\Phi^{**}(t_0)}{|t_0-c|^{\alpha_0}}, \qquad (26.9)$$

其中 $\alpha_0=$常数$<\alpha$,而 $\Phi^{**}(t_0)$ 在 L 上 c 的邻域內是属于 H 类的.

3°. 在叙述了上一节中的結果以后,研究由公式(26.1)所确定的函数 $\Phi(z)$ 在曲綫 L 的結点的邻域內之性质,便沒有什么困难了,此处現在我們把 L 理解为任意一条逐段光滑曲綫. 我們来研究这种情形.

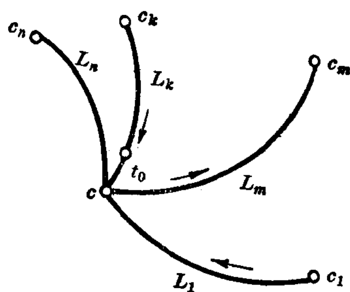


图　14

于是,假定在公式(26.1)中的 L 表示任意一条逐段光滑曲綫(§1, 4°, 5° 段),又假定 c 是它的結点之一(图 14). 假定敞开弧 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 的端点在这一点处結集,并且在这些弧上的正方向,可以是从点 c 出发(此时点 c 是弧的起点),亦可以是終止于点 c(此时点 c 是弧的終点). 在第一种情形下,我們就把对应的弧叫做引出的弧,而在第二种情形下,我們把对应的弧叫做进入的弧.

为了研究函数 $\Phi(z)$ 在結点 c 附近的性质，显然只需假定在公式 (26.1) 中的 L 是由弧 $L_1=cc_1,\ L_2=cc_2,\ \cdots,\ L_n=cc_n$ ① 的全体所构成的就够了，我們就这样假定.

我們首先考虑在应用中最常遇到的情形：公式(26.1)中的函数 $\varphi(t)$ 在 c 的邻域内是属于 H_0 类的，亦就是，下述情形：

$$\varphi(t)=\varphi_k(t) \quad 在 L_k 上, k=1, 2, \cdots, n, \tag{26.10}$$

其中 $\varphi_k(t)$ 表示弧 L_k 上的已知函数，它在 L_k 上端点 c 的邻域内是属于 H 类的.

这样一来，在我們的情形下，

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\varphi_k(t)dt}{t-z}. \tag{26.11}$$

把前一段中所讲到的結果应用到右端的每一項上，那么，我們便容易导出下述的結論.

在結点 c 的邻域内，对于不位在 L 上的点 z，我們有

$$\Phi(z)=A\ln(z-c)+\Phi_0(z), \tag{26.12}$$

其中 A 是由公式

$$A=\sum_{k=1}^{n}\mp\frac{\varphi_k(c)}{2\pi i} \tag{26.13}$$

确定的常数，此处当 k 与引出的弧对应时，在 $\varphi_k(c)$ 之前应取上面的符号，而当 k 与进入的弧对应时，在 $\varphi_k(c)$ 之前应取下面的符号，又其中 $\Phi_0(z)$ 表示在每一个由弧 $L_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 分割結点 c 的邻域而得出的扇形内是全純的函数，它可以从每一个扇形内連續拓展到此扇形在点 c 的邻域内的边界上（亦可以連續拓展到点 c 上）；此时，函数 $\Phi_0(z)$ 的边值在点 c 的邻域内扇形的边界上是属于 H 类的. 在已給的扇形内，可以把 $\ln(z-c)$ 理解为任意一个連續变化（点 c 本身除外）的分枝.

---

① 此处我們暂时放弃这样的規則，依据这一个規則，居于第一个位置上的字母表示弧的起点.

而对于位在 L 上結点 c 附近的点 $z=t_0$，我們有完全类似的公式

$$\Phi(t_0)=A\ln(t_0-c)+\Phi^*(t_0), \qquad (26.14)$$

其中 $\Phi^*(t_0)$ 是 L 上点 t_0 的函数，它在 L 上点 c 的邻域内是属于 H_0 类的，亦就是說，

$$\Phi^*(t_0)=\Phi_k^*(t_0) \quad 在 L_k 上, k=1, 2, \cdots, n, \qquad (26.15)$$

并且 $\Phi_k^*(t_0)$ 在 L_k 上端点 c 的邻域内是适合 H 条件的；当 t_0 在 L_k 上时，把 $\ln(t_0-c)$ 理解为在 L_k 上連續变化的（点 c 除外）对数的任意一个分枝，而 A 是由公式(26.13)所确定的常数.

我們特别指出一个特殊情形. 亦就是，我們假定 $\varphi(t)$ 在 c 的邻域内是属于 H 类的（而不仅是属于 H_0 类的），又假定 $\varphi(c)=0$. 此时，容易看出，依据上面所述，当 z 沿着任意路綫而趋于 c 时，$\Phi(z)$ 趋于确定的极限，而 $\Phi(t_0)$ 在 L 上点 c 的邻域内是属于 H 类的.

現在我們考察下列情形：在公式(26.1)中的 L 如上一样表示一条逐段光滑的曲綫，而函数 $\varphi(t)$ 在已知結点 c 的附近是属于 H^* 类的. 我們可以假定，这个函数在 c 附近可以表成下述形式（与 §22 作一比較）：

$$\varphi(t)=\frac{\varphi^*(t)}{(t-c)^\gamma}, \quad \gamma=\alpha+i\beta\neq 0,\ 0\leqslant\alpha<1, \qquad (26.16)$$

此处 $(t-c)^\gamma$ 在結集于結点 c 处的各条弧 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 上的值，应理解为在这些弧上（当 $\alpha=0$ 时，点 c 可能除外）是連續变化的任意一个值，而 $\varphi^*(t)$ 表示在端点 c 的邻域内是属于 H_0 类的函数. 这样一来，我們可以写出

$$\varphi(t)=\varphi_k(t)=\frac{\varphi_k^*(t)}{(t-c)^\gamma} \quad 在 L_k 上, k=1, 2, \cdots, n, \qquad (26.17)$$

其中 $\varphi_k^*(t)$ 表示在 L_k 上的已知函数，它在弧 L_k 的端点 c 的邻域内是属于 H 类的.

和前面类似地把函数 $\Phi(z)$ 表成和(26.11)的形式,并把 2° 段所叙述的結果应用到每一项上,我們便容易导出下列結論.

在結点 c 的邻域内,对于不位在 L 上的点 z, 有

$$\Phi(z)=\frac{K}{(z-c)^{\gamma}}+\Phi_0(z), \tag{26.18}$$

其中 K 是常数,在由曲綫 L 把結点 c 的邻域分割而得的各个扇形上, K 可以有不同的値, 而 $\Phi_0(z)$ 是在这些扇形中的每一个上为全純的函数; 当 $\alpha=0$ 时, 它可以連續拓展到对应的扇形在点 c 的邻域内之边界上(亦包括点 c 本身在内); 当 $\alpha>0$ 时,

$$\Phi_0(z)=\frac{\Phi_{00}(z)}{|z-c|^{\alpha_0}}, \quad \alpha_0=\text{常数}<\alpha, \tag{26.19}$$

其中 $\Phi_{00}(z)$ 在 c 附近是有界函数, 它可以連續拓展到对应的扇形之边界上; 此时这些函数的边值在点 c 的邻域内的扇形的边界上是属于 H 类的.

对于結点 c 附近 L 上的点 $z=t_0$, 有

$$\Phi(t_0)=\frac{K_0}{(t_0-c)^{\gamma}}+\Phi^*(t_0), \tag{26.20}$$

其中 K_0 是常数, 它在不同的弧 L_k 上可以有不同的値, 而 $\Phi^*(t_0)$ 表示 L 上点 t_0 的函数,它具有下述性质:当 $\alpha=0$ 时, $\Phi^*(t_0)$ 在 c 的邻域内是属于 H_0 类的;当 $\alpha>0$ 时,有

$$\Phi^*(t_0)=\frac{\Phi^{**}(t_0)}{|t-t_0|^{\alpha_0}}, \quad \alpha_0=\text{常数}<\alpha, \tag{26.21}$$

其中 $\Phi^{**}(t_0)$ 在 c 的邻域内是属于 H 类的.

容易写出公式(26.18)及(26.20)中常数 K 与 K_0 的明显表示式,但是,由于我們不需要这些数的表示式,因此,在一般情形下,我們不准备来推导这些表示式,而只在下一段中考虑一个典型的例題.

4°. 为了說明前面所讲过的,我們来考察下述特殊情形. 假定在結点 c 处只結集了两条光滑弧 $L_1=c_1c$ 及 $L_2=cc_2$, 因此, 在我

們的情形下，这一个結点是曲綫 $L=L_1+L_2=c_1cc_2$ 的普通角点（图 14a）①；我們将假定在 $L_1=c_1c$ 及 $L_2=cc_2$ 上正方向是根据所引用的記号来取的. 我們考察下述情形：沿用前面的記号，我們有

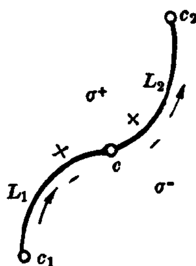


图 14a

$$\varphi(t)=\frac{\varphi^*(t)}{(t-c)^\gamma},\quad \gamma=\alpha+i\beta\neq 0,$$

并且

$$\varphi^*(t)=\varphi_1^*(t)\quad \text{在 } L_1 \text{ 上},$$

$$\varphi^*(t)=\varphi_2^*(t)\quad \text{在 } L_2 \text{ 上},$$

其中 $\varphi_1^*(t)$ 及 $\varphi_2^*(t)$ 分别在 L_1 及 L_2 上 c 的邻域内是适合 H 条件的. 与此相应

$$\Phi(z)=\Phi_1(z)+\Phi_2(z),$$

其中

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\varphi(t)dt}{t-z},$$

$$\Phi_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{\varphi(t)dt}{t-z}.$$

曲綫 L 把点 c 的邻域分成两个扇形，我們用 σ^+ 与 σ^- 表示它們，并且依据它們和 L 上取定的正方向的相对位置，分别地把它們叫做 L（在点 c 附近）的左邻域及右邻域.

为了要能把 2° 段中所导出的公式应用到 $\Phi_1(z)$ 及 $\Phi_2(z)$ 上，我們需要用一定的方式来选定出現在这些公式中的多值函数的分枝. 我們下面所进行的討論总是在点 c 的邻域內做的.

在 L_2 上我們把 $(t-c)^\gamma$ 理解为在 L_2 上連續变化的（当 $\alpha=0$ 时，点 c 除外）任意取定的一个值. 在扇形 σ^+ 内以及在扇形 σ^- 內，我們把 $(z-c)^\gamma$ 理解为在沿着 L_2 而割开的平面上是全純的一个分枝，并且这个分枝在 L_2 的左边取值 $(t-c)^\gamma$. 再者，在 L_1 上

① 特别是，弧 L_1 与 L_2 彼此是可以相互光滑地延伸的，因此，弧 L 可以是一条光滑弧.

我們把 $(t-c)^\gamma$ 理解为剛才所讲到的 $(z-c)^\gamma$ 的那一个分枝在 L_1 上所取得的值. 現在我們还需要用到函数 $(z-c)^\gamma$ 的别的分枝,亦就是要用到它这样的分枝,它在沿着 L_1 而割开的(但不是沿着 L_2 而割开的)平面上是全純的,并且在 L_1 之左边取上述值 $(t-c)^\gamma$; 我們用 $[(z-c)^\gamma]^*$ 表示这一个分枝. 容易看出,

$$[(z-c)^\gamma]^* = (z-c)^\gamma \qquad \text{在扇形 } \sigma^+ \text{ 内},$$

$$[(z-c)^\gamma]^* = e^{-2\pi i\gamma}(z-c)^\gamma \qquad \text{在扇形 } \sigma^- \text{ 内}.$$

在此以后,我們便容易写出所要求的公式. 亦就是,依据公式 (26.5),在明确的記号下,我們有

$$\Phi_2(z) = \frac{e^{\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{\varphi_2^*(c)}{(z-c)^\gamma} + \Phi_0^{(2)}(z) \qquad \text{在 } \sigma^+ \text{ 内及 } \sigma^- \text{ 内},$$

$$\Phi_1(z) = -\frac{e^{-\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{\varphi_1^*(c)}{[(z-c)^\gamma]^*} + \Phi_0^{(1)}(z)$$

$$= -\frac{e^{-\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{\varphi_1^*(c)}{(z-c)^\gamma} + \Phi_0^{(1)}(z) \qquad \text{在 } \sigma^+ \text{ 内},$$

$$\Phi_1(z) = -\frac{e^{-\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{\varphi_1^*(c)}{[(z-c)^\gamma]^*} + \Phi_0^{(1)}(z)$$

$$= -\frac{e^{+\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{\varphi_1^*(c)}{(z-c)^\gamma} + \Phi_0^{(1)}(z) \qquad \text{在 } \sigma^- \text{ 内},$$

由此可以导出公式

$$\Phi(z) = \frac{e^{\gamma\pi i}\varphi_2^*(c) - e^{-\gamma\pi i}\varphi_1^*(c)}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{1}{(z-c)^\gamma} + \Phi_0(z)$$

在 L 之左側,

$$\Phi(z) = \frac{e^{\gamma\pi i}\varphi_2^*(c) - e^{\gamma\pi i}\varphi_1^*(c)}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{1}{(z-c)^\gamma} + \Phi_0(z) \tag{26.22}$$

在 L 之右側,

此处函数 $\Phi_0(z)$ 具有下列性质: 当 $\alpha=0$ 时, 它可以从左側及右側連續拓展到在 c 的邻域内的 L 上, 并且它的边值在这一个邻域内的 L 上是属于 H 类的; 当 $\alpha>0$ 时,

$$\Phi_0(z) = \frac{\Phi_{00}(z)}{|z-c|^{\alpha_0}}, \quad \alpha_0 = \text{常数} < \alpha, \tag{26.23}$$

其中函数 $\Phi_{00}(z)$ 可以从左侧及右侧連續拓展到在 c 的邻域內的 L 上，并且它的边値在 L 上这一个邻域內是属于 H 类的.

从公式 (26.8) 出发，用类似的方法，可以得出当 t_0 在 L 上时 $\Phi(t_0)$ 的公式. 注意到

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2}[\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0)],$$

从公式(26.22)来推导还要更簡捷一些. 如果注意到:

在 L_1 上,

$$[(t_0-c)^\gamma]^+=[(t_0-c)^\gamma]^-=(t_0-c)^\gamma;$$

在 L_2 上,

$$[(t_0-c)^\gamma]^+=(t_0-c)^\gamma, \qquad [(t_0-c)^\gamma]^-=e^{2\pi i\gamma}(t_0-c)^\gamma,$$

便容易得出,

$$\begin{aligned}\Phi(t_0)&=\left\{\frac{e^{\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\varphi_2^*(c)-\frac{\operatorname{ctg}\gamma\pi}{2i}\varphi_1^*(c)\right\}\\&\quad\cdot\frac{1}{(t_0-c)^\gamma}+\Phi^*(t_0), \quad \text{在 } L_1 \text{ 上},\\ \Phi(t_0)&=\left\{\frac{\operatorname{ctg}\gamma\pi}{2i}\varphi_2^*(c)-\frac{e^{-\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\varphi_1^*(c)\right\}\\&\quad\cdot\frac{1}{(t_0-c)^\gamma}+\Phi^*(t_0), \quad \text{在 } L_2 \text{ 上},\end{aligned} \tag{26.24}$$

其中 $\Phi^*(t_0)$ 当 $\alpha=0$ 时在 L 上 c 的邻域内是属于 H_0 类的，而当 $\alpha>0$ 时,

$$\Phi^*(t_0)=\frac{\Phi^{**}(t_0)}{|t_0-c|^{\alpha_0}}, \quad \alpha_0=\text{常数}<\alpha, \tag{26.25}$$

其中 $\Phi^{**}(t_0)$ 在 L 上的同一个邻域内是属于 H 类的①.

5°. 由上面的結果可以直接导出下述重要的結論.

假定在 Cauchy 型积分

---

① 在 Д. А. Квеселава[1] 的論文中，曾給出了在弧 L_1 和 L_2 是彼此相互光滑延伸情形下的公式(26.22)及(26.24)(这种情形并不重要,亦不反映在公式的形式上)，在本书的第一版中曾轉載了这两个公式. 此处弥补了在証明中出現的一个缺陷.

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z}$$

中(此处 L 为一条逐段光滑曲綫),密度 $\varphi(t)$ 在 L 上是属于 H^* 类的. 此时,函数 $\Phi(z)$ 是在无穷远处取值零的分区全純函数.

再者,如果 $\varphi(t)$ 还在 L 上是属于 H^* 类的,那么,当 t_0 在 L 上时,$\Phi(t_0)$ 亦是属于同一类的. 換句話說,給定在 L 上的 H^* 类函数,对于运算

$$\int_L \frac{(\ )dt}{t-z}$$

是不变的.

6°. 最后,我們来考察密度还依賴于在某一个集合 T 上变动的某个参数 τ 的情形. 亦就是,考察 Cauchy 型积分

$$\Phi(z,\ \tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t,\ \tau)dt}{t-z}, \tag{26.26}$$

其中 L 表示一条逐段光滑曲綫,而函数 $\varphi(t,\ \tau)$ 当 $t\in L,\ \tau\in T$ 时是适合下列条件的:对于在已知結点 c 的邻域内之 t

$$\varphi(t,\tau)=\frac{\varphi^*(t,\ \tau)}{(t-c)^\gamma},\quad \gamma=\alpha+i\beta, \tag{26.27}$$

其中 α 与 β 都是实常数,$0<\alpha<1$,而 $\varphi^*(t,\ \tau)$ 对 c 的邻域内的变量 t 是属于 H_0 类的,它对变量 τ 是适合 H 条件的;对 t 的其他的值,有不等式

$$|\varphi(t,\ \tau+h)-\varphi(t,\ \tau)|\leqslant A(t)\cdot|h|^\mu,\quad \mu=\text{常数}>0, \tag{26.28}$$

其中 $A(t)$ 是某个在 L 上可积的正值函数.

那么,对于 L 上离 c 充分近的 t_0,函数

$$\Omega(t_0,\ \tau)=(t_0-c)^\gamma\Phi(t_0,\ \tau)$$

对变量 t_0 是属于 H_0 类的,对变量 τ 是适合 H 条件的.

依据 3° 段的結果,我們可以认为这一个命題有关变量 t_0 的部分已經証明了.

剩下要証明的是命題对于变量 τ 的部分之正确性. 在 L 由单

独一条光滑弧 ab 构成的情形下，我們已經証明过命題的这一部分（§ 25，2° 段）. 对于在 § 25 中所讲过的有关上述特殊情形的結果，我們再补充下面的注释. 为确定起見，假定 $c=a$，又假定 $\varphi^*(t, \tau)$ 对变量 t 在整个弧 ab 上是属于 H 类的，我們在討論函数

$$\Omega(z, \tau)=(z-a)^{\gamma}\Phi(z, \tau)$$

的同时，又討論函数

$$\Psi(z, \tau)=(z-b)^{1-\gamma}(z-a)^{\gamma}\Phi(z, \tau);$$

我們引进因式 $(z-b)^{1-\gamma}$，为的是要使所研究的是在沿着 ab 而割开的平面上的单值函数；因为，这一个因式在点 a 的邻域內是全純函数，并且它是异于零的，因此，从我們所感兴趣的角度来看，它并不影响所討論的函数之性質. 注意到 $1-\alpha>0$，容易断言，函数 $\Psi(z, \tau)$ 可以从左側及右側連續拓展到弧 ab 的每一个点上，亦可以連續拓展到弧 ab 的端点上. 再者，依据命題 VI（§ 22，5° 段），容易得出結論：当 $t_0\in L$，$\tau\in T$，$\tau+h\in T$ 时，有

$$|\Psi^{\pm}(t_0, \tau+h)-\Psi^{\pm}(t_0, \tau)|\leqslant 常数\cdot|h|^{\mu}, \quad \mu=常数>0,$$

并且同时选定上面的符号或者下面的符号，$t_0=a$ 或者 $t_0=b$ 的情形亦不例外；在这些情形下，把 $\Psi^{\pm}(a, \tau)$ 理解为 $\Psi(a, \tau)$，对其余的記号亦作类似的理解. 如果現在用 Γ 表示任一条簡单的封閉圍綫，它包圍弧 ab，并且它与弧 ab 相隔一个有限的距离，那么，对于这条圍綫上的点 t_0，显然有

$$|\Psi(t_0, \tau+h)-\Psi(t_0, \tau)|\leqslant 常数\cdot|h|^{\mu},$$

并且可以认为，在上述两个不等式中，μ 都表示同一个値. 現在把最大模原理应用到由圍綫 Γ 而圍成的，并且沿着弧 ab 而割开的有界区域上，那么便容易断言，不等式

$$|\Psi(z, \tau+h)-\Psi(z, \tau)|\leqslant 常数\cdot|h|^{\mu}$$

对于上述区域內所有的点 z 都是正确的，特别是，对于在点 a 的邻域內所有的点 z，这个不等式亦是正确的. 由此显然可以导出，对于端点 a 邻域內所有的点 z，亦有

$$|\Omega(z,\ \tau+h)-\Omega(z,\ \tau)| \leqslant 常数 \cdot |h|^{\mu},$$
$$\tau\in T,\quad \tau+h\in T,\quad \mu=常数>0,$$

特别是，这个不等式对于任意一条光滑弧 aa' 上所有的点亦是成立的，此处，弧 aa' 是在沿着 ab 而割开的平面上从点 a 引出的一条弧，它离 a 充分近.

在作了这一个注释以后，再来証明我們所感兴趣的命題便沒有什么困难了. 亦象在 3° 段中那样，此处亦只需要考虑 L 是由結集在結点 c 处的一些光滑弧 $L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_n$ 所构成的情形便够了. 把积分 $\Phi(z,\ \tau)$ 表成分别展布在 $L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_n$ 的各个积分之和，并把上述結果应用到每一項上，我們便得出所要求的結論.

注釋 我們曾經除去了在公式 (26.27) 中 $\alpha=0$ 的情形. 如果 $\alpha=0$ (特别是，如果 $\gamma=0$)，那么，由上所述，容易看出，当 t_0 离 c 充分近时，函数 $|t_0-c|^{\varepsilon}\Phi(t_0,\ \tau)$ 对变量 t_0 是属于 H 类的，对变量 τ 是适合 H 条件的，此处 ε 是任意小的正数.

特别是，如果在 c 的邻域內 $\varphi^*(t,\ \tau)$ 对变量 t 是属于 H 类的，又若，除此而外，对所有 $\tau\in T$，$\varphi^*(c,\ \tau)=0$，那么，$\Phi(t_0,\ \tau)$ 在 c 的邻域內对变量 t_0 是属于 H 类的，对变量 $\tau\in T$ 是适合 H 条件的. 为了証明这一点，只需进行如同在 $\alpha>0$ 的情形下同样的推理，并把函数 $\Psi(z,\ \tau)$ 换成函数 $(z-b)\Phi(z,\ \tau)$ 来考虑就够了.

§ 27. 某些推广的簡单介紹

在整个这本书中，我們只在下述假定下研究 Cauchy 型积分：积分曲綫是一条光滑曲綫或者逐段光滑曲綫，而密度 $\varphi(t)$ 是属于 H 类的，或者在更一般的情形下，它是属于 H^* 类的.

但是，在此处我們还准备在其他条件下，对 Cauchy 型积分有关的結果作一非常簡单的介紹.

在前面几节中所叙述的結果可以在下列两个基本的方向上加以推广.

第一个方向，代替密度 $\varphi(t)$ 在 L 上是属于 H^* 类的情形，而討論密度适合类似的但更为一般的条件的情形，并希望在这更一般条件的情形下，前面已証明过的、簡单的基本命題保持不变或者几乎不变.

第二个方向，局部地改变了前述各个命題的形式后，在有关积分曲綫 L 及密度 $\varphi(t)$ 尽可能更为一般的条件下，来研究 Cauchy 型积分.

当然，这样的方向分法是有条件的，并且有很多結果可能是介于这两方向之間的.

在下面所引証的結果中某些是由其他著者从 Fourier 級数理論中得出的，并且它們是和下述形式的积分有关的：

$$\Psi(\vartheta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}d\vartheta, \tag{27.1}$$

其中 ϑ 与 ϑ_0 是局限在区間 $[0,2\pi]$ 內的实变量，而积分是在 Cauchy 主值意义下来理解的；如果函数 $\psi(\vartheta)$ 在这个区間上是連續的，并且 $\psi(2\pi)=\psi(0)$，就可以认为它是連續的. 容易看出，积分 $\Psi(\vartheta_0)$ 与 Cauchy 型积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \tag{27.2}$$

在 L 是以 0 为中心半徑为 1 的圓周而 $z=t_0$ 位在 L 上的情形下，仅差一个常数項；为了証明这一点，只需令 $t=e^{i\vartheta}$，$t_0=e^{i\vartheta_0}$，$\varphi(t)=\psi(\vartheta)$ (参看后面 § 33 起首)就可以了.

在可以归入上述第一个方向的論文中，应該提到 A. Zygmund[1] 的論文，在这一篇論文中，研究了形式为(27.1)的积分. 在引进了某些比适合 H 条件的函数类要稍为广一些的函数类以后，这位著者証明了：如果 $\psi(\vartheta)$ 属于这些类中之一，那么，在 § 18, 2° 段中已証明过的类似的命題是成立的.

在 L 是一条加了一定条件的逐段光滑曲綫或者光滑曲綫的

假定下，Л. Г. Магнарадзе[4], [8]① 已經把这些結果推广到形式为(27.2)的积分的情形．此外，他还引进了函数 $\varphi(t)$ [它出現在形式为(27.2)的积分之中，具有和前面类似的一些性质]的某些新的类．这还可以用来把 §§ 16, 18, 21 中所讲过的結果稍許加以推广．

Н. А. Давыдов[1] 給出了在 §§ 16 及 18 中所导出的結果的若干推广．

М. Б. Гагуа[1] 及 Я. Л. Геронимус[3], [4] 把在 § 21 中所得出的結果稍为作了推广．

在 И. Н. Карцивадзе 及 Б. В. Хведелидзе[2] 的論文中，在 L 是光滑圍綫的可列集合的情形下，得出了形式为(27.2)的积分的一系列性质．

在轉到可以归入第二方向的結果的时候，我們作如下的規定．

如果函数 $f(x)$ 是定义在某一个集合 E 上的可測函数，而且函数 $|f(x)|^p$ 是可积的，那么，我們就說，$f(x)$ 是属于 $\mathfrak{L}_p(E)$ 类的．如果用函数 $\rho(x)|f(x)|^p$ 在 E 上是可积的来替代 $|f(x)|^p$ 在 E 上是可积的，此处 $\rho(x)$ 是定义在 E 上的某个非負函数②，那么，我們就說，$f(x)$ 是属于 $\mathfrak{L}_p(\rho;\ E)$ 类的．此时，我們簡单地用 $\mathfrak{L}(E)$ 及 $\mathfrak{L}(\rho;\ E)$ 来表示 $\mathfrak{L}_1(E)$ 类及 $\mathfrak{L}_1(\rho;\ E)$ 类．

Н. Н. Лузин[1]曾經指出过：如果在公式(27.1)中的函数 $\psi(\vartheta)$ 是属于 $\mathfrak{L}_2([0,\ 2\pi])$ 类的，那么，函数 $\Psi(\vartheta)$ 亦是属于这同一类 $\mathfrak{L}_2([0,\ 2\pi])$ 的．M. Riesz[1] 給出了这个結果的一个重要推广，他証明了：如果 $\psi(\vartheta)$ 是属于 $\mathfrak{L}_p([0,\ 2\pi])$ 类的，此处 $p=$常数>1，那么，$\Psi(\vartheta)$ 亦是属于这同一类 $\mathfrak{L}_p([0,\ 2\pi])$ 的．在关于积分曲綫 L 的某些假定下，容易把这些結果移植到形式为(27.2)的积分上(参看 С. Г. Михлин[7]，Б. В. Хведелидзе[18])．

---

① 亦可以参看 Я. Л. Геронимус[2]．

② $\rho(x)$ 还应該是可測的．——譯者注

上述 M. Riesz 的結果已經推广到了函数是 p 次带有确定权可积的①情形（参看 G. Hardy 及 J. Littlewood[1], Н. И. Ахиезер[1], К. И. Бабенко[1], K. Nickel[1], Б. В. Хведелидзе[18], В. Ф. Гапошкин[1]）. 在这些結果中有我們在此处提到不只一次的那些結果.

假定在公式 (27.2) 中的积分曲綫 L 是一条有限长的封閉的或者敞开的 Ляпунов 曲綫②，此外，还假定

$$\rho(t)=\prod_{k=1}^{m_1}|t-c_k|^{\alpha_k\cdot(p-1)}\prod_{k=m_1+1}^{m}|t-c_k|^{-\alpha_k}, \qquad (27.3)$$

其中 $0\leqslant m_1\leqslant m$, $0\leqslant\alpha_k<1$, $c_k\in L$, $k=1, 2, \cdots, m$, $p=$常数>1. 此时，如果在公式(27.2)中的函数 $\varphi(t)$ 是属于 $\mathfrak{L}_p(\rho, L)$ 类的，那么，函数 $\Phi(t_0)$ （此处 $t_0\in L$）亦是属于 $\mathfrak{L}_p(\rho, L)$ 类的（参看 Б. В. Хведелидзе[18]）.

如果在公式 (27.1) 中的函数 $\psi(\vartheta)$ 是属于 $\mathfrak{L}([0, 2\pi])$ 类的，那么，函数 $\Psi(\vartheta_0)$ 几乎处处是有限的（И. И. Привалов[2]），但是它可能是不可积的（Н. Н. Лузин[1]）. А. Н. Колмогоров[1]証明了：在这个情形下，$\Psi(t_0)$ 对于所有的 $0<p<1$ 都是属于 $\mathfrak{L}_p([0, 2\pi])$ 类的. А. Н. Колмогоров[2] 还証明了：如果 $\psi(\vartheta)$ 是属于 $\mathfrak{L}([0,2\pi])$ 类的，那么，$\Psi(\vartheta_0)$ 在 Denjoy B 的意义下是可积的③. E. Titchmarsh[1] 証明了：如果 $\psi(\vartheta)$ 是属于 $\mathfrak{L}([0, 2\pi])$ 类的，那么，$\Psi(\vartheta_0)$ 是 A-可积的④. П. Л. Ульянов[2], [3] 利用 A-积分的概念研究了与 Cauchy 积分及 Cauchy 型积分有关的一些問題. 例如，他証明了（П. Л. Ульянов[3]）：如果函数可以表成密度是可积的 Cauchy 型积分，那么，它亦可以表成 Cauchy 的 A-积分的形式.

---

① 亦就是，函数是属于 $\mathfrak{L}_p(\rho; E)$ 类的，$\rho(x)$ 是已知函数，称它为权函数.——譯者注

② 参看 §7 末尾的注釋 2.

③ Denjoy B 积分的定义例如可以参看 A. Zygmund[1] 第 153 頁.

④ A-可积的定义例如可以参看 П. Л. Ульянов[1].

В. В. Голубев[1] 把 § 17 中叙述过的結果，推广到了曲綫 L 是可求长的，而 $\varphi(t)$ 是属于 $\mathfrak{L}(L)$ 类的情形.

И. И. Привалов[2],[7] 証明了：如果在公式(27.2)中的积分曲綫 L 是一条簡单的可求长曲綫，由有限条具有一定凹性的弧所构成的，又若 $\varphi(t)$ 是属于 $\mathfrak{L}(L)$ 类的，那么，当 z 沿着任何一条**不是切綫的路徑**而趋于 L 上的 t_0 时，Сохоцкий-Plemelj 公式几乎处处是成立的. 在 L 是一条 Ляпунов 曲綫的情形下，这个結果仍然是有效的(参看 Б. В. Хведелидзе[18]).

В. И. Смирнов[1],[2],[3] 建立了 Cauchy 型积分在其密度属于不同的可积类时的一系列重要性质；在 И. И. Привалов[7] 的书中讲到了这些結果中的一部分，在那本书中汇集了有关密度为可积的 Cauchy 型积分的已知主要結果(例如，除了上面所提到的几位著者的結果外，在那本书中还提到了下列著者的結果：P. Fatou, F. Riesz, M. Riesz, F. Nevanlinna, R. Nevanlinna, М. В. Келдыш 及 М. А. Лаврентьев[1], М. А. Лаврентьев[1],[3], Г. М. Фихтенгольц[1], Г. М. Голузин 及 В. И. Крылов[1], А. И. Маркушевич[2]等等).

Б. В. Хведелидзе[18] 研究了密度是属于 $\mathfrak{L}_p(\rho; L)$ 类的 Cauchy 型积分的某些性质，此处 $p>1$，而 $\rho(t)$ 是形式为(27.3)的函数. 从这些性质中，我們指出下列性质：如果 $\Phi_1(z)$ 及 $\Phi_2(z)$ 都是 Cauchy 型积分，它們的密度分別是属于 $\mathfrak{L}_p(\rho; L)$ 类及 $\mathfrak{L}_q(\rho^{1-q}; L)$ 类的，此处 $p>1$, $q=p(p-1)$，那么，乘积 $\Phi_1(z)\Phi_2(z)$ 可以用密度为可积的 Cauchy 型积分表出.

И. И. Привалов[5],[7] 研究了 Cauchy-Stieltjes 积分的边界性质. Г. Ц. Тумаркин[1] 得出了解析函数能用 Cauchy-Stieltjes 积分表出的充分和必要条件.

最后，我們指出，Т. Г. Гегелия[1],[2] 对于相当广泛的一类不光滑曲綫研究了 Cauchy 型积分的基本性质.

III. 某些直接应用

在这一部分中，我們要讲到几乎可以直接由上述結果导出的，在今后我們經常要用到的(§ 33 的結果除外)各种結果.

§ 28. Poincaré-Bertrand 置换公式[①]

1° 假定 L 是一条具有結点 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的逐段光滑曲綫，又假定 $\varphi(t, t_1)$ 是这条曲綫上两个点 t 与 t_1 的函数，它可以表成形式

$$\varphi(t, t_1)=\frac{\varphi^*(t, t_1)}{\Pi(t, t_1)} \tag{*}$$

其中 $\varphi^*(t, t_1)$ 表示 L 上的 H_0 类函数，而

$$\Pi(t, t_1)=\prod_{k=1}^{n}|t-c_k|^{\alpha_k}|t_1-c_k|^{\beta_k}, \tag{**}$$

并且 α_k 与 β_k 表示适合条件

$$\alpha_k+\beta_k<1 \tag{***}$$

的非負常数.

假定 t_0 是 L 上的定点，并且 t_0 **不是結点**. 我們来考察累次积分

$$\begin{aligned} A&=\int_L \frac{dt}{t-t_0}\int_L \frac{\varphi(t, t_1)dt_1}{t_1-t}, \\ B&=\int_L dt_1\int_L \frac{\varphi(t, t_1)dt}{(t-t_0)(t_1-t)}, \end{aligned} \tag{28.1}$$

这两个积分的区别只是在于积分次序. 这两个积分都是有意义

① 我們仅在第二与第六章中把这个公式应用于当 L 由一些光滑的封閉圍綫所构成的情形，并且除了略去它后亦并不致于影响到对其余內容的理解的少数地方外，我們把它应用于当 $\varphi(t, t_1)$ 对 L 上两个变量都适合 H 条件的情形. 于是，讀者可以在上述的假定下(在这种情形下，$\Pi(t, t_1)=1$)，引进証明；此时，不必利用 §§ 22～26 中的結果.

的. 事实上,函数

$$\chi(t)=\int_L \frac{\varphi(t,\ t_1)dt_1}{t_1-t} \tag{28.2}$$

在L上,可能除了在結点(§18,4°段)的邻域外,处处都适合H条件;而在結点c的邻域内,依据§26, 3°段的结果,容易驗証:在对函数$\varphi(t,\ t_1)$所加的条件下,我們有

$$|\chi(t)|<\frac{常数}{|t-c|^{\nu}},\quad \nu=常数<1^{①}.$$

因此,积分

$$A=\int_L \frac{\chi(t)dt}{t-t_0} \tag{28.3}$$

是具有完全确定的意义的(因为t_0点不是結点). 再者,又有

$$B=\int_L \frac{dt_1}{t_1-t_0}\int_L\left\{\frac{1}{t-t_0}-\frac{1}{t-t_1}\right\}\varphi(t,\ t_1)dt$$

$$=\int_L \frac{\omega(t_0,\ t_1)-\omega(t_1,\ t_1)}{t_1-t_0}dt_1, \tag{28.4}$$

此处已引用了記号

$$\omega(t_0,\ t_1)=\int_L \frac{\varphi(t,\ t_1)dt}{t-t_0},$$
$$\omega(t_1,\ t_1)=\int_L \frac{\varphi(t,\ t_1)dt}{t-t_1}. \tag{28.5}$$

把关系式

$$\frac{\omega(t_0,\ t_1)-\omega(t_1,\ t_1)}{t_1-t_0}=\Omega(t_0,\ t_1) \tag{28.6}$$

考虑成点t_1的函数时,它只是在点t_0的邻域内以及在結点c的邻域内才不再是連續的.

因为,在点t_0的邻域内,函数$\omega(t_0,\ t_1)$及$\omega(t_1,\ t_1)$都是适合H条件的,并且它們之差在$t_1=t_0$处等于零,因此,在点t_0的这一个邻域内,我們有

① 亦就是,对于$c=c_k$,可以假定$\nu=\alpha_k+\beta_k+\varepsilon$,其中$\varepsilon$为任意小的正常数.

$$|\Omega(t_0,\ t_1)|<\frac{常数}{|t_1-t_0|^{\nu}},\quad \nu=常数<1.$$

但是，依据 §26 中的結果，不难驗証：在对于 $\varphi(t,\ t_1)$ 所加的条件下，在結点 c 的邻域內，有

$$|\omega(t_0,\ t_1)|<\frac{常数}{|t_1-c|^{\nu}},\quad |\omega(t_1,\ t_1)|<\frac{常数}{|t_1-c|^{\nu}},\quad \nu=常数<1 ①,$$

因此，在結点 c 的邻域內（不要忘記，点 t_0 不是結点）

$$|\Omega(t_0,\ t_1)|<\frac{常数}{|t_1-c|^{\nu}},\quad \nu=常数<1.$$

于是，积分 B 甚至在普通意义下是存在的.

但是，H. Poincaré ② 首先指出了，一般讲来，积分 A 和 B 是不相等的，亦就是，它們之間成立着下述很重要的Poincaré-Bertrand 置換公式：

$$\int_L \frac{dt}{t-t_0}\int_L \frac{\varphi(t,\ t_1)dt_1}{t_1-t}$$
$$=-\pi^2\varphi(t_0,\ t_0)+\int_L dt_1\int_L \frac{\varphi(t,\ t_1)dt}{(t-t_0)(t_1-t)}. \qquad (28.7)$$

我們来介紹这个公式的下述簡单的証明．令

$$\Phi(z)=\int_L \frac{dt}{t-z}\int_L \frac{\varphi(t,\ t_1)dt_1}{t_1-t},$$
$$\Psi(z)=\int_L dt_1\int_L \frac{\varphi(t,\ t_1)dt}{(t-z)(t_1-t)}, \qquad (28.8)$$

其中 z 是平面上不位在 L 上的点.

容易証明：由于被积函数的一个奇点（亦就是，$t=t_0$）已被消除，因此，在上面两个累次积分中已允許交換积分次序．这一点我們暂时不加以証明而加以应用 ③；因此，我們可以认为

$$\Phi(z)=\Psi(z). \qquad (28.9)$$

① 与前一个脚注作一比較.

② 关于这一点以后还要讲到.

③ 将在后面 2° 段中給出其証明.

函数 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 是与积分 A 和 B 有着紧密的联系的. 亦就是,依据 Сохоцкий-Plemelj 公式(16.4),我們有

$$\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0)=2\int_L \frac{dt}{t-t_0}\int_L \frac{\varphi(t,\ t_1)dt_1}{t_1-t}. \quad (28.10)$$

再者,

$$\Psi(z)=\int_L \frac{\psi(t_1,\ z)dt_1}{t_1-z}, \quad (28.11)$$

其中

$$\psi(t_1,\ z)=\int_L\left\{\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t-t_1}\right\}\varphi(t,\ t_1)dt. \quad (28.12)$$

我們用 $\psi^+(t_1,\ t_0)$ 及 $\psi^-(t_1,\ t_0)$ 分别表示,当 z 从 L 的左側及右側而趋于 t_0 时, $\psi(t_1,\ z)$ 的极限. 依据 Сохоцкий-Plemelj 公式(16.3)及(16.4),我們有

$$\psi^+(t_1,\ t_0)-\psi^-(t_1,\ t_0)=2\pi i\varphi(t_0,\ t_1),$$

$$\psi^+(t_1,\ t_0)+\psi^-(t_1,\ t_0)=2\int_L\left\{\frac{1}{t-t_0}-\frac{1}{t-t_1}\right\}\varphi(t,\ t_1)dt$$

$$=2(t_1-t_0)\int_L \frac{\varphi(t,\ t_1)dt}{(t-t_0)(t_1-t)}. \quad (28.13)$$

此外,又有

$$\begin{aligned}\psi(t_1,\ z)&=\psi^+(t_1,\ t_0)+\varepsilon^+ \quad (\text{当 } z \text{ 在 } L \text{ 的左側时}),\\ \psi(t_1,\ z)&=\psi^-(t_1,\ t_0)+\varepsilon^- \quad (\text{当 } z \text{ 在 } L \text{ 的右側时}),\end{aligned} \quad (28.14)$$

其中当 $z\to t_0$ 时, $\varepsilon^+\to 0$, $\varepsilon^-\to 0$. 我們下面証明(在 3° 段中):当 z 沿着和 t_0 处的切綫夹一个有限角的直綫而趋于 t_0 时,

$$\int_L \frac{\varepsilon^+dt_1}{t_1-z}\to 0, \qquad \int_L \frac{\varepsilon^-dt_1}{t_1-z}\to 0. \quad (28.15)$$

用表示式(28.14)替代(28.11)中的 $\psi(t_1,\ z)$,并且注意到(28.15),再利用 Сохоцкий-Plemelj 公式,我們便得出

$$\Psi^+(t_0)=\pi i\psi^+(t_0,\ t_0)+\int_L \frac{\psi^+(t_1,\ t_0)dt_1}{t_1-t_0},$$

$$\Psi^-(t_0)=-\pi i\psi^-(t_0,\ t_0)+\int_L \frac{\psi^-(t_1,\ t_0)dt_1}{t_1-t_0},$$

由此，再注意到(28.13)，便得

$$\Psi^+(t_0)+\Psi^-(t_0)=-2\pi^2\varphi(t_0,\ t_0)+2\int_L dt_1\int_L \frac{\varphi(t,\ t_1)dt}{(t-t_0)(t_1-t)}. \tag{28.16}$$

但是，由于(28.9)，(28.10)及(28.16)的左端是相等的，从而，比較它們的右端，我們便得出所要求的公式(28.7).

2°. 我們現在証明等式(28.9)的正确性，这个等式在前面我們已經用到过. 为了不致記号上复杂化，我們先在 $L=ab$ 是一条简单的光滑弧的假定下引进証明，然后，再来說明这个証明如何推广到任意一条逐段光滑曲綫的情形.

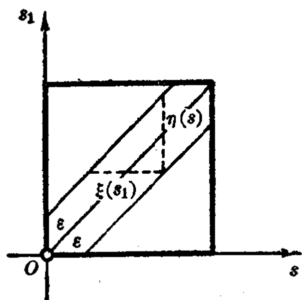


图　15

为了比較直观起見，我們用从点 a 量起的弧坐标 s 与 s_1 来确定 L 上点 t 与 t_1 的位置，于是，$0\leqslant s\leqslant l$，$0\leqslant s_1\leqslant l$，其中 l 为弧 ab 之长度，并且我們把 s 与 s_1 看成輔助平面 Oss_1 上的直角坐标. 点 $(s,\ s_1)$ 在这个平面上变动的区域是边长为 l 的正方形 Q (图 15).

被积函数

$$\frac{\varphi(t,\ t_1)}{(t-z)(t_1-t)} \tag{28.17}$$

的奇点集中在正方形 Q 的对角綫 $s=s_1$ 上以及在它的边上；由 1° 段中的公式(*)与(**)可知，后一种奇点是存在的 (在現在这些公式中，$n=2$, $c_1=a$, $c_2=b$). 但是，由 1° 段中的条件(***)容易看出，后一种奇点对下面所进行的推导并不重要.

我們以 q 表示用直綫 $s_1=s\pm\varepsilon$ 从 Q 割下的一个长条 (图 15)，其中 ε 为充分小的正数. 容易看出，

$$\Phi(z)=I_0+I_1,$$

$$\Psi(z)=I_0+I_2,$$

其中

$$I_0=\iint\limits_{Q-q}\frac{\varphi(t,\ t_1)dt\,dt_1}{(t-z)(t_1-t)}=\iint\limits_{Q-q}\frac{\varphi(t,\ t_1)}{(t-z)(t_1-t)}\frac{dt}{ds}\frac{dt_1}{ds_1}ds\,ds_1,$$

$$I_1=\int_L\frac{dt(s)}{t-z}\int_{\eta(s)}\frac{\varphi(t,\ t_1)dt_1(s_1)}{t_1-t},$$

$$I_2=\int_L dt_1(s_1)\int_{\xi(s_1)}\frac{\varphi(t,\ t_1)}{(t-z)(t_1-t)}dt(s).$$

$\eta(s)$ 表示直綫 $s=s$ 上介于长条 q 内的綫段，而 $\xi(s_1)$ 则表示直綫 $s_1=s_1$ 上介于长条 q 内的綫段①.

如果我們能証明：当 $\varepsilon\to0$ 时，$I_1\to0$, $I_2\to0$, 那么，我們便証明了我們的結論. 为了簡单起見，我們采用記号

$$\Omega(t)=\Omega(t(s))=\int_{\eta(s)}\frac{\varphi(t,\ t_1)dt_1}{t_1-t},$$

并且把积分 I_1 表成三个积分之和的形式：

$$I_1=\int_{ab}\frac{\Omega(t)dt}{t-z}=\int_{aa'}\frac{\Omega(t)dt}{t-z}+\int_{a'b'}\frac{\Omega(t)dt}{t-z}+\int_{b'b}\frac{\Omega(t)dt}{t-z},\tag{28.18}$$

其中 a' 与 b' 表示弧 $L=ab$ 上分别取在端点 a 与 b 的邻域內的点. 注意到公式 (*)～(***)，并且把 §23 末尾注釋中所給出的估計式② 应用到积分 $\Omega(t)$ 上，便容易驗証：当点 a' 和 b' 分别与 a 和 b 足够接近时，(28.18) 右端的第一个和第三个积分按模是任意小的，并且与 ε 的値是无关的. 再者，选定了点 a' 与 b'，容易看出，可以选取常数 ε 如此小，使得函数

$$\Omega(t)=\int_{\eta(s)}\frac{\varphi(t,\ t_1)-\varphi(t,\ t)}{t_1-t}dt_1+\varphi(t,\ t)\int_{\eta(s)}\frac{dt_1}{t_1-t}$$

的値当点 t 位在弧 $a'b'$ 上时按模是任意小的. 因此，(28.18) 右端第二个积分按模亦是任意小的.

---

① 这两句話是按照原文意譯的. ——譯者注

② 公式 (23.9a).

由此可以知道，$I_1 \to 0$. 类似地可以証明 $I_2 \to 0$.

这样一来，在 L 由一条光滑弧构成的情形下①，便証明了等式(28.9).

在一般情形下，証明可以完全类似地进行. 在这种情形下，L 上点 t 的位置亦可以用下法由一个实的参数 s 来确定. 假定 $L_k = a_k b_k (k=1, 2, \cdots, p)$ 是一些光滑的敞开弧，曲綫 L 是由它們所构成的（§1, 5° 段），又假定 l_k 是弧 L_k 的长度. 对于位在 L_k 上的点 t，我們令

$$s = l_1 + l_2 + \cdots + l_{k-1} + s^{(k)},$$

其中 $s^{(k)}$ 是点 t 沿着 L_k 从点 a_k 量起的弧坐标. 显然，L 上任意一个不是結点的点 t 对应一个完全确定的值 s，而任意一个不等于值 $s=0$, $s=l_1$, $s=l_1+l_2$, $\cdots$, $s=l_1+l_2+\cdots+l_p$ 的值 s 都对应一个完全确定的点 t（t 不是結点）.对于結点以及参数 s 剛才所讲到的那些值，一般讲来，对应关系的单值性便遭到了破坏，但是，这对証明过程并不重要.

如果 t 和 t_1 是 L 上的两个动点，而 s 与 s_1 是对应的参数值，那么，这些点与輔助平面 Oss_1 上的点 (s, s_1) 对应；仅当点 t 和 t_1 与結点重合，而参数 s 和 s_1 的值与值 0, l_1, l_1+l_2 等等重合时，这种对应关系才不再是单值的. 点 (s, s_1) 变动的区域是一个边长为 $l_1+l_2+\cdots+l_p$ 的正方形 Q. 被积函数 (28.17) 的奇点集中在正方形的对角綫 $s=s_1$ 上以及直綫 s, $s_1=0$, l_1, l_1+l_2, $\cdots$, $l_1+l_2+\cdots+l_p$ 上. 后一种奇点并不重要，因此，只需对对角綫 $s=s_1$ 附近的点进行更深入的研究就够了.

讲了这些以后，如何把在 $p=1$ 的情形所进行的証明推广到任意 p 的情形，便变成显然的了；因此，我們便不再来讲这一个証明.

---

① 所推导的証明对下述情形亦仍然是有效的：点 a 与 b 重合，亦就是說，L 是一条可以有角点的封閉圍綫.

3°. 我們轉到証明公式 (28.15). 我們显然只要証明：当 z 沿着和 L 在点 t_0 处的切綫夹一个有限角的直綫分别从 L 的左側或者右側而趋于 t_0 时，积分

$$I'=\int_l \frac{\varepsilon^+ dt_1}{t_1-z}, \qquad I''=\int_l \frac{\varepsilon^- dt_1}{t_1-z}$$

趋于零，此处 l 表示用以 t_0 为中心，半徑 R_0 为充分小的圓周从 L 上割下的弧. 我們可以认为 $R_0=R_0(\alpha_0)$ 为这条光滑弧的标准半徑，t_0 点位在这条弧上，又假定 z 沿着与切綫夹成非鈍角 $\beta_0>\alpha_0$ 的直綫而趋于 t_0.

依据公式(20.7)，我們有

$$|\varepsilon^+|=|\psi(t_1, z)-\psi^+(t_1, t_0)|\leqslant C\delta^\mu,$$

其中 C 是常数，$\delta=|z-t_0|$，而 μ 是函数 $\varphi(t, t_1)$，在 t 与 t_1 位在 t_0 点的邻域內的假定下，对于变量 t 的 H 条件之指数；我們认为 $\mu<1$，这当然并不破坏一般性. 再者(与第 68 頁作一比較)，有

$$|t_1-z|^2\geqslant(r-\delta\cos\omega_0)^2+\delta^2\sin^2\omega_0,$$

其中 $r=|t_1-t_0|$，$0<\omega_0<\frac{\pi}{2}$，因此，

$$|I'|\leqslant B\delta^\mu\int_0^{R_0}\frac{dr}{\sqrt{(r-\delta\cos\omega_0)^2+\delta^2\sin^2\omega_0}}$$
$$=B\delta^\mu\left[\ln\left\{r-\delta\cos\omega_0+\sqrt{(r-\delta\cos\omega_0)^2+\delta^2\sin^2\omega_0}\right\}\right]\Big|_0^{R_0},$$

其中 B 是某个常数. 因此，当 $\delta\to0$ 时，$I'\to0$.

正好同样地，我們可以証明 $I''\to0$.

4°. 这样一来，便証明了置换公式(28.7).

在对函数 $\varphi(t, t_1)$ 和曲綫 L (用我們的記号)加了很强的限制之后，H. Poincaré[1] 首先証明了这个公式. 在更一般的(但是并不比这里更一般)条件下，G. Bertrand[1], [3] 和 F. Tricomi[1], [2] ① 分别証明了这个公式和形式上略为不同的公式. 在比这里稍不一

① 亦可以与 В. Д. Купрадзе[5] 作一比較.

般的假定下，G. Giraud[1] 給出了这个公式的严格証明①.

在本书的第一版中，在 L 为一条光滑曲綫，而函数 $\varphi(t, t_1)$ 在 L 上是属于 H 类的假定下，著者給出了此处所引述的証明②.

注釋 我們指出置換公式(28.7)的一个簡单推論.

假定函数 $K(t, t_1)$ 是 L 上的已知函数，可表为形式

$$K(t, t_1)=\frac{\psi(t, t_1)}{|t_1-t|^{\lambda}}, \quad \lambda=\text{常数}<1, \tag{28.19}$$

其中 $\psi(t, t_1)$ 是和 1° 段中的函数 $\varphi(t, t_1)$ 适合同样条件的函数. 此时

$$\int_L \frac{dt}{t-t_0}\int_L K(t, t_1)dt_1=\int_L dt_1\int_L \frac{K(t, t_1)dt}{t-t_0},$$

其中 t_0 是 L 上异于結点的任意点.

这样一来，在所討論的情形下，允許交換积分次序.

这一点直接可以从公式(28.7)得出，只要注意到：依据条件(28.19)，

$$K(t, t_1)=\frac{\varphi(t, t_1)}{t_1-t},$$

其中函数

$$\varphi(t, t_1)=\psi(t, t_1)|t-t_1|^{1-\lambda}e^{i\vartheta}, \quad \vartheta=\arg(t_1-t)$$

都是适合 1° 段中所指出的条件的，并且 $\varphi(t, t)=0$，所得出的結論是容易直接証明的③.

§29. 給定在封閉圍綫的全体上的函数能够进行解析拓展的条件

1° 假定 L 是有限条沒有公共点的、光滑的封閉圍綫 $L_1, L_2,$

① G. Giraud 研究了多維积分区域的情形，而把一維情形当作特例而得出.

② Л. Г. Магнарадзе[8]，Б. В. Хведелидзе[5],[12]，С. Г. Михлин[7] 以及 F. Tricomi[3],[5] 按不同的方向給出了保証公式(28.7)成立的条件的各种推广.

③ 在下列論文中，对于有一个积分是在 Cauchy 主値意义下来考虑的情形，在不同的假定下，給出了置換公式正确性的証明：С. Г. Михлин[7]，И. Н. Карцивадзе[2]，Б. В. Хведелидзе[5]，[18]，K. Nickel[1]，E. Love[1].

$\cdots, L_p$ 的全体 (图 16). 曲綫 L 把平面分割成若干(有限)个連通部分. 我們拿这些連通部分构成平面的两个部分,我們分别以 S^+ 及 S^- 表示平面的这两个部分,它們具有下列性质.

部分 S^+ 与 S^- 具有公共边界曲綫 L (L 既不属于 S^+, 亦不属于 S^-); 部分 S^+ 与 S^- 連同曲綫 L 构成整个平面; 构成 S^+ 的那些連通部分之間沒有公共的边界点;对于构成 S^- 的那些連通部分亦是如此.

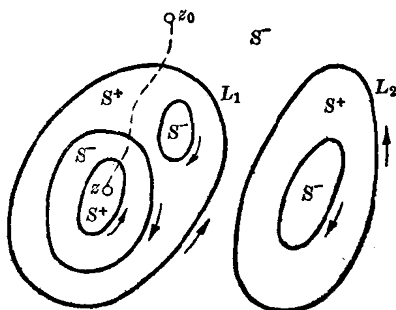


图 16

由上面的条件已經完全能够确定这两部分 S^+ 与 S^- (只要不計較 S^+ 可以用 S^- 表示, 反过来, S^- 可以用 S^+ 表示). 为了能証明这一点, 只需指出下述一点就够了. 把包含无穷远点的那一个連通部分(在图 16 中, 这是由位于圍綫 L_1 与 L_2 之外的那些点构成的連通部分)归入 S^- 的一个构成部分. 另外, 又設 z 是不位在 L 上的任意一点. 如果用 k 表示以 z 为其內点的封閉圍綫的个数(图 16 所示的情形是 $k=3$ 的情形),那么,我們应該认为:当 k 为奇数时,$z\in S^+$, 而当 k 为偶数(或者零)时, $z\in S^-$. 事实上,假定 z_0 是存在于构成 L 的所有各条封閉圍綫之外的任一点, 因之, $z_0\in S^-$. 从点 z_0 出发可以沿这样的途徑移动到点 z: 使当沿这条途徑移动时, 穿过圍繞 z 的 k 条圍綫中的每一条时恰好都只是一次(在图 16 中用虛綫来表示这样一条途徑);但是,每当穿越这些圍綫一次时,我們恰好从 S^- (或者 S^+) 的构成部分进入 S^+ (或者 S^-) 的构成部分,这是由于按照条件, S^+ 的构成部分仅能与 S^- 的构成部分有公共的边界.

这样一来, 平面上所有不位在 L 上的点只能是在部分 S^+ 及 S^- 中之一內, 并且容易看出, 此时适合規定这两部分时所加的全

部条件.

現在及今后我們总这样来規定 L 上的正方向：如果 L 按照上面的方式把平面分成两个部分 S^+ 及 S^-，那么，在 L 上这样来規定它的正方向，使当循着这个正方向在 L 上移动时，部分 S^+ 恒保持在 L 之左側(图 16).

不言而喻，我們可以用 S^+ 表示上面曾經用 S^- 来表示的部分，而用 S^- 則表示上面曾經用 S^+ 来表示的部分；在这种情形下，无穷远点将在部分 S^+ 內，而 L 上的正方向則改成相反的方向.

2°. 在应用中我們最經常遇到的是部分 S^+ 和 S^- 中有一个部分是連通的情形. 設这个連通部分就是 S^+.

此处可能出現两种情形：区域 S^+ 是有界区域的情形以及它是无界区域的情形.

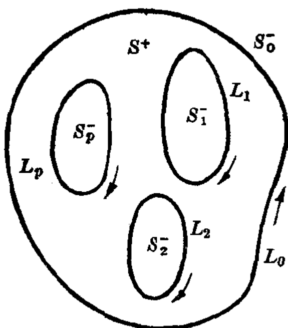


图 17

在第一种情形下，区域 S^+ 是由一些封閉圍綫所圍成的，我們現在用 $L_0, L_1, \cdots, L_p$ 表示这些圍綫，它們之中有一个(假設这个是 L_0)包圍所有其余的圍綫，而其他别的圍綫彼此互不包圍(图 17). 在这一情形下，部分 S^- 是由連通部分 $S_0^-, S_1^-, \cdots, S_p^-$ 所构成的，此处 S_0^- 表示由位在 L_0 外的点所构成的无界部分，而 $S_k^-(k=1, 2, \cdots, p)$ 則由位在 L_k 內部的点所构成的部分.

在第二种情形下，部分 S^+ 是无界的，我們有圍綫的同一种分布，它和第一种情形之区别在于，圍綫 L_0 不出現(可以說它在无穷远处)，而部分 S_0^- 亦沒有.

3°. 我們現在回到在 1° 段中所討論过的一般情形. 假定 $\varphi(t)$ 是給定在 L 上的連續函数.

我們提出下列問題：**函数** $\varphi(t)$ **应該适合什么样的条件，才能**

使得它是一个在平面的部分S^+內为全純的函数 $\varphi(z)$ 之边值［当然，对于部分 S^- 亦可以提出类似的問題］？

这里把在 S^+［或者 S^-］內为全純的函数理解为在构成S^+［或者 S^-］的各个連通部分內都是全純的函数.

如果 $\varphi(t)$ 是在 S^+ 內［或者在 S^- 內］为全純的函数 $\varphi(z)$ 的边值，那么，我們就說，L 上的已知函数 $\varphi(t)$ 可以解析拓展到 S^+ 上［S^- 上］.

非常簡单地可以解决上面所提出的問題. 如果函数 $\varphi(t)=\varphi^+(t)$ 是 S^+ 內的全純函数 $\varphi(z)$ 之边值，并且在部分 S^+ 为无界的情形下，$\varphi(z)$ 在无穷远处取値零，那么，依据 Cauchy 定理[①]，显然，对所有 $z\in S^-$，均有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z}=0. \tag{29.1}$$

反之，容易断言，如果(29.1)成立，那么，$\varphi(t)$ 是由公式

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z} \quad (\text{当 } z\in S^+)$$

所确定的函数 $\varphi(z)$ 的边値，而 $\varphi(z)$ 在 S^+ 內是全純的，它可以从 S^+ 內連續拓展到 L 上.

事实上，我們令

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z}. \tag{29.2}$$

依据(29.1)，在 S^- 內处处都有 $\Phi(z)=0$；因此，$\Phi(z)$ 从 L 之右側取边值 $\Phi^-(t)=0$. 于是，根据 § 17 所述結果，函数 $\Phi(z)$ 亦可以从左側連續拓展到 L 上，并且

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\Phi^+(t),$$

而这就証明了我們的結論.

这样一来，給定在 L 上的連續函数 $\varphi(t)$ 是 S^+ 內的全純函数

① 我們提醒一下，L 可以是构成平面的部分 S^+ 的各个連通部分的边界的全体［亦可以是构成 S^- 的各个連通部分的边界的全体］.

(在S^+为无界的情形下，这个函数在无穷远处等于零)之边值的充分和必要条件为条件(29.1).

如果 $\varphi(t)$ 在 L 上是属于 H 类的，我們还可以把这个条件写成下述形式．亦就是，在(29.1)中取 $z\to t_0$ 时的极限，此处 t_0 是 L 上的任意一点，我們得出

$$-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=0,\quad \text{对所有 } t_0\in L. \tag{29.3}$$

显然,反之,从(29.3)可以推出(29.1)①,于是,給定在 L 上适合 H 条件的函数 $\varphi(t)$ 是在 S^+ 内全純的函数(在部分 S^+ 为无界的情形下,这个函数在无穷远处等于零)之边值的充分和必要条件为条件(29.3).

完全类似地得出,給定在L上的連續函数 $\varphi(t)$是在S^-内全純的函数(在部分S^-为无界的情形下,这个函数在无穷远处等于零)之边值的充分和必要条件．这一个条件是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z}=0\quad \text{对所有 } z\in S^+. \tag{29.4}$$

在 $\varphi(t)$ 是适合 H 条件的情形下,前一条件等价于下列条件:对所有 $t_0\in L$, 均有

$$\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=0. \tag{29.5}$$

容易把已得出的条件推广到,不要求 $\varphi(z)$ 在无穷远处取值零的情形．例如，假定部分 S^- 是无界的，从而，部分 S^+ 是有界的(如图 16 所示)，又假定要找的是，L 上的連續函数 $\varphi(t)$ 是函数 $\varphi(z)$之边值的充分和必要条件,此处 $\varphi(z)$ 在S^-内是全純的函数,它在无穷远处具有已給的主要部分的极点，亦就是說，当 $|z|$ 很大时，$\varphi(z)$ 具有形式

① 事实上,从(29.3)得出,由公式(29.2)所确定的函数 $\Phi(z)$ 在 S^- 内是全純的,并且 $\Phi(z)$ 可以連續拓展到 L 上，它在 L 上取値 $\Phi^-(t)=0$，从而 $\Phi(z)$ 在 S^- 内处处都等于零.

$$\varphi(z)=\gamma(z)+O\left(\frac{1}{z}\right), \tag{29.6}$$

其中 $\gamma(z)$ 是已知的多項式("主要部分"),特別是,$\gamma(z)$ 可以是常数①.

在所討論的情形下,条件(29.1)显然可以由下列条件来替代:对所有 $z\in S^+$, 均有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)-\gamma(t)}{t-z}\,dt=0,$$

或者用下列条件来替代:对所有 $z\in S^+$, 均有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt=\gamma(z). \tag{29.7}$$

与此相应,条件(29.5)可以用下列条件来替代:对所有 $t_0\in L$, 均有

$$\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=\gamma(t_0). \tag{29.8}$$

对于当 L 是一条簡单的封閉圍綫 (在特別假定 $\gamma(z)=$常数) 的情形, J. Plemelj[1]指出了条件(29.3)及(29.8). 比 J. Plemelj 要早得多, F. Casorati[1] 亦只考虑了 L 为一条封閉圍綫,而区域是有界的情形, 他給出了与条件(29.3)等价的下列条件: 对于所有 $t_0\in L$, 均有

$$\int_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt=0,$$

但是,他并未給出应有的理論基础. 稍晚一些时候, G. Morera[1] 給出了这个条件的比較严格的理論基础, 并且还指出了另一个条件:对所有 $t_0\in L$, 均有

$$\int_L \varphi(t)\ln(t-t_0)\,dt=0,$$

在某些附加的假定下,这个条件和前一个条件是等价的.

从更一般的观点来看, В. В. Голубев[1] 和 И. И. Привалов[2]

---

① 在这一种情形下,我們讲到极点是有条件的("零阶极点").

（亦可以参看 И. И. Привалов[7]）在一条封閉圍綫的情形下研究了我們在这里所感兴趣的条件。

§ 30. 广义的 Harnack 定理

从上述結果直接可以导出下述在一系列問題中要应用到的命題.

假定 L, S^+ 及 S^- 和上一节 1° 段所表示的相同，又假定 $\varphi(t)$ 是給定在 L 上的实的連續函数，还假定

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}; \tag{30.1}$$

此时，如果对所有 $z\in S^+$，均有 $\Phi(z)=0$，那么，$\varphi(t)$ 在构成 L 的各条（封閉）圍綫上取常数值，并且这些常数值在包圍属于 S^- 的同一个連通部分的各条圍綫上都是相同的；特别是，如果 S^- 包含无界的連通部分，那么，在这一部分的边界上，$\varphi(t)=0$. 逆命題亦是正确的.

容易直接驗証逆命題的正确性. 我們来証明正命題.

假定在平面的 S^+ 部分内 $\Phi(z)=0$，那么，由上节 3° 段所述結果，$\varphi(t)$ 是在 S^- 内为全純的函数 $\varphi(z)$（如果 S^- 包含点 $z=\infty$，那么，$\varphi(z)$ 在无穷远处取值零）的边值. 但是，因为函数 $\varphi(t)$ 是实函数，因此，$\operatorname{Im}\varphi(z)$ ① 在 L 上所取得的边值等于零. 于是，在 S^- 内处处都有 $\operatorname{Im}\varphi(z)=0$. 所以，$\varphi(z)$ 在构成 S^- 的每一个連通部分内都取常数值，特别是，在包含点 $z=\infty$ 的連通部分（如果它存在）内，$\varphi(z)$ 等于零. 由此便可以导出上述命題.

显然，在已經証明过的命題的叙述中，我們可以把 S^+ 换成 S^-，把 S^- 换成 S^+，这是因为此处的区别只是在記号上.

这个命題，可以説是 A. Harnack[1] 所提出过的一个命題之推广，实际上，他的叙述并不完全正确.

---

① 我們用 $\operatorname{Re}\Phi$ 及 $\operatorname{Im}\Phi$ 分别表示复的量 Φ 的实部和虚部.

在L由一条封閉圍綫所构成的情形下，这个命题可以归結为下述命題：如果对于L內部所有的z，均有$\Phi(z)=0$，那么，在L上$\varphi(t)=0$；但是，如果对L外所有的z均有$\Phi(z)=0$，那么，在L上$\varphi(t)=$常数.

注釋 1 如果在已經証明过的命題的叙述中，把条件$\Phi(z)=0(z\in S^+)$换成条件$\mathrm{Re}\,\Phi(z)=0(z\in S^+)$，那么这一个命題仍然是有效的.

事实上，假定在S^+內$\mathrm{Re}\,\Phi(z)=0$. 那么，在构成S^+的各个連通部分內，$\Phi(z)$保持純虛的常数值；因此，$\Phi^+(t)$在构成L的各条圍綫上保持純虛的常数值. 于是，函数$\Phi^-(t)=\Phi^+(t)-\varphi(t)$的虛部在这些圍綫上(特别是，在圍成属于$S^-$的各个連通部分的圍綫上)保持常数值. 但是，此时，函数$\Phi(z)$在这些部分的每一个內都保持常数值[①]；特别是，在包含无穷远点的那些部分(如果有这样的部分)內，$\Phi(z)=0$. 再者，在这些部分的每一个的边界上，$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)$，又由于$\Phi^+(t)$是一个純虛量，而根据条件，$\varphi(t)$为实函数，因此，$\varphi(t)=-\mathrm{Re}\,\Phi^-(t)$在这些部分中的任意一个的整个边界上保持同一常数值；这个值在包含点$z=\infty$的連通部分(如果有这一种部分)的边界上等于零. 因此，便証明了我們的結論.

注釋 2 和前面类似地容易証明，如果在用前面的記号时，在S^+內，$\mathrm{Im}\,\Phi(z)=0$，那么，$\varphi(t)$在构成L的各条封閉圍綫上保持常数值；相反的命題亦是成立的[②].

§31. 依据已知的跳跃来确定分区全純函数

1°. 現在我們来求解对于今后是极重要的下列問題.

假定L表示一条逐段光滑曲綫(§1)，又假定$\varphi(t)$在L上是

① 这可以由势論的已知命題导出；参看后面§60.

② 这一次，$\varphi(t)$在各条圍綫上所取得的(实的)常数値之間并沒有什么联系.

属于 H^* 类 (§8) 的已知函数①.

要求依据边界条件

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t),\quad \text{在}L\text{上除了結点外},\tag{31.1}$$

来找一个在无穷远处取值零的分区全純函数 $\Phi(z)$.

依据 Сохоцкий-Plemelj 公式，立刻可以解决这个問題．亦就是，这个問題有且仅有一个解，它由公式

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-z}\tag{31.2}$$

給出.

事实上，由这个公式所确定的函数 $\Phi(z)$ 是分区全純的 (§26, 5° 段)，且根据 Сохоцкий-Plemelj 公式(16.3)，它适合条件(31.1)．剩下要証明的是这个問題幷沒有别的解.

我們假定这个問題还有另一个解，又假定 $\Psi(z)$ 表示这两个解的差．那么，依据条件(31.1)，应該有

$$\Psi^+(t)-\Psi^-(t)=0,\quad \text{在 }L\text{ 上除了結点外}.$$

但是，此时由 §10, 3° 段中所讲过的結果，函数 $\Psi(z)$ 在全平面上是全純的(如果在 L 上让它取适当的值)，又因为它在无穷远处取值零，因此，依据 Liouville 定理，在全平面上 $\Psi(z)\equiv 0$．于是，我們的两个解是一致的.

Ю. В. Сохоцкий[1] 考慮了剛才所提出和解决的問題，但是，他沒有精确地説明条件，亦沒有給出应有的理論基础.

較晚一些时候，很多著者考慮了这个問題的多种提法②.

如果用更一般的要求，亦就是，要求 $\Phi(z)$ 在无穷远处的阶数

① 除了第四及第五章外，我們只是在下列情形下才用到下面的結果：L 由一些光滑的封閉圍綫所构成，而 $\varphi(t)$ 在 L 上是适合 H 条件的情形．如果所討論的是这一种情形，那么，在下面的推导中，幷不需要用到 §26 中的結果，只需利用 §16 中的結果就够了.

② И. Н. Карцивадзе 及 Б. В. Хведелидзе[2] 給出了問題 (31.1) 当 L 为可列条封閉圍綫的全体的情形在加了一些补充条件下的解.

不超过已給的整数 $k \geq -1$[①] 来替代要求 $\Phi(\infty)=0$，那么，正如与前面完全类似的推导[②]表明，最一般的解可由公式

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}+P_k(z) \tag{31.3}$$

給出，其中 $P_k(z)$ 是任意一个次数不超过 k 的多项式；当 $k=-1$ 时，应該认为 $P_k(z)=0$.

如何求解稍一般的問題——如果假定，$\Phi(z)$ 在一些已知点处可以具有有限个极点(而不仅在无穷远点处有一个极点)——是很明显的.

2°. 上面所討論过的問題亦可以这样来求解. 在等式 (31.1) 的两端，我們乘以

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{dt}{t-z},$$

并沿着 L 积分，此处 z 为平面上任何一个不位在 L 上的点. 此时，不难断言，如果利用适当形式的 Cauchy 公式[③]，又注意到，$\Phi(z)$ 在无穷远点处可以有阶数不超过 k 的极点，那么，我們便重新得出公式(31.3).

这样一来，我們便得出了結論：**如果解存在，它就具有形式 (31.3)；在函数 $\varphi(t)$ 仅在 L 上(結点处可能例外)連續，并且 $\varphi(t)$ 在 L 上是絕对可积的情形下，这个結論亦仍然是成立的.** 但是，在 $\varphi(t)$ 是属于 H^* 类的情形下，公式(31.3)实际上給出了解.

3°. 如果要求使函数 $\Phi(z)$ 在无穷远处的阶数不超过 $k<-1$ (亦就是說，它在无穷远处具有阶数不低于 $-k>0$ 的零点)，那么，容易看出，只是在

---

① 对 $k<-1$ 的情形参看下面 3° 段.

② 此时应該应用广义的 Liouville 定理.

③ 能够应用 Cauchy 公式的理由是：由假定可以知道，函数 $\Phi(z)$ 可以(从左側及从右側)連續拓展到曲綫 L 的每一个不是結点的点上，而在結点 c 附近，有

$$|\Phi(z)|<\frac{\text{常数}}{|z-c|^{\alpha}},\quad \alpha=\text{常数}<1.$$

$$\int_L t^j \varphi(t)dt=0, \quad j=0, 1, \cdots, -k-1 \tag{31.4}$$

的情形下，問題才会有解；并且当适合这些条件时，解由公式(31.2)給出.

4°. 把上面所得出的結果推广到跳跃曲綫延伸至无穷远处的情形，并沒有什么困难（与 §19, 1° 段作一比較）.

在此处我們仅考虑跳跃曲綫是一条无穷长的直綫的情形. 不失一般性，我們可以假定，这条直綫就是实軸，亦象在 §19 中那样，我們用 D 表示它.

現在我們这样来提出問題：要求依据条件

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t) \quad \text{在} D \text{上}, \tag{31.5}$$

来找一个处处是有界的分区全純函数 $\Phi(z)$，此处 $\varphi(t)$ 是 D 上的已知函数，它在 D 上，包括无穷远点在內，处处都适合 H 条件（参看 §19, 3° 段）.

容易看出（参照上一节），这个問題所有的解都由公式

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\varphi(t)dt}{t-z}+C_0 \tag{31.6}$$

給出，其中 C_0 为任意常数.

例如，如果还要求 $\Phi^+(\infty)=0$，那么，問題是可以解的。此时，依据公式(19.14)，

$$C_0=-\frac{1}{2}\varphi(\infty).$$

如果替代 $\Phi(z)$ 的有界性要求，我們允許函数 $\Phi(z)$ 在已知点 a_0（a_0 不位在 D 上）处具有阶数不超过（已給的）k 阶的极点，另外，还要求 $\Phi(z)$ 除了在点 a_0 的邻域外处处都保持是有界的，那么，問題的一般解显然由公式

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\varphi(t)dt}{t-z}+C_0+\frac{C_1}{z-a_0}+\cdots+\frac{C_k}{(z-a_0)^k}$$

給出，其中 $C_0, C_1, \cdots, C_k$ 都是任意常数.

在 2° 段中所讲过的結果，容易移植到我們这里所討論的情形上. 对 3° 段中的結果亦可以类似地加以处理；在目前的情形下，应該把无穷远点（它現在位在跳跃曲綫 D 上）换成不位在 D 上的任一个定点.

注釋 如果允許函数 $\Phi(z)$ 可以在有限个点 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的邻域內是无界的（此处点 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 都位在 D 上，并且它們分布在有限距离內），但是，亦象每一个分区全純函数那样，要求它在 c_k 附近适合条件

$$|\Phi(z)|<\frac{\text{常数}}{|z-c_k|^\alpha}, \quad \alpha=\text{常数}<1; \quad k=1, 2, \cdots, n,$$

那么，上面所推出的結果显然保持不变.

§32. 在封閉圍綫情形下的 Cauchy 型积分的反演

假定 L 表示有限条沒有公共点的封閉的光滑圍綫的全体，又假定 L 上的正方向是按照 §29, 1° 段中那样来选定的.

我們来考察积分方程

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=\psi(t_0), \qquad (32.1)$$

其中 t_0 是 L 上的任意点，$\psi(t)$ 是給定在 L 上的 H 类函数，而 $\varphi(t)$ 是未知函数，我們亦要求 $\varphi(t)$ 是适合 H 条件的.

方程(32.1)是最簡单的一个奇异积分方程；它可以依据在后一章中对于一般情形所得出的公式来求解. 但是，由于方程(32.1)本身具有很大的意义，因此，我們在这里用三种方法来找它的解；此处，我們利用 §29, 1° 段中的記号，特别是記号 S^+ 及 S^-.

第一种方法 在討論中引进一个在无穷远处取值零的分区全純函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}. \qquad (32.2)$$

此时，依据 Сохоцкий-Plemelj 公式 (16.4)，可以把方程(32.1)写

成形式

$$\Phi^{+}(t_0)+\Phi^{-}(t_0)=\psi(t_0) \quad \text{在}\ L\ \text{上}. \tag{32.3}$$

我們考虑另一个由下式所确定的分区全純函数 $\Psi(z)$:

$$\Psi(z)=\begin{cases} \Phi(z), & \text{当}\ z\in S^{+}, \\ -\Phi(z), & \text{当}\ z\in S^{-}, \end{cases} \tag{32.4}$$

此时,条件(32.3)可以改写成

$$\Psi^{+}(t_0)-\Psi^{-}(t_0)=\psi(t_0) \quad \text{在}\ L\ \text{上},$$

由此再依据上一节的結果,便知道

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi(t)\,dt}{t-z}. \tag{32.5}$$

另一方面由(16.3),(32.2)及(32.4),

$$\varphi(t_0)=\Phi^{+}(t_0)-\Phi^{-}(t_0)=\Psi^{+}(t_0)+\Psi^{-}(t_0),$$

于是,最后,依据(32.5)及(16.4)有

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\psi(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{32.6}$$

于是,从(32.1)可以导出(32.6). 但是,正好用同样的方法,从(32.6)可以导出(32.1). 于是,(32.6)是方程(32.1)的(唯一)解;换句話說,关系式

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=\psi(t_0), \quad \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\psi(t)\,dt}{t-t_0}=\varphi(t_0) \tag{A}$$

中的每一个都可以从另一个导出,亦就是說,这两个关系式彼此是互为反演的.

第二种方法 反演公式(A)可以由下列簡单的推导得出. 假定 $\omega(t)$ 是在 L 上适合 H 条件的任意函数. 在无穷远处取值零的函数

$$\Omega(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-z}$$

在 S^{+} 是全純的,如果让它在 L 上取值

$$\Omega^{+}(t)=\omega(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega(t_1)\,dt_1}{t_1-t}, \tag{*}$$

它在 $S^+ + L$ 上亦就是連續的. 因此,对所有 $z \in S^-$, 都有

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\Omega^+(t)\,dt}{t-z}=0;$$

让 z 从右側趋于 t_0 而取极限,我們便得出[①]

$$-\Omega^+(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\Omega^+(t)\,dt}{t-t_0}=0.$$

把由(*)得出的值 $\Omega^+(t)$ 代入上式,我們便得出

$$-\omega(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega(t_1)\,dt_1}{t_1-t_0}$$
$$+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{dt}{t-t_0}\left\{\omega(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega(t_1)\,dt_1}{t_1-t}\right\}=0,$$

由此, 再打开括号, 并进行化简, 便得出对于 L 上适合 H 条件的每一个函数 $\omega(t)$ 都成立的关系式

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{dt}{t-t_0}\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega(t_1)\,dt_1}{t_1-t}=\omega(t_0). \tag{B}$$

公式(B)所表示的与反演公式(A)所表示的是相同的,它們都說明关系式(A)中的每一个都可以从另一个导出.

第三种方法　把(32.1)改写成形式

$$\psi(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t_1)\,dt_1}{t_1-t},$$

在此式两端乘以 $\frac{1}{\pi i}\,\frac{dt}{t-t_0}$, 再沿着 L 对 t 进行积分, 并利用 Poincaré-Bertrand 置换公式 (§ 28), 我們便得出

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\psi(t)\,dt}{t-t_0}=-\frac{1}{\pi^2}\int_L \frac{dt}{t-t_0}\int_L \frac{\varphi(t_1)\,dt_1}{t_1-t}$$
$$=\varphi(t_0)-\frac{1}{\pi^2}\int_L \varphi(t_1)\,dt_1\int_L \frac{dt}{(t-t_0)(t_1-t)}. \tag{**}$$

但是,容易直接驗証,

$$\int_L \frac{dt}{(t-t_0)(t_1-t)}=\frac{1}{t_1-t_0}\int_L\left\{\frac{1}{t-t_0}-\frac{1}{t-t_1}\right\}dt=0.$$

---

① 依据(29.3),我們立刻就可以写出这个关系式来.

因此，在(**)中的第二項等于零，于是，我們得出公式(32.6)，用同样的方法也可以由(32.6)导出(32.1)．

正如我們所看到的，反演公式(A)差不多是 Сохоцкий-Plemelj 公式以及 Poincaré-Bertrand 置换公式的显而易見的推論．把它們应用于一些特殊的圍綫(无穷长的直綫，圓周)时①，它們常以这种或者那种等价(或者几乎等价)的形式出現在文献之中，并冠以 Hilbert 公式的名称．我很难指出，是誰首先把这些公式应用到任意一条光滑圍綫上．И. Н. Векуа[1] 考虑了一条封閉圍綫的情形，并把它們当作一类奇异积分方程的解的特殊情形而得出这些公式，上面的第二种方法就是他告訴我的②．

§ 33．Hilbert 反演公式

我們特別把上面所得出的結果应用到 L 是以原点为中心，以 1 为半徑的圓周的情形．我們令

$$t=e^{i\vartheta},\quad t_0=e^{i\vartheta_0}. \tag{33.1}$$

此时

$$\frac{dt}{t-t_0}=\frac{ie^{i\vartheta}\,d\vartheta}{e^{i\vartheta}-e^{i\vartheta_0}}=\frac{ie^{i\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}}\,d\vartheta}{e^{i\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}}-e^{-i\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\cos\dfrac{\vartheta-\vartheta_0}{2}+i\sin\dfrac{\vartheta-\vartheta_0}{2}}{\sin\dfrac{\vartheta-\vartheta_0}{2}}\,d\vartheta$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta+\frac{i}{2}\,d\vartheta. \tag{33.2}$$

現在我們用 $\varphi(\vartheta)$ 及 $\psi(\vartheta)$ 表示 $\varphi(t)$ 及 $\psi(t)$（当 k 为整数时，并且假定 $\varphi(\vartheta+2k\pi)=\varphi(\vartheta)$，$\psi(\vartheta+2k\pi)=\psi(\vartheta)$）．此外，我們

---

① 圓周的情形可以参看下一节．

② И. Н. Карцивадзе 及 Б. В. Хведелидзе[1],[2] 在一些补充条件下，把这些反演公式推广到了积分曲綫是可列条封閉圍綫的集合的情形．

又用 $\frac{1}{i}\psi(\vartheta)$ 替代 $\psi(\vartheta)$. 那么,上一节中的公式 (A) 分别具有形式①:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}d\vartheta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)d\vartheta=\psi(\vartheta_0), \tag{33.3}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}d\vartheta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)d\vartheta=-\varphi(\vartheta_0). \tag{33.4}$$

由上面的公式容易导出著名的 Hilbert 反演公式，他是用其他(較簡接的)方法得出这个公式的.

我們来考察方程

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}d\vartheta=\psi(\vartheta_0), \tag{33.5}$$

其中 $\varphi(\vartheta)$ 是未知函数，而 $\psi(\vartheta)$ 是适合 H 条件的已知函数. 容易看出,仅当适合条件

$$\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)d\vartheta=0 \tag{33.6}$$

时，这个方程才会有解；如果将(33.5)的两端对 ϑ_0 从 0 到 2π 积分,又若注意到容易看出的

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}d\vartheta_0=0, \tag{*}$$

就可以得出条件(33.6).

我們假定条件(33.6)是适合的，并且要找方程(33.5)适合补充条件

① 包含 $\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}$ 的积分当然应該按照 Cauchy 主值的意义来理解。

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta)\,d\vartheta = 0 \tag{33.7}$$

的解.

但是，在这个条件下，方程(33.5)与方程(33.3)是一致的，而方程(33.3)的解由公式(33.4)給出，亦就是，当注意到(33.6)时，有

$$\varphi(\vartheta_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\vartheta)\ \mathrm{ctg}\,\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta. \tag{33.8}$$

公式(33.5)及(33.8)連同条件(33.6)及(33.7)是 Hilbert **反演公式**[①].

我們已找到了方程(33.5)适合补充条件(33.7)的解. 我們来証明：所有別的解都可以用已得出的解再加上一个任意常数的办法而得出来[②]. 首先，显然，$\varphi(\vartheta)+$常数亦是解；这可以从 (*) 得出. 現在假定 $\varphi_1(\vartheta)$ 是方程(33.5)的任一个解；我們令

$$\varphi^*(\vartheta) = \varphi_1(\vartheta) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(\vartheta)\,d\vartheta.$$

此时，显然，$\varphi^*(\vartheta)$ 是适合补充条件(33.7)的解；但是，这样的解是唯一的，而因此，它必然与已經找出的解 (33.8) 是一致的. 由此便导出我們的結論.

从上所述，容易导出下述反演公式[③]：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta)\ \mathrm{ctg}\,\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta = \psi(\vartheta_0) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\vartheta)\,d\vartheta, \tag{33.9}$$

---

① 参看 D. Hilbert[2] 第九章第 75 頁.

② 当然，假定了条件(33.6)是适合的.

③ O. D. Kellogg[1] (根据 Hilbert 的讲义).

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}d\vartheta$$

$$=\varphi(\vartheta_0)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)d\vartheta, \tag{33.10}$$

这两个公式应该这样来理解：如果 $\varphi(\vartheta)$ 及 $\psi(\vartheta)$ 都是适合 H 条件的函数，那么，从等式(33.9)，(33.10)中的每一个都可以招致另一个．这种推导留給讀者(与后面公式的推导作一比較)，我們来証明另外的一些反演公式①：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}d\vartheta$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)d\vartheta=\psi(\vartheta_0), \tag{33.11}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}d\vartheta$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)d\vartheta=\varphi(\vartheta_0), \tag{33.12}$$

这些公式亦应该按照上面同样的意义来理解．

例如，我們假定(33.11)成立．在(33.11)两端乘以 $d\vartheta_0$ 后，再从 0 到 2π 积分，利用(*)，我們便得出

$$\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)d\vartheta=\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)d\vartheta,$$

因此，方程(33.11)給出

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}d\vartheta$$

$$=\psi(\vartheta_0)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)d\vartheta=\psi_0(\vartheta_0).$$

---

① 这些公式是由 E. Hellinger 及 O. Toeplitz 的书[1]第 1454 頁上給出的(其中符号上有錯誤)；这两位著者引用了 O. D. Kellogg 的論文[1]．但是，在后一篇論文中，只有公式(33.9)及(33.10)．

因为 $\psi_0(\vartheta)$ 适合条件(33.6)，因此，由上面所讲过的結果，我們有

$$\varphi(\vartheta_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi_0(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}d\vartheta+\text{常数}$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}d\vartheta+C,$$

其中 C 为某个常数. 在前一等式两端乘以 $d\vartheta_0$，并且从 0 到 2π 积分，我們就得出

$$2\pi C=\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\,d\vartheta=\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)d\vartheta.$$

把 C 的这个值代入前一个公式，我們便得出所要求的公式(33.12). 用完全同样的方法亦可以从(33.12)得出(33.11).

第二章

在光滑的封閉圍綫和連續系数情形下的联結問題及奇异积分方程

一类我們叫做（綫性）联結問題[①]的边值問題的求解，在我們所采取的包含 Cauchy 型积分的綫性奇异积分方程（正如在引言中曾經指出过的那样，我們在本书中只討論这一类方程）理論的讲授系統中，具有很重要的意义．在本章的第一部分中，我們将在特定的假定下致力于这类問題的求解，而在第四章中我們再来加以推广．

在第二部分中，我們将要求解另一类我們叫做 Riemann-Hilbert 問題的边值問題．对于一般理論来讲，我們并不需要这一类問題；但是，我們还是导出了它的解，这是因为它的解几乎直接可以由前一个問題导出，又因为这个問題本身亦很重要，而且它还在某些应用中起着很大的作用．

在本章的第三部分中，我們将在特定的假定下从事于上述类型的奇异积分方程理論的叙述，而在第五章中我們再来对这些假定加以推广．

正如前面曾經指出过的那样，联結問題的求解和包含 Cauchy

① 俄文的"задача сопряжения"譯成"联結問題"．赵惠元同志在"数学彈性力学的若干基本問題"一书的中譯本中曾把它譯成"挈合問題"．——譯者注

型积分的奇异积分方程理論之間有着緊密的联系. 但是，应該指出，这一类奇异积分方程的理論可以不牵涉到联結問題(或者类似的問題)，而发展到一定地步. 不过，利用这个問題，就会使得理論变得非常簡单而直观.

上面所讲到的特定假設实质上可以归結为我們在本章（以及后面所得出的某些应用）中所要研究的情形：所考虑的曲綫是由一些(有限条)光滑的封閉圍綫所构成的，而給定在曲綫上的函数是属于 H 类的.

正如前面曾經指出过的那样，我們在第四及第五章中将引进更一般的假定. 在讲解我們所感兴趣的問題时，我們本来可以一开始就从后面这些假定出发，但是，我們宁可按照这里所选定的次序叙述，这是因为对很多应用来讲，仅限于在本章中所采用的假定就足够了，又因为这些假定还可以大大簡化理論①，而且并不致于損害理論的独立性和完整性.

I. 在光滑的封閉圍綫和連續系数情形下的联結問題

§34. 齐次联結問題

1°. 假定 L 表示有限条沒有公共点的簡单的、光滑的封閉圍綫 $L_1, L_2, \cdots, L_p$ 的全体 $(L=L_1+L_2+\cdots+L_p)$②.

下列問題我們叫做**边值的齐次綫性联結問題**，或者簡单地叫做**齐次联結問題**③：

① 其实就联結問題来讲，求解一般情形和求解本章所考虑的情形差不多是同样簡单的；主要区别仅在于：在一般情形下，要用到在§§22～26中所讲过的有关Cauchy型积分在积分曲綫結点邻域内的性质的結果.

② 不难推广到相交圍綫的情形；参看§35中末尾的注釋3.

③ 更一般的提法参看第四章.

要求根据边界条件：

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t) \quad 在 L 上, \tag{34.1}$$

来找一个在无穷远处有有限阶、并且具有边界曲綫 L 的分区全純函数 $\Phi(z)$，此处 $G(t)$ 是給定在 L 上点 t 的函数，它是属于 H 类的，并且在 L 上处处都不取值零.

我們提醒一下，$\Phi^{+}(t)$ 及 $\Phi^{-}(t)$ 通常理解为分别从左側及右側而取得的边值.

函数 $G(t)$ 和曲綫 L 一起規定了已給的問題，我們把函数 $G(t)$ 叫做已給的联結問題的系数.

在这里我們指出下述一点. 如果把构成 L 的某些圍綫的正方向換成反方向，那么，为了使得問題的条件保持不变，在那些圍綫上应該把記号 $\Phi^{+}(t)$ 及 $\Phi^{-}(t)$ 互換，并因此在边界条件(34.1)中系数 $G(t)$ 应該換成 $[G(t)]^{-1}$.

正象我們将要見到的那样，在求解問題时，由公式

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_L=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L \tag{34.2}$$

所确定的(整)数 $\varkappa$ 起着重要的作用，其中記号 $[\ ]_L$ 表示括号內的表示式沿着正方向繞曲綫 L 一周的增量，亦即，繞各个圍綫 $L_k(k=1, 2, \cdots, p)$ 一周的增量之和. 当 t 在 L_k 上时，可以把 $\ln G(t)$ 理解为这个多值函数当 t 在 L_k 上移动时連續变化的任意一个值.

我們把这个数 $\varkappa$ 叫做給定在 L 上的函数 $G(t)$ 的指标，或者亦叫做联結問題的指标.

容易看出，只要問題的条件保持不变，指标的值便与圍綫 L_k 上的正方向之选擇无关，亦即，数 $\varkappa$ 是問題的不变量. 事实上，当圍綫 L_k 中之任意一条的正方向換成它的反方向时，为了使得問題保持不变，函数 $G(t)$ 在那些圍綫 L_k 上的値应該換成値 $[G(t)]^{-1}$；从而，$\ln G(t)$ 換成了 $-\ln G(t)$，因此，当 t 循着正方向繞圍綫 L_k 一周时，$\ln G(t)$ 的增量保持不变.

2°. 对于所考虑的問題之提法、解法及名称，我們作如次之說明：

如果假定 L 是一条簡单的封閉圍綫（亦卽，$p=1$），又若假定 $G(t)$ 是分段常数的函数（当經过 L 上的某些点处时，函数发生跳跃），那么，这个問題便变成了由 Riemann 所提出的一类問題（在第四章中将要讲到这一类問題）的特殊情形．因此，我們把前面所提出的叫做"联結問題"①的問題，通常叫做"Riemann 問題"．但是，D. Hilbert② 首先研究了形式上和上述提法差不多的問題（Götting. Nachrichten, 1905；并且在 D. Hilbert 的书[2]中曾經重行刊載过）．应該指出，Hilbert 是在不够一般的条件下研究这个問題的：他假定了 L 是一条解析圍綫，而 $G(t)$ 具有（关于弧的）連續的二阶导函数．他用了相当复杂的方法，才把这个問題归結为一个 Fredholm 积分方程，而构成这一个方程时，又需要事先找出对由 L 分割平面而得的区域的 Green 函数（这里說的是 Neumann 問題的 Green 函数）；Hilbert 对他所得到的方程并沒有进行过完整的研究．

其实，利用 Cauchy 型积分，可以极初等地得出上述問題完整的解法．在 J. Plemelj 的論文 [1] 的末尾已經給出了这个解法的思想．J. Plemelj 仅考虑了当 L 由一条封閉圍綫所构成，而指标（利用此处的术語；Plemelj 本人并沒有引进过指标的概念）等于零的特殊情形，但是，由这种特殊情形可以非常簡单地推导出一般情形的解③来．

① 这个名称是在著者的书[9]之第三版（1949 年）中才引进的．

② 因此，在本书的第一版中，我曾經把它叫做 Hilbert 問題．这个名称曾为很多著者采用过．某些著者亦曾經应用过"Riemann-Hilbert 問題"这一种叫法；我将这后一个名称应用于別的（但是相近的）問題，这类問題将要在本章第二部分中討論到．有时亦利用其他名称．

③ É. Picard[1] 也曾經討論过我們所感兴趣的这一个問題，为了解决这个問題，他首先作出了两个积分方程，其中之一是（第二类的）Fredholm 方程，而另一个是奇异积分方程；但并沒有研究这两个方程，他后来就利用了和这些方程无关的基本解[和 Plemelj 所用的一样（在同一个特殊情形下）]，但是，他并沒有引用后者的結果．

Ф. Д. Гахов[1],[2] 第一个給出了完整而又完全有效的解法；这个解法在进行一些簡化以后，将在下一节 2° 段中叙述到. Ф. Д. Гахов 本来仅考虑了当 L 由一条封閉圍綫所构成的情形；Б. В. Хведелидзе[2] 給出了 L 是由圍成某个連通区域的一些封閉圍綫所构成的情形之解法；在下一节 3° 段中，我們要讲到这个解法；最后，在 W. Trjitzinsky 的論文[1]中，指出了构成 L 的圍綫 L_1, L_2, $\cdots$, L_p 是任意分布的情形的解法，并还考虑了更一般的情形；在下一节 4° 段中，我們要讲到这个解法.

§ 35. 齐次联結問題的求解

1°. 在后面我們将会見到，找問題的一般解，可以归結为找某个在有限距离內处处都不取值零的特解，这意味着，这个特解在 L 上的边值亦无处取值零. 后面我們将要証明这种特解是存在的，并且我們把它叫做典則解. 我們将会看出(6° 段)，如果不計較异于零的任意常数因子，則由上述条件可以完全确定典則解。

2°. 我們首先考虑当 L 由一条簡单的封閉圍綫构成（亦即，$p=1$）的特殊情形. 依据 L 上的正方向的选法可以分成两种情形：当沿着 L 的正方向移动时，保持在 L 左側的区域 S^+ 是有界区域的情形以及 S^+ 是无界区域的情形. 我們分別用 A 与 B 表示这两种情形①. S^++L 对全平面的余集是一个区域，以后我們将用 S^- 表示这一个区域.

在关系式(34.1)两端取对数，我們便得出

$$[\ln \Phi(t)]^+-[\ln \Phi(t)]^-=\ln G(t). \qquad (*)$$

如果函数 $\ln \Phi(z)$ 在 S^+ 和 S^- 內是全純的，并因此它是单值的，从而函数 $\ln G(t)$ 在 L 上是单值的，那么，用 § 31 中所讲过的方

① 当然，这两种情形中的一个可以直接归結为另一个；仅为了方便起見，我們在下面才对两个情形都写出典則解来，这是由于在应用中常常会遇到它們.

法，再依据这一个关系式，就立可找出 $\ln \Phi(z)$[①]．但是，一般讲来，这并不成立，因此，还需要进行补充的研究．

我們从討論 $\ln G(t)$ 入手．当 t 沿着正方向繞圍綫 L 一周时，函数 $\ln G(t)$ 得到一个等于 $2\pi\varkappa i$ 的增量，其中整数

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_L=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L \tag{35.1}$$

是我們这个特殊情形的**指标**(参看上一节 1° 段)．

設 a 是位于圍綫 L 内部的任一定点(于是，在情形 A 下，$a\in S^+$；在情形 B 下，$a\in S^-$)．我們引进記号

$$G_0(t)=(t-a)^{-\varkappa}G(t) \quad \text{在情形 A 下} \tag{35.2 A}$$

及

$$G_0(t)=(t-a)^{\varkappa}G(t) \quad \text{在情形 B 下.} \tag{35.2 B}$$

显然，当 t 沿着正方向繞圍綫 L 一周时，函数 $\ln G_0(t)$ 回到原来的数值上．因此，任意地取定 $\ln G_0(t)$ 在圍綫 L 上任一点处的值，又要求这个函数在 L 上是連續变化的，我們就可把 $\ln G_0(t)$ 理解为定义在 L 上完全确定的函数；显然，这个函数是适合 H 条件的．

現在再引进新的分区全純函数

$$\Psi(z)=\begin{cases}\Phi(z) & \text{当 } z\in S^+\\ (z-a)^{\varkappa}\Phi(z) & \text{当 } z\in S^-\end{cases} \quad \text{在情形 A 下} \tag{35.3 A}$$

及

$$\Psi(z)=\begin{cases}(z-a)^{\varkappa}\Phi(z) & \text{当 } z\in S^+\\ \Phi(z) & \text{当 } z\in S^-\end{cases} \quad \text{在情形 B 下,} \tag{35.3 B}$$

容易看出，条件(34.1)具有形式

$$\Psi^+(t)=G_0(t)\Psi^-(t). \tag{35.4}$$

为了要找出在 1° 段中所提到的典則解，現在先是純粹形式地来做，我們写出

$$\ln\Psi^+(t)-\ln\Psi^-(t)=\ln G_0(t),$$

---

① Plemelj 正是用了这一种方法(在他指定的特殊假定下)才給出了这个問題的解(参看上节)．

从而，如果假定 $\ln \Psi(z)$ 是(单値的)分区全純函数，并在无穷远处取值零，又若应用 § 31 中所述結果，那么，我們便得出

$$\ln \Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G_0(t)}{t-z}\,dt, \quad \Psi(z)=e^{\Gamma(z)},$$

其中

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G_0(t)}{t-z}\,dt. \tag{35.5}$$

显然，所找出的分区全純函数 $\Psi(z)$ 在无穷远处取値 1，并且处处异于零．直接験証就表明，它是問題(35.4)的(特)解．事实上，从(35.5)可以知道，$\Gamma^+(t_0)-\Gamma^-(t_0)=\ln G_0(t_0)$，其中 t_0 是 L 上的任一点，由此可以推出

$$\frac{\Psi^+(t_0)}{\Psi^-(t_0)}=e^{\ln G_0(t_0)}=G_0(t_0),$$

亦即，(35.4)．利用問題(35.4)已找出的特解，再依据公式(35.3)，立可推出原来問題(34.1)的特解：

$$X(z)=\begin{cases} e^{\Gamma(z)} & \text{当 } z\in S^+ \\ (z-a)^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)} & \text{当 } z\in S^- \end{cases} \quad \text{在情形 A 下}, \tag{35.6 A}$$

$$X(z)=\begin{cases} (z-a)^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)} & \text{当 } z\in S^+ \\ e^{\Gamma(z)} & \text{当 } z\in S^- \end{cases} \quad \text{在情形 B 下}. \tag{35.6 B}$$

以后我們常常会遇到边値 $X^+(t)$, $X^-(t)$；根据 Сохоцкий-Plemelj 公式容易求出这些边値，由 Сохоцкий-Plemelj 公式得出：

$$\Gamma^+(t)=\frac{1}{2}\ln G_0(t)+\Gamma(t), \quad \Gamma^-(t)=-\frac{1}{2}\ln G_0(t)+\Gamma(t),$$

由此再根据(35.6 A)及(35.6 B)，便可以得出

$$X^+(t)=e^{\frac{1}{2}\ln G_0(t)}e^{\Gamma(t)}, \quad X^-(t)=(t-a)^{-\varkappa}e^{-\frac{1}{2}\ln G_0(t)}e^{\Gamma(t)}$$
$$\text{在情形 A 下}, \tag{35.7 A}$$

$$X^+(t)=(t-a)^{-\varkappa}e^{\frac{1}{2}\ln G_0(t)}e^{\Gamma(t)}, \quad X^-(t)=e^{-\frac{1}{2}\ln G_0(t)}e^{\Gamma(t)}$$
$$\text{在情形 B 下}, \tag{35.7 B}$$

根据(35.2 A)及(35.2 B),这些公式还可以改写成

$$X^+(t)=(t-a)^{-\frac{\varkappa}{2}}[G(t)]^{\frac{1}{2}}e^{\Gamma(t)},\qquad X^-(t)=(t-a)^{-\frac{\varkappa}{2}}[G(t)]^{-\frac{1}{2}}e^{\Gamma(t)} \tag{35.8}$$

(在两种情形 A 及 B 下).

在上式右端在 L 上都是連續变化的前提下,同时又在

$$\frac{X^+(t)}{X^-(t)}=G(t)$$

处处成立的前提下,出現在上式右端的双值表示式的值的选法,对这种情形并不重要,这是因为,当 X 换成 $-X$ 时,在这里实际上并不引起什么变化;但是,在某些問題中,要求公式(35.8)正好給出由公式(35.6 A)或者(35.6 B)所确定的函数 $X(z)$ 的边值,而不是函数 $-X(z)$ 的边值;在这些情形下,应該回到公式(35.7 A)及(35.7 B).

我們还指出,边值 $X^+(t)$ 及 $X^-(t)$ 在 L 上是属于 H 类的.

特解 $X(z)$ 或者和它差一个常数(异于零)因子的所有别的解,都是我們要找的典則解(1° 段),这是因为 $X(z)$ 处处(包括曲綫 L 的点在内,无穷远点可能例外)不为零[①],在 L 上异于零是指在 L 上处处都有

$$X^+(t)\neq 0,\quad X^-(t)\neq 0.$$

我們还指出:容易看出,只要 $\ln G_0(t)$ 的值在 L 上是連續变化的,函数 $X(z)$ 便和 $\ln G_0(t)$ 在 L 上的值的选法无关.事实上,$\ln G_0(t)$ 所有别的值和它选定的值仅差一个形式为 $2\pi ik$ 的项,其中 k 为一整数.因此,公式(35.5)的函数 $\Gamma(z)$ 只可能差一个形式为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{2k\pi i\,dt}{t-z}=\begin{cases}0, & \text{当 } z \text{ 在 } L \text{ 外},\\ \pm 2k\pi i, & \text{当 } z \text{ 在 } L \text{ 内}\end{cases}$$

① 当 $\varkappa>0$ 时,$X(\infty)=0$.

的項，于是，表示式 $e^{\Gamma(z)}$ 保持不变.

直接亦容易驗証，函数 $X(z)$ 实际上与点 a 在 L 内部的位置是无关的 (参看本节末尾的注釋 1).

最后，我們指出，$X(z)$ 在无穷远处的阶数恰好等于 $-\varkappa$.

找出典則解以后，容易定出最一般的解；但是，我們宁可立刻对一般情形写出它来(参看后面 5° 段).

3°. 从上面的解法出发，容易导出一般情形下的典則解 (参看后面 4° 段)；但是，我們宁可直接再找出下述特殊情形的典則解①，这是由于在应用中我們常常遇到这种情形.

亦卽，我們現在假定，曲綫 L 是由圍成平面的某个連通部分 (区域) S^+ 的一些封閉圍綫 $L_0, L_1, \cdots, L_p$ 所构成的，並且 L_0 包圍所有别的圍綫(正象 § 29 的 2° 段中那样)(参看第 140 頁图 17)；也正象在 § 29 中那样，我們用 S^- 表示 S^++L 对全平面的余集，並且假定，当沿 L 上的正方向在 L 上移动时，区域 S^+ 保持在 L 的左側.

在这个情形下，典則解的找法和前面完全是类似的. 这就是說，我們用 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_p$ 表示由公式

$$\lambda_k=\frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_{L_k}=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_{L_k},\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ p \tag{35.9}$$

所确定的一些整数，又假定 $\varkappa$ 仍然表示指标(参看上一节 1° 段)：

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_L=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L=\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_p. \tag{35.10}$$

現在設 a_0 为区域 S^+ 内任一定点，又設 $a_1, a_2, \cdots, a_p$ 是分別从圍綫 $L_1, L_2, \cdots, L_p$ 内部任意取定的点. 再設

$$\begin{aligned} \Pi(z)&=(z-a_1)^{\lambda_1}(z-a_2)^{\lambda_2}\cdots(z-a_p)^{\lambda_p},\\ G_0(t)&=(t-a_0)^{-\varkappa}\Pi(t)G(t); \end{aligned} \tag{35.11}$$

① 这个解法是由 Б. В. Хведелидзе[1] 所給出的.

当 t 繞圍綫 $L_0, L_1, \cdots, L_p$ 中的任意一条移动一周时，函数 $G_0(t)$ 的幅角显然回到原来的值.

最后，我們令

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G_0(t)}{t-z}\,dt. \tag{35.12}$$

由此容易看出(参照 2° 段)，分区全純函数

$$X(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Pi(z)}e^{\Gamma(z)} & \text{当 } z\in S^+,\\ (z-a_0)^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)} & \text{当 } z\in S^-\end{cases} \tag{35.13}$$

是問題(34.1)的(特)解，它在有限距离内处处都不取值零，它的边值 $X^+(t)$, $X^-(t)$ 在 L 上亦不为零. 因此，解 $X(z)$ 或者所有和它仅差一个(异于零的)常数因子的解都是典則解.

边值 $X^+(t)$, $X^-(t)$ 在 L 上是属于 H 类的；它們的表示式和表示式(35.7 A)及(35.8)是类似的，并且容易把它們写出来。

容易直接驗証，我們已作出的函数 $X(z)$ 和公式(35.12)中 $\ln G_0(t)$ 的值的选法是无关的(参照 2° 段). 亦容易直接驗証，函数 $X(z)$ 确实和点 $a_0, a_1, \cdots, a_p$ 在对应的区域内的选法是无关的(参照本节末尾的注释 1). 函数 $X(z)$ 在无穷远处的阶数恰好是 $-\varkappa$.

在这一段中我們所得到的全部公式，对圍綫 L_0 不存在的情形(于是，区域 S^+ 是无限的)亦仍然有效；仅需假定在这种情形下 $\lambda_0=0$.

4°. 現在来研究，L 是由任意分布的一些(簡单的，封閉的，光滑的又互不相交的)圍綫 $L_1, L_2, \cdots, L_p$ 所构成的一般情形，并且假定在这些圍綫上已經选定了正方向. 依据在 2° 段中对 L 仅由一条封閉圍綫构成的情形所得出的解，我們来求解在这种情形下的問題(与 W. Trjitzinsky[1]作一比較).

亦就是，我們用 $X_k(z)$ 表示在 L 仅由一条圍綫 L_k 构成时的

齐次联結問題的典則解；用 λ_k 表示对应的指标，容易看出，函数

$$X(z)=X_1(z)X_2(z)\cdots X_p(z) \tag{35.14}$$

是問題(34.1)在 $L=L_1+L_2+\cdots+L_p$ 时的一个解，亦即是在 § 34 中所提出的那样形式的問題的一个解．事实上，依据函数 $X_j(t)$ 的定义，对于圍綫 L_k 上的点 t，有

$$X_k^+(t)=G(t)X_k^-(t), \quad X_l^+(t)=X_l^-(t), \quad l\neq k,$$

这是由于圍綫 L_l 不是函数 $X_k(z)$ 的跳跃曲綫；因此，在构成 L 的圍綫 L_k 中的每一条上，均有 $X^+(t)=G(t)X^-(t)$，而这便是所要証明的．

特解(35.14)(或者所有和它差一个异于零的常数因子的解)是問題(34.1)的典則解，这是由于这个解在有限距离处处都不取値零，边値 $X^+(t)$ 及 $X^-(t)$ 在 L 上亦不为零．

这个解在无穷远处的阶数恰好等于 $-\varkappa$，其中 $\varkappa$ 仍然表示給定在 L 上的函数 $G(t)$ 的指标，亦就是，

$$\varkappa=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{p}[\ln G(t)]_{L_k}=\frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_L$$
$$=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L. \tag{35.15}$$

为了計算在 L 上的边値 $X^+(t)$ 及 $X^-(t)$，我們指出下列一点．如果 $t\in L_k$，那么，函数 $X_1(z), \cdots, X_{k-1}(z), X_{k+1}(z), \cdots, X_p(z)$ 在点 t 处的边値，可以由 z 换成 t 而得出，这是由于 L_k 不是这些函数的跳跃曲綫．因此

$$X^\pm(t)=X_1(t)\cdots X_{k-1}(t)X_k^\pm(t)X_{k+1}(t)\cdots X_p(t), \quad \text{当 } t\in L_k; \tag{35.16}$$

利用在 2° 段中所导出的公式，可計算 $X_k^+(t)$ 及 $X_k^-(t)$.

应該指出，边値 $X^+(t)$, $X^-(t)$ 显然在 L 上处处都适合 H 条件．

5°. 我們現在証明：如果 $X(z)$ 表示典則解，那么，齐次联結問

題的所有解(我們通常所指的只是在无穷远处有有限阶的解)都由公式

$$\Phi(z)=X(z)P(z) \tag{35.17}$$

給出,其中 $P(z)$ 是任意多項式.

事实上,設 $\Phi(z)$ 是任一个解. 由条件,我們有

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t), \quad X^+(t)=G(t)X^-(t),$$

从而,注意到 $X^+(t)\neq 0$, $X^-(t)\neq 0$, 便有

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}.$$

于是,函数 $\frac{\Phi(z)}{X(z)}$ 在全平面上是全純的;但是,它在无穷远处有有限阶;因此,这个函数为多項式,至此,我們的結論便得到了証明.

我們指出下列重要的情况. 因为边值 $X^+(t)$, $X^-(t)$ 在 L 上是屬于 H 类的,因此,依据公式(35.17),显然,我們这个問題的每一个解的边值 $\Phi^+(t)$ 及 $\Phi^-(t)$ 在 L 上都是屬于 H 类的;这当然是我們假定已知函数 $G(t)$ 适合 H 条件的推論.

6°. 从公式(35.17)容易导出下述結論:所有的典則解(在1°段中給出的定义的意义下)都由其中的一个典則解乘以任意(异于零的)常数而得出. 实际上,为了使得解 $\Phi(z)$ 是典則解,必需而且只需在公式(35.17)中的多項式 $P(z)$ 是常数,这是因为如果多項式 $P(z)$ 的次数异于零,那么,函数 $\Phi(z)$ 不可能在有限距离內处处都不取值零.

还应指出下列一点. 如果在公式(35.17)中多項式 $P(z)$ 的次数为 k, 那么,解 $\Phi(z)$ 在无穷远处的阶数恰好等于 $-\varkappa+k$. 于是,这个阶数不小于典則解 $X(z)$ 的阶数 $-\varkappa$; 仅在 $k=0$ 的情形下,亦就是,仅在 $P(z)=$常数$\neq 0$ 的情形下,$\Phi(z)$ 的阶数才等于 $X(z)$ 的阶数.

由上面所讲过的可以知道,除了一个常数因子外,典則解完全可由下列三个性质中的任意一个来表征:

I. 它在有限距离内处处都不取值零.

II. 它在无穷远处有所有可能的最低阶数(等于 $-\varkappa$).

III. 齐次問題的每一个解都可表成形式(35.17).

剛才已經証明过和 I 及 II 对应的結論;和 III 对应的結論几乎显然可从上面得出.

7°. 从应用的角度来看,齐次問題在无穷远处取值零的解特别重要. 我們指出,从上面所讲过的結果直接可以得出的下述命題:

如果 $\varkappa \leqslant 0$, 那么,齐次問題沒有在无穷远处取值零的解(显然解 $\Phi(z)=0$ 应除外); 如果 $\varkappa>0$, 那么,它恰好有 $\varkappa$ 个在无穷远处取值零的綫性无关解:

$$X(z),\ zX(z),\ \cdots,\ z^{\varkappa-1}X(z). \tag{35.18}$$

事实上, 每一个在无穷远处取值零的解, 显然都由公式(35.17)取次数不超过 $\varkappa-1$ 的多項式 $P(z)$ 而給出. 因此, 所有在无穷远处取值零的解,都由公式

$$\Phi(z)=X(z)P_{\varkappa-1}(z)$$

給出,其中

$$P_{\varkappa-1}(z)=C_0z^{\varkappa-1}+C_1z^{\varkappa-2}+\cdots+C_{\varkappa-1},$$

并且 $C_0,\ C_1,\ \cdots,\ C_{\varkappa-1}$ 皆为任意常数.

8°. 有时需要找出在无穷远处是有界的解(不一定在无穷远处取值零). 和前面类似, 容易看出, 当 $\varkappa\leqslant-1$ 时, 齐次問題沒有在无穷远处是有界的解. 当 $\varkappa>-1$ 时, 它恰好有 $\varkappa+1$ 个綫性无关的这种解

$$X(z),\ zX(z),\ \cdots,\ z^{\varkappa}X(z).$$

在这种情形下, 一般解由上段所得出的公式而給出, 但是, 在現在代替其中的 $\varkappa-1$ 应該写成 $\varkappa$.

注釋 1 在 2° 段中在作出典則解 $X(z)$ 时, 我們引进了位在 L 内部的任意点 a. 依据前述結果, 容易看出, 解 $X(z)$ 事实上与点 a 是无关的. 实际上,已經証明,典則解被确定精确到一个常数

因子. 例如,如果再加下述的补充条件:

$$\lim_{z\to\infty} z^{\varkappa} X(z) = 1,$$

它便可以完全确定, 但是, 在 2° 段中作出的函数 $X(z)$ 是适合这个补充条件的. 因此,如果在作出 $X(z)$ 时,我們把点 a 換成位于 L 內部的任意另一点 b, 我們便可得出同一个函数.

通过直接計算亦容易驗証上面所讲过的結果. 事实上, 我們用 $X_a(z)$ 表示在 2° 段中曾經写成 $X(z)$ 的解,又用 $X_b(z)$ 表示作法和 $X_a(z)$ 相同的函数, 但是, 点 a 已換成点 b (b 亦位于圍綫 L 的內部). 为了确定起見,仅討論情形 A(2° 段),根据(35.6 A),(35.5),(35.2 A),我們有

$$\frac{X_b(z)}{X_a(z)} = \begin{cases} e^{[\Gamma_b(z)-\Gamma_a(z)]} & \text{当 } z\in S^+, \\ \left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)^{\varkappa} e^{[\Gamma_b(z)-\Gamma_a(z)]} & \text{当 } z\in S^-, \end{cases}$$

其中

$$\Gamma_a(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln[(t-a)^{-\varkappa}G(t)]\,dt}{t-z},$$

$$\Gamma_b(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln[(t-b)^{-\varkappa}G(t)]\,dt}{t-z},$$

并因此

$$\Gamma_b(z) - \Gamma_a(z) = \frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L \ln\left(\frac{t-a}{t-b}\right)\frac{dt}{t-z},$$

其中 $\ln\left[\dfrac{t-a}{t-b}\right]$ 我們可以理解为在 L 外是全純的, 在无穷远处取值零的函数 $\ln\left[\dfrac{z-a}{z-b}\right]$ 在 L 上所取的值.

但是,由此依据 Cauchy 定理可以知道,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \ln\left(\frac{t-a}{t-b}\right)\frac{dt}{t-z} = \begin{cases} 0 & \text{当 } z\in S^+, \\ -\ln\dfrac{z-a}{z-b} & \text{当 } z\in S^-. \end{cases}$$

从而,将此式代入上式,我們便得出

$$\frac{X_b(z)}{X_a(z)} = 1,$$

于是，便証明了我們的結論.

可以类似地証明与 3° 段中所作出的函数 $X(z)$ 所对应的結論.

注釋 2 具有在 2° 段中所考虑的情形（L 由一条封閉圍綫构成的情形）的典則解的公式，可以有略有不同的形式，亦卽，可将其中位于 L 內部的点 a 换成位于圍綫 L 上的（任意选定的）点 c. 为此我們作出如下. 为了确定起見，只考虑情形 A (2° 段). 在圍綫上任意取一点 c, 并把它和位于 L 內部的点 a 用整个位在 S^+ 內的任一条簡单的連續弧 l 联結起来. $\ln G(t)$ 可以理解为这个函数在圍綫 L (已在点 c 处割开)上連續的任意値，而 $\ln(t-a)$ 可以理解为在沿着弧 l 而割开的区域 S^+ 內是全純的函数 $\ln(z-a)$ 的任一个分枝在 L 上所取得的値. 于是，公式(35.5)可以改写成

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln G(t)\,dt}{t-z}-\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L\frac{\ln(t-a)\,dt}{t-z}.$$

現在注意到，在 2° 段中所作出的函数 $X(z)$ 和点 a 的位置是无关的，又若在連續地縮短割綫 $l=ac$ 的前提下，让点 a 逼近于点 c, 则根据公式(35.6 A)，就容易得出

$$X(z)=\begin{cases} e^{\Gamma(z)} & \text{当 } z\in S^+,\\ (z-c)^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)} & \text{当 } z\in S^-,\end{cases}$$

其中这一次

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln G(t)\,dt}{t-z}-\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L\frac{\ln(t-c)\,dt}{t-z},$$

并且把 $\ln(t-c)$ 应該理解为，在 S^+ 內是全純的函数 $\ln(z-c)$ 的任一个分枝在 L 上所取得的値. 注意到后一情况，再依据 Cauchy 定理①，我們有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln(t-c)\,dt}{t-z}=\begin{cases}\ln(z-c) & \text{当 } z\in S^+,\\ 0 & \text{当 } z\in S^-,\end{cases}$$

由此可知

① 容易看出，当 $z=c$ 时 $\ln(z-c)$ 变成无穷的那个情况沒有意义.

$$X(z)=(z-c)^{-\varkappa}e^{\gamma(z)}, \tag{35.19}$$

其中

$$\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln G(t)\,dt}{t-z}. \tag{35.20}$$

容易直接驗証,这些公式对于 L 上的正方向的任何一种选法(亦即,对 2° 段中所考慮的两种情形 A 及 B)都是正确的.

显然,点 c 虽然出現在上述公式之中,可是,函数 $X(z)$ 在点 c 处却沒有任何奇性;这亦是容易直接驗証的①.

对 3° 段中所考慮过的情形以及一般情形,亦可容易地导出类似的公式.

所有这些公式都是在第四章中所要得出的公式的特殊情形.

注釋 3② 已得出的結果容易推广到,构成曲綫 L 的封閉圍綫 $L_1, L_2, \cdots, L_p$ 可以仅有有限个公共点(亦即,这些圍綫彼此可以相交或者相切)的情形,为簡单起見,我們当然可以把这些点叫做点 c.

在此处我們暫时放弃(1° 段中的)一些条件,依据这些条件,我們应該把构成 L 的各条封閉圍綫,分成彼此除了端点外沒有任何公共点的弧. 在这种情形下,我們把分区全純函数理解为这样的函数:它在用曲綫 L 分割平面而得的每一个連通部分內都是全純的(无穷远点可能例外),又可能除了点 c 外,可以从左側及右側連續拓展到 L 的每一点上,而在点 c 附近,这个函数应該是有界的.

在齐次联結問題的提法中,我們現在把系数 $G(t)$ 可以理解为由下法所确定的函数:在 L_k 上除了点 c 处外,$G(t)=G_k(t)$,其中 $G_k(t)$ 是給定在圍綫 $L_k(k=1, 2, \cdots, p)$ 上,并且在那里是适合 H 条件的函数;在点 c 处函数 $G(t)$ 一般是沒有定义的. 此外,在齐次联結問題的提法中,仅要求在 L 上除了点 c 外处处都适合条件(34.1).

---

① 在 Ф. Д. Гахов[10] §44.2 中,用了略为不同的方法得出了形式为(35.19)的公式.

② 与 W. Trjitzinsky[1] 作一比較.

在这些条件下，本节正文所推得的全部結論都仍然是有效的．正象前面所讲过的那样，我們可以作出典則解 $X(z)$．它处处不取值零，它的边值 $X^+(t)$ 及 $X^-(t)$（t 是曲綫 L 上异于点 c 的点）亦异于零；但是在点 c 附近，函数 $X(z)$ 适合条件：$|X(z)|>$ 常数 >0，并且保持是有界的．

注釋4 在应用中所遇到的很多情形下，典則解可以很簡单地作出为有限形式．

例如，設 L 是一条简单的封閉圍綫，又設 $G(t)$ 是 t 的有理函数．如果用 S^+ 及 S^- 表示由圍綫 L 分割平面而得的区域（并且亦象通常那样区域 S^+ 是在 L 的左側），那么显然，函数

$$X_0(z)=\begin{cases} G(z) & \text{当 } z\in S^+, \\ 1 & \text{当 } z\in S^- \end{cases}$$

适合所要求的边界条件 $X_0^+(t)=G(t)X_0^-(t)$．如果 $G(z)$ 在 S^+ 內的有限距离內沒有零点和极点，那么，$X_0(z)$ 显然便是所要找的典則解．但是，若 $G(z)$ 在 S^+ 內有零点和极点，那么，如果令

$$X(z)=\frac{X_0(z)}{R(z)},$$

我們便得出所要找的典則解 $X(z)$，其中 $R(z)$ 表示有理函数，它的零点和极点，正好就是有理函数 $G(z)$ 在平面的 S^+ 部分在有限距离內的零点和极点（并且重数亦是相同的）①．

这个簡单的結果当然亦可以从一般公式得出，要这样做，只要将出現在其中的积分 $\Gamma(z)$ 計算出来就可以了，而且在現在的情形下，这个积分是容易表成有限形式的．

因为給定在 L 上的每一个連續函数都可以用有理函数以任意精确度来逼近，因此，上面所讲过的結果可以用来找問題的近似解．

---

① 应該指出，这些推导和公式，对于 L、S^+ 及 S^- 是和 § 29，1° 段中表示的相同的更一般情形仍然不变，特別对于本节 3° 段的情形亦是有效的．

在下列更一般的情形下，只需要联系到上面所述方法和在本节 4° 段中所讲过的方法，我們便可以作出典則解来：L 是由一些封閉圍綫 $L_1, L_2, \cdots, L_p$ 所构成的，而

$$G(t)=G_k(t) \quad \text{在 } L_k \text{ 上}, \ k=1, 2, \cdots, p,$$

其中 $G_k(t)$ 是有理函数.

§ 36. 相联的齐次联結問題

我們把对应于边界条件

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t), \ \Psi^+(t)=[G(t)]^{-1}\Psi^-(t) \ (\text{在 } L \text{ 上}) \quad (36.1)$$

的齐次联結問題叫做相联的齐次联結問題.

从上一节的結果直接可以推知：如果 $\varkappa$ 是这两个問題中的一个的指标，那么，另一个問題的指标是 $-\varkappa$，又若 $X(z)$ 是一个問題的典則解，那么，$[X(z)]^{-1}$ 是另一个問題的典則解.

特別，根据上一节 7° 段中所讲的結果，我們断定，如果已給的齐次問題的指标 $\varkappa$ 是負的，那末，它的相联齐次問題恰好有 $-\varkappa$ 个在无穷远点取値零的綫性无关解：

$$\frac{1}{X(z)}, \ \frac{z}{X(z)}, \ \cdots, \ \frac{z^{-\varkappa-1}}{X(z)}, \quad (36.2)$$

其中 $X(z)$ 是已給的齐次問題的典則解.

§ 37. 非齐次联結問題

1°. 我們把下述边値問題叫做非齐次联結問題：

要求根据边界条件：

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t) \quad \text{在 } L \text{ 上}, \quad (37.1)$$

来找一个在无穷远处具有有限阶的、以 L 为边界曲綫的分区全純函数 $\Phi(z)$，此处 $G(t)$ 和 $g(t)$ 为定义在 L 上属于 H 类的函数，并且在 L 上处处都有 $G(t)\neq 0$（其他記号和 § 34 中的是相同的）.

亦象在齐次問題的情形中那样，我們把函数 $G(t)$ 叫做联結問

題的系数,而函数 $g(t)$ 則称做联結問題的自由項.

这个問題是齐次联結問題的一个自然推广,首先由 И. И. Привалов[3] 研究过它(問題的提法稍有不同)①;但是,他沒有能怎样完整地解决这个問題②. 最早还是由 Ф. Д. Гахов[1], [2] 才給出了問題的解;在这里我們要讲到这个解法(作了一些推广)③.

应該指出,在 И. И. Привалов 和 Ф. Д. Гахов 之前,T. Carleman[1] 在一种特殊情况下④,解决了类似于这里所研究的問題;Ф. Д. Гахов 解决問題的方法,在实质上和 T. Carleman 的方法是类似的.

根据前面几节所讲过的結果,立即可以得出所提出問題的解.

亦就是,設 $X(z)$ 是当 $g(t)=0$ 时从 (37.1) 得出的齐次問題的典则解. 于是,由等式 $X^+(t)=G(t)X^-(t)$ 可以知道,

$$G(t)=\frac{X^+(t)}{X^-(t)}.$$

把 $G(t)$ 的这个值代入(37.1)中,我們得出

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}-\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}=\frac{g(t)}{X^+(t)}.$$

函数 $\frac{\Phi(z)}{X(z)}$ 在无穷远处有有限阶. 因此,利用在 §31 中所讲过的結果,我們便得出

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(t)\,dt}{X^+(t)\,(t-z)}+P(z),$$

其中 $P(z)$ 为任意多項式,从而

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L\frac{g(t)\,dt}{X^+(t)\,(t-z)}+X(z)P(z). \qquad (37.2)$$

---

① И. И. Привалов 所研究的是下列情形:L 为一条可求长的封閉圍綫,而 $G(t)$ 和 $g(t)$ 是 Lebesgue 可积函数,并且 $0<m<|G(t)|<M$,此处 m 及 M 都是常数. 对 $\Phi(z)$ 只要求沿着任何一条非切綫的路徑能取得边値.

② И. И. Привалов 用了 É. Picard 想用来解决齐次問題的方法;我們所指的是第 160 頁注中所讲到的第一种方法.

③ 上述 Ф. Д. Гахов 的論文中,仅研究了 L 由一条封閉圍綫所构成的情形.

④ 参看第四章.

这亦就是非齐次联結問題的一般解. 函数 $X(z)$ 是由 (37.1) 取 $g(t)\equiv 0$ 而得的齐次問題的典則解,我們将把它叫做与所考虑的非齐次問題对应的典则函数; 我們把齐次問題对应的指标 $\varkappa$ 叫做这个問題的指标.

2°. 从应用的观点来考虑,最有用的还是非齐次問題在无穷远处取值零的解.

我們来闡明这种解存在的可能性, 并且把这种解求出来. 注意到, $X(z)$ 在无穷远处的阶数恰好等于 $-\varkappa$, 我們看出, 当 $\varkappa\geqslant 0$ 时,当且仅当 $P(z)$ 为次数不超过 $\varkappa-1$ 的多项式(并且在 $\varkappa=0$ 时, $P(z)\equiv 0$)的情形,解(37.2)才在无穷远处取値零.

当 $\varkappa<0$ 时,我們显然应該取 $P(z)\equiv 0$, 此外,还要求在展开式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)\,(t-z)} = -\frac{z^{-1}}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)} - \frac{z^{-2}}{2\pi i}\int_L \frac{tg(t)\,dt}{X^+(t)} + \cdots$$

中, z^{-1}, z^{-2}, $\cdots$, $z^{-\varkappa}$ 的系数都等于零. 这样一来, 我們就得出下列結果:

如果 $\varkappa\geqslant 0$, 那么非齐次联結問題(37.1)在无穷远处取値零的一般解可由以下的公式給出:

$$\varPhi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)\,(t-z)}+X(z)P_{\varkappa-1}(z), \qquad (37.3)$$

其中 $P_{\varkappa-1}(z)$ 是次数不超过 $\varkappa-1$ 的任意多项式 [当 $\varkappa=0$ 时, $P_{\varkappa-1}(z)\equiv 0$].

如果 $\varkappa<0$, 那么,当且仅当适合条件:

$$\int_L \frac{t^k g(t)}{X^+(t)}\,dt=0, \quad k=0, 1, \cdots, -\varkappa-1 \qquad (37.4)$$

时,才有在无穷远处取値零的解,并且这个解由下列公式給出:

$$\varPhi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)\,(t-z)}. \qquad (37.5)$$

我們指出，当 $\varkappa=0$ 时，一定有而且只有一个在无穷远处取値零的解；当 $\varkappa<0$ 时，如果在无穷远处取値零的解存在，那么，它亦必然是唯一的；当 $\varkappa>0$ 时，总有无穷多个解(亦即，一般解包含 $\varkappa$ 个任意常数).

3°. 有时要求找出在无穷远处仅是有界的解(从而在全平面上亦是有界的解). 在这种情形下，我們显然有下列結果：当 $\varkappa\geqslant-1$ 时，問題的一般有界解由公式(37.3)給出，其中 $P_{\varkappa-1}(z)$ 应改写为 $P_{\varkappa}(z)$，并假定当 $\varkappa=-1$ 时，$P_{\varkappa}(z)=0$. 当 $\varkappa<-1$ 时，仅当条件(37.4)适合(其中这次应該认为 $k=0, 1, \cdots, -\varkappa-2$) 时，才有有界解存在. 在这些条件下，解由公式 (37.5) 給出. 当 $\varkappa=-1$ 时，問題一定有一个而且只有一个有界解.

4°. 如果两个联結問題所对应的齐次問題在 § 36 中所給出的定义的意义下是相联的，我們就把这两个联結問題叫做是相联的联結問題.

如果把已給問題(37.1)的相联齐次問題列入討論，那么，条件(37.4)可以表成形式

$$\int_{L}\psi_{k}^{+}(t)g(t)dt=0,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa, \tag{37.6}$$

其中函数 $\psi_{k}^{+}(t)$ 是函数 $\psi_{k}(z)$, $k=1, 2, \cdots, -\varkappa$ 的边値，而 $\psi_{k}(z)$, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa$ 则构成已給問題的相联齐次問題在无穷远处取値零的綫性无关解的完备系.

这个結果直接可以从公式(37.4)和(36.2)得出.

注釋 1　在齐次以及非齐次联結問題的提法中，我們特别区分出无穷远点，并且假定所要找的解在无穷远点有奇异性，亦即，有极点. 从前面明显地可看到，在以后亦会証实的，从一系列的推导和应用的观点来看，这种假定极为方便. 但是，不言而喻，我們标出要找的解是在无穷远点处，还是在不位在 L 上的任何别的点处有极点，都不重要；亦可以让所要找的解不在一点处，而在几个点

处有极点. 我們单讲在无穷远点处有极点，是由于在大多数应用中这实际上更为方便.

注釋 2 把本节的結果推广到构成 L 的圍綫 L_k 可以有公共点(有限个)的情形并沒有任何困难，参照 §35 末尾的注釋 3.

§38. 边界曲綫为直綫情形的联結問題

1°. 在整个这一本书中，除了少数的例外，我們不单独地研究当边界曲綫延伸至无穷远处的情形，因为利用簡单的分式綫性变换，可以把这个情形归結为有限边界曲綫的情形. 当然，此时应該要求原来的边界曲綫，在映射以后，适合我們在求解这种或那种問題时用到的条件.

2°. 在这里我們考虑边界曲綫为无穷长直綫 D 的情形，作为最簡单的但实际上是重要的例子；为了簡单起見，我們将假定 D 是实軸. 我們用 S^+ 及 S^- 分别表示上半平面及下半平面.

这种情形下的联結問題，我們将叙述如下：

要求根据边界条件

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t) \quad 在 D 上, \tag{38.1}$$

来找一个以 D 为跳跃曲綫的分区全純函数 $\Phi(z)$，$\Phi(z)$ 在全平面上，可能除了已知点 a_0 的邻域外，处处都是有界的（点 a_0 不位在 D 上[①]），$\Phi(z)$ 在点 a_0 处可能有极点，而 $G(t)$ 及 $g(t)$ 是定义在 D 上，又在 D 上处处都适合 H 条件的函数，并且 $G(t)\neq 0$；无穷远点包括在 D 内.

我們把整数

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_D=\frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_{-\infty}^{+\infty} \tag{38.2}$$

叫做这个問題的指标或者函数 $G(t)$ 的指标，其中 $[\ln G(t)]_{-\infty}^{+\infty}$ 应

① 比照上一节末尾的注釋 1. 在这里我們不能取 $z=\infty$ 当作这样的点，这是因为在我們这个情形下，点 $z=\infty$ 位在边界曲綫上.

理解为 $\ln G(t)$ 当点 t 沿着直綫 D 从 $t=-\infty$ 变动到 $t=+\infty$ 时的增量. 我們提醒一下,依据对 $G(t)$ 所加的条件[1],我們有

$$G(+\infty)=G(-\infty)\neq 0.$$

3° 为了把所討論的問題归結为有限边界曲綫的情形, 例如, 我們可以应用在 § 19, 3° 段中曾經指出的下列分式綫性变换:

$$z+i=-\frac{1}{\zeta+i}, \text{ 亦即, } z=-\frac{i\zeta}{\zeta+i}. \qquad (38.3)$$

提醒一下,利用这个映射,可以把 z 平面上的直綫 D 映射成 ζ 平面上的中心在点 $\zeta=-\frac{i}{2}$ 处,又和实軸相切于原点的圓周 L. 当点 t 沿着正方向描繪 z 平面上的直綫 D 时, ζ 平面上由等式

$$\tau+i=-\frac{1}{t+i} \qquad (38.3a)$$

所确定的和它对应的点 τ, 沿着下述方向描繪出圓周 L: 把这个方向取作 L 的正方向时,由 L 所包圍的圓域保持在 L 的左側. 我們用 Σ^+ 表示这个圓域,而用 Σ^- 表示 Σ^+ 外部的平面部分.

保角映射(38.3)把区域 S^+ 及 S^- 分別映射成区域 Σ^+ 及 Σ^-; 同时点 $z=\infty$ 对应于点 $\zeta=-i$, 而点 $\zeta=\infty$ 則对应于点 $z=-i$.

为了不使公式的表面形式复杂化, 我們簡单地用 $\Phi(\zeta)$ 表示函数

$$\Phi(z)=\Phi\left(\frac{-i\zeta}{\zeta+i}\right);$$

对函数 $G(t)$ 和 $g(t)$ 以及以后遇到的其他函数, 亦作同样的处理.

利用这些記号,边界条件(38.1)可以写成

$$\Phi^+(\tau)=G(\tau)\Phi^-(\tau)+g(\tau) \quad \text{在 } L \text{ 上}. \qquad (38.4)$$

最簡单是取点 $\zeta=\infty$ 所对应的点 $a_0=-i$ 当作点 $z=a_0$, 而函数 $\Phi(z)$ 可以在点 $z=a_0$ 处有极点;这显然并不破坏一般性.

对 $\Phi(\zeta)$ 这样选定的边值問題,正好和上一节中所研究过的联

---

[1] 特别是,对于无穷远点的邻域内的 H 条件.

結問題的特殊情形是重合的，亦即，正好和边界曲綫是一条簡单的封閉圍綫（在現在的情形下，它是圓周）的特殊情形是重合的．因此，我們可以直接利用已經导出的那些公式．

依据公式(35.6 A)及(35.5)，(35.2 A)，可以計算出典則函数$X(\zeta)$[精确到差一个任意的（不为零的）常数因子]．亦即，如果在公式(35.2 A)中取圓周L的中心$\left(\text{亦即，点 } a=-\frac{i}{2}\right)$当作点$a$，我們就有

$$X(\zeta)=\begin{cases} e^{\Gamma(\zeta)} & \text{当 } \zeta\in\Sigma^+, \\ \left(\zeta+\frac{i}{2}\right)^{-\varkappa}e^{\Gamma(\zeta)} & \text{当 } \zeta\in\Sigma^-, \end{cases} \tag{38.5}$$

其中

$$\Gamma(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln G_0(\tau)d\tau}{\tau-\zeta},\quad G_0(\tau)=\left(\tau+\frac{i}{2}\right)^{-\varkappa}G(\tau). \tag{38.6}$$

齐次問題（亦即，取$g(\tau)=0$而得出的問題）的在无穷远处有有限阶的一般解，可由公式

$$\Phi(\zeta)=X(\zeta)P(\zeta) \tag{38.7}$$

給出，其中$P(\zeta)$是任意多項式．为了对下面的公式作某些簡化，适当地假定这个多項式是按照$\zeta+\frac{i}{2}$的幂而展开的，亦即，把它表成形式

$$P(\zeta)=A_0+A_1\left(\zeta+\frac{i}{2}\right)+\cdots+A_n\left(\zeta+\frac{i}{2}\right)^n. \tag{38.8}$$

非齐次問題的在无穷远处有有限阶的一般解可由下述公式給出(§ 37)：

$$\Phi(\zeta)=\frac{X(\zeta)}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)d\tau}{X^+(\tau)(\tau-\zeta)}+X(\zeta)P(\zeta). \tag{38.9}$$

这样一来，可以认为問題已經解决了，这是由于在求出$\Phi(\zeta)$以后，再依据公式(38.3)变回到原来的变量z，我們就可以求得$\Phi(z)$．

4°. 我們現在来說明处处都是有界的解的存在性問題，这一类

解在某些应用中会遇到.

依据公式 (38.9) 及函数 $X(\zeta)$ 的形式, 容易得出下述結論 (参照 § 37, 3° 段):

当 $\varkappa \geqslant -1$ 时, 总存在处处都是有界的解; 它們由公式(38.9)給出,其中当 $n=\varkappa$ 时, 把 $P(\zeta)$ 应該理解为形式为 (38.8) 的任意多項式,当 $\varkappa=-1$ 时,认为 $P(\zeta)\equiv 0$. 在后一种情形下,問題有一个且只有一个有界的解.

当 $\varkappa<-1$ 时,仅当适合条件

$$\int_L\left(\tau+\frac{i}{2}\right)^k \frac{g(\tau)\,d\tau}{X^+(\tau)}=0, \quad k=0,\,1,\,\cdots,\,-\varkappa-2 \qquad (38.10)$$

时,才存在有界的解;当适合这些条件时,問題有唯一的有界的解,并且这个解可由公式(38.9)取 $P(\zeta)\equiv 0$ 而給出.

和在 § 37 中得出的条件完全类似地可以得出条件 (38.10); 只是在这一次我們应該按 $\zeta+\frac{i}{2}$ 的降冪,而不是按 ζ 的降冪把公式(38.9)中的积分展开. 当然,正象在 § 37, 3° 段中那样,可以写出和条件(38.10)等价的条件,但是,从已知的角度来看,在現在的情形下,这不甚方便.

5°. 我們現在不利用輔助变量 ζ 把已得到的解表出; 虽然, 从实用的观点来看, 有时适宜于利用解的在上面已得出的形式, 但是,这种表示法仍有一定的意义.

我們現在把公式(19.16)及(19.17)写成

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{z+i}{t+i}\,\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}+A, \qquad (38.11)$$

其中

$$A=-\frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\varphi(t)\,dt}{t+i}; \qquad (38.11\text{a})$$

此处,和前面类似地,我們把 $\varphi\left(\frac{-it}{t+i}\right)$改記作 $\varphi(t)$. 如果应用由公

式(19.16)及(19.17)改写而得的公式(38.11)及(38.11a)，便很容易地回复到变量 z.

我們現在把公式(38.5)及(38.6)变成变量 z 的公式. 我們有

$$\zeta+\frac{i}{2}=-\frac{i}{2}\frac{z-i}{z+i}, \quad \tau+\frac{i}{2}=-\frac{i}{2}\frac{t-i}{t+i}.$$

容易看出，我們可以在公式(38.5)，(38.6)中把表示式 $\zeta+\frac{i}{2}$ 及 $\tau+\frac{i}{2}$ 用表示式

$$2i\left(\zeta+\frac{i}{2}\right)=\frac{z-i}{z+i}, \quad 2i\left(\tau+\frac{i}{2}\right)=\frac{t-i}{t+i}$$

替代，而結果并不变，这是因为經过这种变换以后，函数 $X(\zeta)$ 仅增加一个异于零的常数因子.

因此，利用公式(38.11)，并在 $\Gamma(z)$ 的表示式中抛去常数項，亦即 $X(z)$ 也仅改变常数因子，我們即得出

$$X(z)=\begin{cases} e^{\Gamma(z)} & \text{当 } z\in S^{+}, \\ \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^{\varkappa} e^{\Gamma(z)} & \text{当 } z\in S^{-}, \end{cases} \tag{38.12}$$

其中

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{D}\frac{\ln G_0(t)\,dt}{t-z}, \quad G_0(t)=\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa}G(t). \tag{38.13}$$

其次，利用公式(38.11)，公式(38.9)就給出在点 $z=-i$ 处可能有极点的一般解的表示式:

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{D}\frac{g(t)\,dt}{X^{+}(t)(t-z)} - \frac{X(z)}{2\pi i}\int_{D}\frac{g(t)\,dt}{X^{+}(t)(t+i)}+X(z)Q(z), \tag{38.14}$$

其中 $Q(z)$ 是关于 $\frac{z-i}{z+i}$ 的任意多項式:

$$Q(z)=C_0+C_1\frac{z-i}{z+i}+\cdots+C_n\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n, \tag{38.15}$$

其中 $C_0, C_1, \cdots, C_n$ 都表示任意常数.

当然，由于常数 C_0 的任意性，公式(38.14)右端的第二項可以删去，但是，为了叙述有关处处是有界的解的存在性的結果，保留它較为方便.

6°. 最后，对于处处都保持有界的解，在 4° 段中已經得出的結果，可以叙述如下：

当 $\varkappa \geqslant -1$ 时，总存在处处都是有界的解；如果事先約定好当 $\varkappa=-1$ 时 $Q(z)=0$，則这种解可由公式(38.14)給出，其中当 $\varkappa=n$ 时，$Q(z)$ 为形式为 (38.15) 的表示式，而 $C_0, C_1, \cdots, C_\varkappa$ 是任意的. 我們指出，当 $\varkappa \geqslant 0$ 时，(38.14)右端第二項显然可以删去.

当 $\varkappa < -1$ 时，仅当适合由(38.10)导出的条件：

$$\int_D \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)\,(t+i)^2}=0, \quad k=0, 1, \cdots, -\varkappa-2 \tag{38.16}$$

时，才存在处处都是有界的解；当适合这些条件时，(唯一) 解由公式(38.14)取 $Q(z)=0$ 而給出.

注釋 所提出的問題的解，可以不利用輔助变量 ζ 而直接得出，Ф. Д. Гахов[10]，§ 14.7 就曾經这样做过. 有界解的存在性条件具有略有不同的形式，但是，容易驗証，它們和条件(38.16)是等价的.

II. Riemann-Hilbert 問題

在这一部分中，我們将給出一类具有很大实际价值的边值問題的解法，并把它当作前面所得出的結果的直接应用. 在本书以后各部分中，仅在求解某些个别的实际問題时①，我們才用到这里所叙述的結果，因此，为了掌握本书的基本內容，我們并不一定要求熟悉它.

① 在 § 68, § 69, § 94, § 95 中用到它. ——譯者注

§39. 将給定在圓域或半平面上的解析函数拓展到全平面上的問題

在我們所研究的联結問題中，未知函数 $\Phi(z)$ 是全平面上的分区全純函数，而在边界条件中則出現了这个函数从边界的两侧而取得的边值.

但是，在很多重要問題中，我們要研究的是在平面的一个部分內为全純的未知函数，并且在边界条件中不仅出現了未知函数本身的边值，而且还出現了它的复值共軛函数的边值.

用把未知的全純函数扩充成在全平面上(除了边界外)有定义的分区全純函数的方法，通常可以有成效地把后一类型的边值問題归結为前一类型的边值問題.

可以用无穷多种方法，把一个在已知区域內是全純的、又可以連續到边界上的函数，扩充成一个在全平面上有定义的分区全純函数(例如，在函数原先沒有定义的那一平面部分內，可以規定它的值都等于零). 但是，我們現在所要讲到的几种把函数扩充或者拓展到全平面上去的方法都是非常有用的[①]. 这些方法是涉及到給定在圓域、圓外域或者半平面上的解析函数的.

1°. 給定在半平面上的函数.

用 S^+ 表示上半(下半)平面 $y>0(y<0)$，而 D 是它的边界(亦即，Ox 軸)；我們将用 S^- 表示下半(上半)平面.

假定 $\Phi(z)$ 是給定在半平面 S^+ 內点 z 的函数、与函数 $\Phi(z)$ 一起，用下列关系式确定在 S^- 內的函数 $\Phi_*(z)$：

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi(\bar{z})};\tag{39.1}$$

这样一来，根据定义，在对于 Ox 軸是共軛的点上(亦即，点 $z=x+iy$，$\bar{z}=x-iy$，它們之中的每一个点是另一个点对于 Ox 的鏡反射)，函

① 在著者的书[9]中，还讲到了对某些具体問題适用的别的扩充方法；在本书中以及在著者的书[1]中，还可以找到将函数拓展到全平面上去的方法之一系列应用.

数 $\Phi(z)$ 与 $\Phi_*(z)$ 取复的共軛值. 我們还可以把公式(39.1)写成

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi}(z), \tag{39.2}$$

我們規定:把函数 $\overline{\Phi}(z)$ 理解为由下列公式所确定的函数:

$$\overline{\Phi}(z)=\overline{\Phi(\overline{z})}; \tag{39.3}$$

換句話說,如果 $\Phi(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, 那么,由定义可知,

$$\overline{\Phi}(z)=u(x, -y)-iv(x, -y). \tag{39.3a}$$

容易看出,如果函数 $\Phi(z)$ 在半平面 S^+ 内是全純的或者是半純的,那么,$\Phi_*(z)=\overline{\Phi}(z)$ 在半平面 S^- 内将是全純的或者是半純的①,并且关系式(39.1)对于 $\Phi_*(z)$ 及 $\Phi(z)$ 是对称的,亦即,

$$\Phi(z)=\overline{\Phi_*(\overline{z})}, \quad [\Phi_*(z)]_*=\Phi(z). \tag{39.4}$$

有益地指出,如果 $\Phi(z)$ 是有理函数

$$\Phi(z)=\frac{a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\cdots+b_n},$$

那么,把 $\Phi(z)$ 的系数直接换成它們的共軛复数,便可以得出

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi}(z).$$

現在假定,当 z 从 S^+ 内趋于 t 时,函数 $\Phi(z)$ 取得确定的边值 $\Phi^+(t)$, 其中 t 是 Ox 軸上的点,亦即, t 是实数. 于是, $\Phi_*^-(t)$ 亦存在,并且

$$\Phi_*^-(t)=\overline{\Phi}^-(t)=\overline{\Phi^+(t)}, \tag{39.5}$$

这是由于,当 z 从 S^- 内趋于 t 时, $\overline{z}$ 从 S^+ 内趋于 t, 并由此可知, $\Phi_*(z)=\overline{\Phi(\overline{z})}$ 趋于 $\overline{\Phi^+(t)}$.

为了簡单起見,我們假定,函数 $\Phi(z)$ 在 S^+ 内是全純的, 并且可以連續拓延到 D 上,无穷远点可能例外.

---

① 一般讲来,如果函数 $\Phi(z)$ 在某一个区域 σ^+ 内是全純的,那么,函数 $\overline{\Phi}(z)$ 在区域 σ^- 内是全純的,此处 σ^- 是区域 σ^+ 对于 Ox 軸对称的区域. 这可从下述推出,如果函数 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 适合 Cauchy-Riemann 条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

那么,当把 $u(x, y)$, $v(x, y)$ 分別換成 $u(x, -y)$, $v(x, -y)$ 时,这些条件仍然是适合的.

我們用 $\Omega(z)$ 来代表这样定义的分区全純函数:

$$\Omega(z)=\begin{cases}\Phi(z) & \text{当 } z\in S^+,\\ \Phi_*(z) & \text{当 } z\in S^-.\end{cases} \tag{39.6}$$

于是,依据(39.5),显然

$$\Omega^-(t)=\overline{\Omega^+(t)},\quad \Omega^+(t)=\overline{\Omega^-(t)}. \tag{39.7}$$

利用这些关系式可以将包含 $\Phi^+(t)$ 和 $\overline{\Phi^+(t)}$ [或者包含 $\Phi^-(t)$ 和 $\overline{\Phi^-(t)}$]的(任一个問題的)边界条件換成包含 $\Omega^+(t)$ 和 $\Omega^-(t)$ 的边界条件.

我們再指出上述拓展函数 $\Phi(z)$ 的方法的一个重要性质:**如果 $\Phi^+(t)$ 的虛部在 Ox 軸的任一綫段上取值零,那么,函数 $\Phi_*(z)$ 将是函数 $\Phi(z)$ 經过这一綫段的解析拓展.** 这个性质不是别的,正是著名的 Schwartz 的"对称原理". 这个性质可以直接由 §10 中証明过的命題推出,这是由于在現在的情形下,依据公式(39.5),在上面所提到的綫段上 $\Phi_*^-(t)=\Phi^+(t)$.

上面引进的表示法不仅对于給定在半平面上的函数可以应用. 假設 $\Psi(z)$ 是具有跳跃曲綫 D (Ox 軸) 的分区全純函数, 那么, 我們可以用 $\Psi_*(z)$ 表出由下法确定 (对所有不位在 D 上的点 z) 的另一个分区全純函数:

$$\Psi_*(z)=\overline{\Psi(\bar{z})}=\overline{\Psi}(z);$$

显然,亦应該有

$$\Psi(z)=\overline{\Psi_*(\bar{z})}=\overline{\Psi}_*(z).$$

特别是, 由公式 (39.6) 所确定的分区全純函数 $\Omega(z)$, 显然具有性质:

$$\Omega_*(z)=\Omega(z); \tag{39.8}$$

对于任意的分区全純函数 $\Psi(z)$, 一般讲来,这并不成立.

容易看出,类似于(39.5),有

$$\Psi_*^-(t)=\overline{\Psi^+(t)},\quad \Psi_*^+(t)=\overline{\Psi^-(t)}. \tag{39.5a}$$

最后, 指出下列重要公式. 假設分区全純函数可以由一个

Cauchy 型积分来表示:

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{\varphi(t)dt}{t-z}\quad (D\text{ 是实軸}),\tag{39.9}$$

此处展布在无穷限之間的积分是按照 Cauchy 主值 (§ 19) 的意义来理解的.

我們要找出 $\Psi_*(z)$ 的表示式. 依据定义,我們有

$$\Psi_*(z)=\overline{\Psi(\bar{z})}.$$

但是,

$$\Psi(\bar{z})=\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{\varphi(t)dt}{t-\bar{z}},$$

因此有

$$\Psi_*(z)=\overline{\Psi}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{\overline{\varphi(t)}dt}{t-z}.\tag{39.10}$$

2°. 給定在圓域上或者給定在具有圓孔的平面上的函数.

現在假定用 S^+ 表示区域 $|z|<1$(或者区域 $|z|>1$), 而用 S^- 表示区域 $|z|>1$ (或者,对应地 $|z|<1$), 又設 L 是这些区域的公共边界,亦卽,圓周 $|z|=1$.

設 $\Phi(z)$ 是給定在 S^+ 內的函数. 完全类似于半平面情形的做法, 我們比照这个函数确定出定义在 S^- 內的一个函数 $\Phi_*(z)$, 区别仅在于在現在把共軛点理解为对于圓周 L 的共軛点, 亦卽是点 z 和 $\frac{1}{\bar{z}}$. 与此相应,我們定出函数 $\Phi_*(z)$ 如下:

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)},\tag{39.11}$$

或者,如果引用上面引进的記号:

$$\overline{\Phi}(z)=\overline{\Phi(\bar{z})},$$

$\Phi_*(z)$ 亦可以定义为

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right).\tag{39.12}$$

关系式(39.11)是对称的，亦即，由它可以推出：

$$\Phi(z)=\overline{\Phi_*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad [\Phi_*(z)]_*=\Phi(z). \tag{39.13}$$

如果函数 $\Phi(z)$ 在 S^+ 内是全純的或者是半純的，那么，函数 $\Phi_*(z)$ 在 S^- 内是全純的或者是半純的. 特别是，如果

$$\Phi(z)=\frac{a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\cdots+b_n},$$

那么，

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\bar{a}_0z^{-m}+\bar{a}_1z^{-m+1}+\cdots+\bar{a}_m}{\bar{b}_0z^{-n}+\bar{b}_1z^{-n+1}+\cdots+\bar{b}_n}.$$

再者，如果

$$\Phi(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_kz^k \qquad \text{在 } S^+ \text{ 內},$$

那么，

$$\Phi_*(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\bar{a}_kz^{-k} \quad \text{在 } S^- \text{ 內}.$$

容易看出，如果 $\Phi(z)$ 在 $z=0\,(z=\infty)$ 处有 k 阶极点(零点)，那末，$\Phi_*(z)$ 在 $z=\infty\,(z=0)$ 处也有同样阶数的极点(零点).

現在假定，当 z 从 S^+ 內趋于 L 上的 t 时，$\Phi(z)$ 取确定的边界值 $\Phi^+(t)$. 那么，$\Phi_*^-(t)$ 必然存在，且

$$\Phi_*^-(t)=\overline{\Phi}^-\left(\frac{1}{t}\right)=\overline{\Phi^+(t)}, \tag{39.14}$$

这是因为，当 z 从 S^- 內趋于 t 时，则 $\frac{1}{\bar{z}}$ 从 S^+ 內也趋于 t，因此

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right)=\overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

趋于 $\overline{\Phi^+(t)}$.

为了簡单起見，我們現在假定函数 $\Phi(z)$ 在 S^+ 內是全純的(无穷远点可能例外)，并且可以連續拓展到 L 上.

和前面类似地，我們用 $\Omega(z)$ 表示分区全純函数：

$$\Omega(z)=\begin{cases}\Phi(z) & \text{当 } z\in S^+,\\ \Phi_*(z) & \text{当 } z\in S^-.\end{cases} \tag{39.15}$$

那么,显然,也正象 1° 段中那样,有

$$\Omega^-(t)=\overline{\Omega^+(t)},\quad \Omega^+(t)=\overline{\Omega^-(t)}. \tag{39.16}$$

再者,亦象在半平面的情形那样,如果 $\Phi^+(t)$ 的虚部在圆周 L 的某一段弧上取值零,那么,$\Phi_*(z)$ 是函数 $\Phi(z)$ 經过这一段圆弧的解析延拓(Schwartz 对称原理).

也象在 1° 段中那样,記号 $\Psi_*(z)$ 可以对任意的分区全純函数 $\Psi(z)$ 来应用,如果假設

$$\Psi_*(z)=\overline{\Psi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}=\overline{\Psi}\left(\frac{1}{z}\right);$$

那么,显然,也有

$$\Psi(z)=\overline{\Psi_*\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}=\overline{\Psi}_*\left(\frac{1}{z}\right).$$

前面引进的分区全純函数 $\Omega(z)$ 具有以下的性质:

$$\Omega_*(z)=\Omega(z). \tag{39.8a}$$

容易看出,类似于(39.14)

$$\Psi_*^-(t)=\overline{\Psi^+(t)},\quad \Psi_*^+(t)=\overline{\Psi^-(t)}. \tag{39.14a}$$

最后,我們假定 $\Psi(z)$ 可以由 Cauchy 型积分表出:

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}\quad (L\text{ 是圆周 }|z|=1). \tag{39.17}$$

那末,

$$\Psi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-\frac{1}{\bar{z}}},$$

$$\Psi_*(z)=\overline{\Psi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}=-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\varphi(t)}\,\overline{dt}}{\bar{t}-\frac{1}{z}}.$$

注意到在圆周 L 上我們有

$$t=e^{i\vartheta},\quad \bar{t}=e^{-i\vartheta}=\frac{1}{t},\quad \overline{dt}=-ie^{-i\vartheta}\,d\vartheta=-\frac{dt}{t^2},$$

那么經过簡单变换以后,我們得出

$$\Psi_*(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(t)}\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(t)}\frac{dt}{t}. \quad (39.18)$$

§40. Riemann-Hilbert 問題

1°. 我們来研究解析函数論中一类重要的边值問題,并把它作为前面所得出的結果的应用,这类問題是 Riemann 所提出的一类很一般的問題的一个特例①. Hilbert 首先研究了我們所感兴趣的問題②,因此,我們把它叫做 Riemann-Hilbert 問題.

这个問題的提法如下. 假定 S^+ 是由一条簡单的光滑封閉圍綫 L 所圍成的有界或者无限区域. 要求根据边界条件

$$\mathrm{Re}(a+ib)\Phi^+ \equiv au^+ - bv^+ = c \quad 在 L 上, \quad (40.1)$$

来找一个在 S^+ 内是全純的, 并且可以連續拓展到 L 上的函数 $\Phi(z)=u+iv$, 其中 a, b 及 c 都是給定在 L 上的实的連續函数.

最初, Hilbert③是把这个問題归結为一个在后面(§44 中)要讲到的类型的奇异积分方程, 他的目的是想給出这类方程的一个实际应用. 以后他发現④, 他所研究的問題可以极簡单地归結为依次求解两个 Dirichlet 問題⑤. 在 И. Н. Векуа 的論文[8]中, 可以找到用这种方法对問題所进行的完整的研究. 而在这里我們可以利用上一节中所指出过的方法,先把在 S^+ 内是全純的未知函数扩充成一个分区全純函数, 再直接通过上面所得出的联結問題的解来給出这个問題的解⑥. 我們把剛才所提到的方法应用到 S^+

---

① 这一类問題是根据函数实部和虚部的边值之間已給出的关系式, 来找一个在某个区域内为解析的函数. 这类問題是由 B. Riemann 在他出色的学位論文[1](1851 年)中提出的.

② D. Hilbert [1], [2].

③ D. Hilbert [1].

④ Hilbert [2].

⑤ 后来, F. Noether[1] 正好把这个解用于相反的目的: 研究上面提到的一类奇异积分方程。

⑥ 这一解法的想法包含在著者的专論[1]中(1922 年). 下面所引用的解法首先发表在本书的第一版中.

是半平面或者是圓域的情形．而利用保角映射可以把一般情形（单連通区域）归結为这两种情形中的任何一种．因此，我們从解决圓域上的問題入手．

2°．在开始討論之前，我們先作一个重要的注釋．設

$$\Phi_1(z)=u_1+iv_1,\quad \Phi_2(z)=u_2+iv_2,\quad \cdots,\quad \Phi_k(z)=u_k+iv_k$$

都是齐次問題

$$au^+-bv^+=0 \quad \text{在 } L \text{ 上} \tag{40.2}$$

的任意特解．那么，显然，它們的每一个实常数系数 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 的綫性組合

$$\Phi(z)=C_1\Phi_1(z)+C_2\Phi_2(z)+\cdots+C_k\Phi_k(z) \tag{40.3}$$

亦仍然是它的解．

因此，在以下几节中（到§43为止），我們把綫性組合理解为具有实（常）系数的綫性組合．与此同时，如果函数 $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \cdots, \Phi_k(z)$ 的任何实系数的綫性組合（系数不全为零）都不恒等于零，我們就說这些函数是綫性无关的．

§41．圓域上的 Riemann-Hilbert 問題的求解

設 S^+ 是圓域 $|z|<1$，而 L 是它的圓周 $|z|=1$．Riemann-Hilbert 問題的边界条件(40.1)显然可以写成：

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Re}(a+ib)\Phi^+(t) &= (a+ib)\Phi^+(t)+(a-ib)\overline{\Phi^+(t)} \\ &= 2c \quad (\text{在 } L \text{ 上}), \end{aligned} \tag{41.1}$$

其中 $a=a(t)$, $b=b(t)$ 及 $c=c(t)$ 都是 L 上点 t 的、已知的、实的連續函数．此外，我們还假定这些函数都适合 H 条件，并且在 L 上处处都有

$$a^2+b^2\neq 0.$$

将 S^+ 上的未知函数 $\Phi(z)$ 用函数 $\Phi_*(z)$ 进行拓展，正如在§39中那样，規定函数 $\Phi_*(z)$ 为

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{在 } S^- \text{ 內},$$

并且用 $\Phi(z)$ 表示一个分区全純函数，它在 S^+ 内等于 $\Phi(z)$，在 S^- 內則等于 $\Phi_*(z)$ [仍然用 $\Phi(z)$]①. 用这样的方法所定义的函数 $\Phi(z)$ 具有以下的性质[参看(39.8a)]:

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right)=\Phi(z) \quad 当\ |z|\neq 1. \tag{41.2}$$

此外，它在无穷远处显然是有界的.

利用这个表示法，依据公式 (39.16)，边界条件(41.1)可以写成:

$$(a+ib)\Phi^+(t)+(a-ib)\Phi^-(t)=2c, \tag{41.3}$$

或者写成

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t), \tag{41.4}$$

其中

$$G(t)=-\frac{a-ib}{a+ib}, \quad g(t)=\frac{2c}{a+ib}. \tag{41.5}$$

这样一来，我們就把它归結为在前面几节(§§ 34～37)中所研究过的联結問題. 我們現在需要找出这个問題在无穷远处是有界的解. 設 $\Phi(z)$ 是联結問題(41.3)的在无穷远处是有界的任一解. 这个函数可能不是原始問題 (41.1) 的解，这是由于它可能不适合补充条件(41.2). 但是，依据 $\Phi(z)$ 总可以找出原始問題(41.1)的解来. 实际上，在(41.3)中两端的各項均取复的共軛值，从(39.14a)可以看出，如果 $\Phi(z)$ 适合条件(41.3)，則 $\Phi_*(z)$ 应适合条件:

$$(a-ib)\Phi_*^-(t)+(a+ib)\Phi_*^+(t)=2c,$$

亦即，$\Phi_*(z)$ 亦应該是同一联結問題 (41.3) 的解，并且由此可知，显然适合条件(41.2)的函数

$$\Omega(z)=\frac{1}{2}[\Phi(z)+\Phi_*(z)] \tag{41.6}$$

亦应該是原始問題(41.1)的解. 反之，显然，原始問題的每一个解

① 在 § 39 中曾經用 $\Omega(z)$ 表示这个函数.

都可以用这样的方法得出[1]. 因为我們能够找出联結問題的一般解,因此,我們就能够找出 Riemann-Hilbert 問題的所有解.

为了进一步研究所有这些解,我們更仔細地来研究当 $c\equiv 0$ 时由(41.1)而得出的齐次 Riemann-Hilbert 問題.

我們用 $\varkappa$ 表示函数 $G(t)$ 的指标,亦即,

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_L=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{a-ib}{a+ib}\right]_L$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a-ib}{a+ib}\right]_L. \tag{41.7}$$

这个公式显然可以改写成:

$$\varkappa=\frac{1}{\pi i}[\ln(a-ib)]_L=\frac{1}{\pi}[\arg(a-ib)]_L. \tag{41.8}$$

这样一来,我們看出,$\varkappa$ 是偶数(正的,負的或零)[2]. 我們把数 $\varkappa$ 叫做 Riemann-Hilbert 問題对应的指标.

設 $X(z)$ 是联結問題(41.4)所对应的典則函数. 这个函数可由下述公式給出[3]:

$$\begin{aligned} X(z)&=Ce^{\Gamma(z)} && \text{当 } |z|<1,\\ X(z)&=Cz^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)} && \text{当 } |z|>1, \end{aligned} \tag{41.9}$$

其中 C 为异于零的任意常数,而

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln[t^{-\varkappa}G(t)]\,dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\Theta(t)\,dt}{t-z}, \tag{41.10}$$

---

[1] 事实上,原始問題的每一个解 $\Phi(z)$ 用上述方法拓展成分区全純函数以后,便是联結問題(41.3)的解,并且有

$$\Phi(z)=\Phi_*(z)=\frac{1}{2}[\Phi(z)+\Phi_*(z)].$$

[2] 在間断系数的情形(我們将在第四章§93中来討論),公式(41.8)不一定成立,并且指标 $\varkappa$ 亦可能是奇数.

[3] 典則函数 $X(z)$ 是齐次联結問題

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)$$

的典則解. 这个解由§35, 2°段中的公式(35.2A), (35.5), (35.6A)給出; 我們現在选原点作为記作 a 的点.

其中

$$\Theta(t)=\arg\left[-t^{-\varkappa}\frac{a-ib}{a+ib}\right] \tag{41.11}$$

是 L 上的連續实函数. 依据(39.18),我們有

$$\Gamma_*(z)=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\Theta(t)\,dt}{t-z}-i\alpha=\Gamma(z)-i\alpha, \tag{41.12}$$

其中

$$\alpha=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Theta(t)\,dt}{t}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Theta(t)\,d\vartheta \quad (t=e^{i\vartheta}) \tag{41.13}$$

是实常数. 由这些公式得出

$$X_*(z)=\bar{C}e^{\Gamma_*(z)}=\bar{C}e^{-i\alpha}e^{\Gamma(z)} \quad 当\ |z|>1,$$

$$X_*(z)=\bar{C}e^{-i\alpha}z^{\varkappa}e^{\Gamma(z)} \quad 当\ |z|<1,$$

亦即,对于不位在 L 上的所有 z, 均有

$$X_*(z)=\frac{\bar{C}}{C}e^{-i\alpha}z^{\varkappa}X(z).$$

令

$$C=e^{-\frac{i\alpha}{2}}, \tag{41.14}$$

那末,我們就得出具有下述性质:

$$X_*(z)=z^{\varkappa}X(z) \tag{41.15}$$

的典则函数 $X(z)$.

现在我們分成两种可能的情形: $\varkappa\geqslant 0$ 与 $\varkappa\leqslant -2$. 当 $\varkappa\geqslant 0$ 时, 由 (41.3) 取 $c(t)\equiv 0$ 而得出的齐次联結問題, 具有在无穷远处是有界的非零解,并且所有这些解均由以下的公式給出:

$$\Phi(z)=P(z)X(z), \tag{41.16}$$

其中

$$P(z)=C_0z^{\varkappa}+C_1z^{\varkappa-1}+\cdots+C_{\varkappa} \tag{41.17}$$

是次数不超过 $\varkappa$ 的任意多項式. 为了使 (41.16) 亦是原来的齐次 Riemann-Hilbert 問題的解,必需而且只需使 $\Phi_*(z)=\Phi(z)$,亦即,使 $X_*(z)P_*(z)=X(z)P(z)$,或者注意到 $P_*(z)=\bar{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ 及 $X_*(z)=z^{\varkappa}X(z)$, 就要求

$$z^{\varkappa}\bar{P}\left(\frac{1}{z}\right)=\bar{C}_0+\bar{C}_1 z+\cdots+\bar{C}_{\varkappa}z^{\varkappa}$$

$$=C_0 z^{\varkappa}+C_1 z^{\varkappa-1}+\cdots+C_{\varkappa}=P(z), \qquad (41.18)$$

亦即，

$$C_k=\bar{C}_{\varkappa-k}, \quad k=0, 1, 2, \cdots, \varkappa. \qquad (41.18a)$$

这样一来，如果我們設

$$C_k=A_k+iB_k, \quad k=0, 1, \cdots, \frac{\varkappa}{2},$$

其中 A_k, B_k 皆为实数（且 $B_{\frac{\varkappa}{2}}=0$），那么，有

$$C_k=A_{\varkappa-k}-iB_{\varkappa-k}, \quad k=\frac{\varkappa}{2}+1, \cdots, \varkappa.$$

合起来我們总共有$(\varkappa+1)$个实的任意常数. 把这些常数按照任意的次序記作 D_0, D_1, $\cdots$, $D_{\varkappa}$, 我們就可以得出下述結論：当 $\varkappa\geqslant 0$ 时，齐次 Riemann-Hilbert 問題的一般解为

$$\Phi(z)=D_0\Phi_0(z)+D_1\Phi_1(z)+\cdots+D_{\varkappa}\Phi_{\varkappa}(z), \qquad (41.19)$$

其中 D_0, D_1, $\cdots$, $D_{\varkappa}$ 都是实的任意常数，而 $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$, $\cdots$, $\Phi_{\varkappa}(z)$都是同一个問題的綫性无关的特解（此处綫性无关性是按照上节（2° 段）中所指出的意义来理解的）.

当 $\varkappa\leqslant -2$ 时，对应于(41.3)的齐次联結問題沒有在无穷远处是有界的非零解；因此，我們所考虑的齐次 Riemann-Hilbert 問題亦沒有非零解.

于是，对于齐次 Riemann-Hilbert 問題，我們有下述的結果：

当 $\varkappa\geqslant 0$ 时，齐次 Riemann-Hilbert 問題正好有 $\varkappa+1$ 个綫性无关解；所有这些解均由以下的公式給出：

$$\Phi(z)=X(z)(C_0 z^{\varkappa}+C_1 z^{\varkappa-1}+\cdots+C_{\varkappa}),$$

其中 C_0, C_1, $\cdots$, $C_{\varkappa}$ 都是任意常数，它們除了适合条件 (41.18a) 外，不受別的限制. 用 $X(z)$ 表示联結問題(41.3)适合条件(41.15)的典则函数. 函数 $X(z)$ 显然可确定到差一个实的任意常数因子，它可以按公式(41.9)～(41.11)，(41.13)，(41.14)計算出.

当 $\varkappa\leqslant -2$ 时，齐次 Riemann-Hilbert 問題沒有非零解.

現在轉到非齐次問題 (41.1). 为了要找出它的一般解，只需找出它的一个特解就够了，因为非齐次問題的一般解可以由它的一个特解再加上齐次問題的一般解而得出. 但是，为了要找出非齐次 Riemann-Hilbert 問題的特解，只需找出联結問題 (41.3) 的在无穷远处是有界的任一个特解就够了，这是因为 Riemann-Hilbert 問題的特解可以由这个特解根据公式 (41.6) 而得出. 另一方面，我們知道，如果原来的 Riemann-Hilbert 問題有解，那么，与之对应的联結問題亦有在无穷远处是有界的解. 因此，为了說明非齐次問題的可解性問題，我們可以直接引用在 § 37 中所讲到的結果.

从而，我們可以得出下述的結論：

当 $\varkappa\geqslant 0$ 时，非齐次 Riemann-Hilbert 問題总是有解的；一般解綫性地包含 $\varkappa+1$ 个实的任意常数.

当 $\varkappa\leqslant -2$ 时，这个問題有解的充分和必要条件是适合下面推出的条件(41.21)，或者，完全一样地，适合条件(41.23)；如果适合这些条件，則問題的解是唯一的.

剛才所提到的条件正是条件 (37.4)，只不过在此处 k 应取值 $0, 1, \cdots, -\varkappa-2$(§ 37, 3° 段). 因此，这些条件具有形式

$$\int_L \frac{t^k g(t)\,dt}{X^+(t)}=0$$

或者

$$\int_L \frac{t^k c(t)\,dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)}=0,\quad k=0,1,\cdots,-\varkappa-2. \tag{41.20}$$

我們要把这些条件加以改变. 依据(41.10)

$$\Gamma^+(t_0)=\frac{i}{2}\Theta(t_0)+\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\Theta(t)\,dt}{t-t_0},$$

或者，令 $t=e^{i\vartheta}$, $t_0=e^{i\vartheta_0}$, 在进行簡单的变換以后，有

$$\Gamma^+(t_0)=\frac{i}{2}\Theta(t_0)+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Theta(t)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta+\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Theta(t)\,d\vartheta,$$

由此，注意到由于(41.13)，最后一項应等于 $\frac{i\alpha}{2}$，又若注意到，当 $|z|<1$ 时，$X(z)=e^{-\frac{i\alpha}{2}}e^{\Gamma(z)}$ 及

$$e^{i\Theta(t_0)}=-t_0^{-\varkappa}\frac{a(t_0)-ib(t_0)}{a(t_0)+ib(t_0)},$$

則我們得出

$$X^+(t_0)=\pm t_0^{-\frac{\varkappa}{2}}\sqrt{-\frac{a(t_0)-ib(t_0)}{a(t_0)+ib(t_0)}}\,e^{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Theta(t)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}d\vartheta}.$$

代入(41.20)之中，我們得出

$$\int_0^{2\pi}e^{i\left(\frac{\varkappa}{2}+k\right)\vartheta}\Omega(\vartheta)c(\vartheta)d\vartheta=0,\quad k=1,\,2,\,\cdots,\,-\varkappa-1,\qquad(41.21)$$

其中已令

$$\Omega(\vartheta)=\frac{1}{\sqrt{a^2(\vartheta)+b^2(\vartheta)}}e^{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Theta(\vartheta_1)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta_1-\vartheta}{2}d\vartheta_1},\qquad(41.22)$$

而分別用 $a(\vartheta)$, $b(\vartheta)$, $c(\vartheta)$ 及 $\Theta(\vartheta)$ 表示 $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ 及 $\Theta(t)$.

这些条件与下面写成实形式的 $(-\varkappa-1)$ 个条件是等价的：

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\Omega(\vartheta)c(\vartheta)\cos k\vartheta\,d\vartheta=0,\quad k=0,\,1,\,\cdots,\,-\frac{\varkappa}{2}-1,\\&\int_0^{2\pi}\Omega(\vartheta)c(\vartheta)\sin k\vartheta\,d\vartheta=0,\quad k=1,\,2,\,\cdots,\,-\frac{\varkappa}{2}-1.\end{aligned}\qquad(41.23)$$

如果原来的非齐次 Riemann-Hilbert 問題是可解的，那么我們剩下的工作只是要写出它的解的表示式.

如果 $\varkappa\leqslant-2$，又若适合条件(41.20)，那末，联結問題(41.3)有唯一解 $\Phi(z)$，依据公式(37.5)，再注意到(41.5)，我們得出

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int_L\frac{c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)}.\qquad(41.24)$$

由于解的唯一性，函数 $\Phi(z)$ 也将是原来問題(41.1)的解[①]；因此：

当 $\varkappa\leqslant-2$ 时，如果适合保証解存在的充分和必要条件(41.21)

① 这就是說：如果适合条件(41.20)，則 $\Phi_*(z)=\Phi(z)$. 这亦是容易直接加以驗証的[参看后面推导出的 $\Psi_*(z)$ 的表示式].

或者和它等价的条件(41.23)，那么 Riemann-Hilbert 問題(41.4)的唯一解就由公式(41.24)給出.

当 $\varkappa \geqslant 0$ 时，公式

$$\Psi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int_L \frac{c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)} \qquad (*)$$

給出了問題(41.3)的一个特解；根据公式(41.6)，令

$$\Phi(z)=\frac{1}{2}[\Psi(z)+\Psi_*(z)], \qquad (**)$$

我們就得出原来問題(41.1)的一个特解 $\Phi(z)$.

我們来計算 $\Psi_*(z)$. 利用公式(39.18)，又注意到

$$X_*(z)=z^{\varkappa}X(z), \quad \overline{X^+(t)}=X_*^-(t)=t^{\varkappa}X^-(t),$$

再若根据 $X(z)$ 的定义我們有

$$(a-ib)X^-(t)=-(a+ib)X^+(t),$$

就容易得出

$$\begin{aligned}\Psi_*(z)&=X_*(z)\left\{-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{c\,dt}{(a-ib)\overline{X^+(t)}(t-z)}\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{c\,dt}{(a-ib)\overline{X^+(t)}t}\right\}\\&=z^{\varkappa}X(z)\left\{\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{t^{-\varkappa}c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)}\right.\\&\qquad\left.-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{t^{-\varkappa}c\,dt}{(a+ib)X^+(t)t}\right\}.\end{aligned}$$

将这个表示式[①]代入 (**) 中，我們便得出当 $\varkappa \geqslant 0$ 时給出 Riemann-Hilbert 問題(41.1)的特解的公式：

$$\begin{aligned}\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}&\left\{\int_L \frac{c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)}\right.\\&\left.+z^{\varkappa}\int_L \frac{t^{-\varkappa}c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)}\right\}\\&-\frac{z^{\varkappa}X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{c\,t^{-\varkappa}dt}{(a+ib)X^+(t)t}.\end{aligned} \qquad (41.25)$$

---

① 容易直接驗証，正如所預料的那样，$\Psi_*(z)$ 的表示式中在 $X(z)$ 的因式和 $\Psi(z)$ 的表示式中 $X(z)$ 的因式仅差一个形式为(41.17)的項.

在 $\varkappa=0$ 的情形下，这个公式可以稍許化簡为

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int_L \frac{c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)} - \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{c}{(a+ib)X^+(t)}\frac{dt}{t}. \tag{41.26}$$

例：圓域上的 Dirichlet 問題 作为最簡单的例我們討論圓域 $S^+(|z|<1)$ 上的 Dirichlet 問題，亦即，根据边界条件

$$u=f(t) \quad 在 L 上, \tag{41.27}$$

来找一个在 S^+ 內是調和的并且在 S^++L 上是連續的函数 u 的問題，其中 $f(t)$ 是定义在 L 上的实的連續函数[①].

这个問題是 Riemann-Hilbert 問題在(41.3)中取 $a=1, b=0, c=f(t)$ 时的一种特殊情形.

在这种情形下，对应的齐次联結問題[②]是

$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=0; \tag{41.28}$$

这个問題的典則解显然是

$$X(z)=\begin{cases} A & 当 |z|<1, \\ -A & 当 |z|>1, \end{cases}$$

其中 A 为任意常数. 指标 $\varkappa=0$. 为了适合条件(41.15)，亦即，在我們的情形下，$X_*(z)=X(z)$，显然只要取 $A=i$ 就够了，因此，

$$X(z)=\begin{cases} i & 当 |z|<1, \\ -i & 当 |z|>1. \end{cases}$$

与此相应，齐次 Riemann-Hilbert 問題的一般解为 Ki，其中 K 为实的任意常数. 这样一来，在公式(41.26)的右端再加上齐次問題的一般解 Ki，我們便得出非齐次問題的一般解：

---

① 为了直接应用上面所述，还应假定 $f(t)$ 适合 H 条件；但是，容易驗証，即使在不滿足这个条件时，最后的結果还是对的.

② 也就是在(41.3)中，取 $c=0$ 而得的問題：

$$(a+ib)\Phi^+(t)+(a-ib)\Phi^-(t)=0.$$

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{f(t)\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_L f(t)\frac{dt}{t}+iK$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}+iK. \tag{41.29}$$

我們得到了著名的 Schwartz 公式.

§42. 半平面上的 Riemann-Hilbert 問題

正象在§38 中处理联結問題那样. 例如, 可以利用变換 $z+i=-(\zeta+i)^{-1}$ 直接把这个問題归結为前面的問題.

由于所研究的問題比較重要, 和§38 中的做法类似地, 我們来推导它的解由变量 z 直接表出的公式.

正象在§38 中那样, 用 S^+ 与 S^- 分别表示上半和下半平面, 而 D 則表示实軸.

在此处边界条件(40.1)当然可以写成形式:

$$(a+ib)\Phi^+(t)+(a-ib)\overline{\Phi^+(t)}=2c \quad 在 D 上. \tag{42.1}$$

此处我們假定, 未知函数 $\Phi(z)=u+iv$ 在 S^+ 內处处都是有界的, 并且可以連續地拓展到边界 D 上 (包括无穷远点在內). 我們还假定, 給定在边界 D 上的实函数 $a=a(t)$, $b=b(t)$ 及 $c=c(t)$ 都适合 H 条件 (包括无穷远点在內) 且 $a^2+b^2\neq 0$ (亦包括无穷远点在內).

現在假定, 当 $z\in S^-$ 时, $\Phi(z)=\overline{\Phi}(z)$, 在 S^+ 內的未知函数 $\Phi(z)$ 就可以拓展成一个分区全純函数. 从而, 在全平面上除了 D 上的点外处处都有

$$\overline{\Phi}(z)=\Phi(z); \tag{42.2}$$

正如在上一节中那样, 边界条件采取形式

$$(a+ib)\Phi^+(t)+(a-ib)\Phi^-(t)=2c. \tag{42.3}$$

在此处我們亦把問題归結为联結問題:

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t) \quad 在 D 上, \tag{42.4}$$

其中

$$G(t)=-\frac{a-ib}{a+ib},\quad g(t)=\frac{2c}{a+ib},\tag{42.5}$$

但是在这一次，边界曲綫是无穷直綫（§38）．这个問題的指标 $\varkappa$ 由下述公式給出：

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{a-ib}{a+ib}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{\pi}[\arg(a-ib)]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\frac{-1}{\pi}[\arg(a+ib)]_{-\infty}^{+\infty},\tag{42.6}$$

这个公式説明了，$\varkappa$ 是偶数.

为了求解这个問題，我們要引用在§38, 4°, 5° 两段中曾經讲到过的一些結果.

与公式(38.13)相应，我們令

$$G_0(t)=\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa}G(t)=-\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa}\frac{a-ib}{a+ib},\tag{42.7}$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{\ln G_0(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi}\int_D\frac{\Theta(t)\,dt}{t-z},\tag{42.8}$$

其中

$$\Theta(t)=\arg\left\{-\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa}\frac{a-ib}{a+ib}\right\}\tag{42.9}$$

是实函数.

由公式(38.12)，典則函数 $X(z)$ 可以表成形式：

$$X(z)=\begin{cases}e^{\Gamma(z)} & \text{当 } z\in S^+,\\ \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{\varkappa}e^{\Gamma(z)} & \text{当 } z\in S^-.\end{cases}\tag{42.10}$$

因为，函数 $\Gamma(z)$ 显然具有性质

$$\overline{\Gamma}(z)=\Gamma(z),$$

因此，典則函数 $X(z)$ 具有性質：

$$\overline{X}(z)=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\varkappa}X(z).\tag{42.11}$$

当 $\varkappa \geqslant 0$ 时，在公式(42.3)中，对应于 $c=0$ 的情形之齐次联結問題，有异于零的有界解. 所有这些解均由下面的公式給出：

$$\Phi(z)=X(z)\left\{C_0+C_1\frac{z-i}{z+i}+C_2\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2+\cdots+C_\varkappa\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^\varkappa\right\}, \tag{42.12}$$

其中 $C_0, C_1, \cdots, C_\varkappa$ 皆为任意常数.

为了使得这个解亦是在公式(42.1)中对应于 $c=0$ 的情形的齐次 Riemann-Hilbert 問題的解，必需而且只需使得 $\overline{\Phi}(z)=\Phi(z)$，但是，根据公式(42.11)，这相当于条件

$$\overline{C}_k=C_{\varkappa-k},\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ \varkappa. \tag{42.13}$$

这样一来(参照上一节)，当 $\varkappa \geqslant 0$ 时，齐次 Riemann-Hilbert 問題正好有 $\varkappa+1$ 个綫性无关(在§40, 2°段的意义下)解.

当 $\varkappa<0$ (亦卽，当 $\varkappa \leqslant -2$) 时，齐次問題沒有非零解.

当 $\varkappa \geqslant 0$ 时，由下述公式給出非齐次联結問題的一个有界的特解(参看§38, 6°段)：

$$\begin{aligned}\Phi(z)&=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_D\frac{g(t)\,dt}{X^+(t)\,(t-z)}\\&=\frac{X(z)}{\pi i}\int_D\frac{c(t)\,dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)\,(t-z)}.\end{aligned} \tag{42.14}$$

原来問題的特解之一是

$$\frac{1}{2}[\Phi(z)+\overline{\Phi}(z)];$$

再把形式为(42.12)的函数(其中系数 C_k 适合条件(42.13))加到前一个表示式上，我們便得出它的一般解.

当 $\varkappa<0$ ($\varkappa \leqslant -2$) 时，仅当适合条件[公式(38.16)]：

$$\int_D\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k\frac{g(t)\,dt}{(t+i)^2X^+(t)}=0,\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ -\varkappa-2$$

或者

$$\int_D\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k\frac{c(t)\,dt}{(t+i)^2[a(t)+ib(t)]X^+(t)}=0 \tag{42.15}$$
$$k=0,\ 1,\ \cdots,\ -\varkappa-2$$

时,非齐次 Riemann-Hilbert 問題才有解.

当适合这些条件时,解是唯一的且由下述公式給出:

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int_D \frac{c(t)\,dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)(t-z)}$$

$$-\frac{X(z)}{\pi i}\int_D \frac{c(t)\,dt}{(t+i)X^+(t)[a(t)+ib(t)]}. \quad (42.16)$$

条件 (42.15) 可以改换成其他实形式的条件. 亦就是,把值 $X^+(t)=e^{\Gamma^+(t)}$ 代入等式(42.15)的左端, 經过簡单計算后, 我們得出

$$\int_D e^{-(\varkappa+2+2k)i\vartheta}\Omega(t)c(t)\,dt=0, \quad k=0,1,\cdots,-\varkappa-2,$$

其中

$$\Omega(t)=\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{a^2(t)+b^2(t)}}\,e^{-\frac{1}{2\pi}\int_D\frac{\Theta(t_1)dt_1}{t_1-t}} \quad (42.17)$$

$$\vartheta=\arg(t+i)=-\arg(t-i),$$

因而 $t+i=\sqrt{1+t^2}\,e^{i\vartheta}$, 而 $\Theta(t)$ 是由公式(42.9)确定的函数.

这样一来, 当 $\varkappa<0$ (亦即, $\varkappa\leqslant-2$) 时, Riemann-Hilbert 問題解的存在条件可以表成下列实的形式:

$$\int_D \Omega(t)c(t)\cos 2k\vartheta\,dt=0, \quad k=0,1,\cdots,-\frac{\varkappa}{2}-1,$$
$$\int_D \Omega(t)c(t)\sin 2k\vartheta\,dt=0, \quad k=1,2,\cdots,-\frac{\varkappa}{2}-1. \quad (42.18)$$

我們特别指出 $\varkappa=0$ 的最簡单的情形①. 在这种情形下,联結問題的特解

① 在本书第一版中,仅研究了后一种情形. 在这里第一次发表了一般情形的公式.

在 Φ. Д. Гахов 的书[10] 的 § 46 (1 段)中, 亦推导了此处所研究的問題 (亦包括間断系数的情形在内) 的一般解. 但是, 遺憾的是, 不能认为这个解是正确的. 首先, 如果不适合条件 $\Theta(\infty)=\Theta(-\infty)$, 一般讲来, 公式 (46.5) 中的积分在主値意义下亦可能是发散的;事实上,只要在点 $t=0$ 处引进 $\ln G(t)$ 的适当的間断性,便能实现这一点. 其次, 甚至在适合后一条件时,对 $\varkappa>0$ 的情形,一般讲来,公式(46.7) 中的积分可能是发散的. 在所引証之处并沒有研究(有界的)解的存在性問題.

$$\Phi_0(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int_D\frac{c(t)dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)}$$

亦是 Riemann-Hilbert 問題的特解. 事实上, 当 $\varkappa=0$ 时, 我們有 $\overline{X}(z)=X(z)$. 注意到

$$\overline{X^+(t)}=\overline{X}^-(t)=X^-(t),$$

又由于函数 $X(z)$ 的定义

$$(a+ib)X^+(t)=-(a-ib)X^-(t),$$

我們得出

$$\overline{\Phi}_0(z)=\Phi_0(z).$$

把齐次問題的一般解亦即 $CX(z)$ (C 是任意实常数) 加到这个特解上, 我們便得出 Riemann-Hilbert 問題的一般解. 这样一来, 当 $\varkappa=0$ 时, 最后由下述公式給出一般解:

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int_D\frac{c(t)dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)(t-z)}+CX(z), \quad (42.19)$$

其中 C 为实的任意常数. 我們提醒一下, 在这种情形下,

$$X(z)=e^{\frac{1}{2\pi}\int_D\frac{\Theta(t)dt}{t-z}},\quad \Theta(t)=\arg\left\{-\frac{a-ib}{a+ib}\right\}. \quad (42.20)$$

在半平面 S^+ 上的 Dirichlet 問題的特殊情形下, 我們有 $a=1$, $b=0$, $c=f(t)$, $X(z)=+i$ (当 $z\in S^+$), $X(z)=-i$ (当 $z\in S^-$), 并由前面的公式給出

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_D\frac{f(t)dt}{t-z}+Ki,$$

其中 K 为实的任意常数.

§ 43. 将一般情形归結为圓域上的情形

1° 我們現在回到由一条簡单的封閉圍綫 L 所圍成的(有界或无限的)区域 S^+ 的一般情形.

我們将假定, 圍綫 L 不仅是光滑的, 而且亦适合 Ляпунов 条件[①] (§ 7, 注釋 2).

① 我們指出, 这个限制可以大大削弱, 而且并不致影响到基本的結果.

假定 $z=\omega(\zeta)$, $\zeta=\chi(z)$ 是实現 z 平面上的区域 S^+ 与 ζ 平面上的圓域 $|\zeta|<1$ 之間保角映射的函数(其中一个是另一个的逆变换);我們用 γ 表示圓周 $|\zeta|=1$. 由保角映射的理論可以知道, 在所作的假定下, 不仅函数 $\omega(\zeta)$ 与 $\chi(z)$, 而且它們的导函数 $\omega'(\zeta)$ 与 $\chi'(z)$, 都可以分别連續拓展到 γ 与 L 上;如果用 σ 与 s 表示圍綫 γ 与 L 上对应点的弧坐标, 那么, 存在連續的导函数 $\frac{d\sigma}{ds}$ 及 $\frac{ds}{d\sigma}$①.

因此, 显然, 如果 $\varphi(t)$ 是圍綫 L 上点 t 的任意函数, 在 L 上适合 H 条件, 又若用边界 γ 上对应的点 τ 来表示这同一个函数, 亦即, $\psi(\tau)=\varphi(\omega(\tau))$, 那么, $\psi(\tau)$ 在 γ 上亦适合 H 条件(并具有同样的指数); 如果交換 L 与 γ 所处的地位, 那么, 也有同样的結果.

因此,如果要求解区域 S^+ 上对应于边界条件:

$$\operatorname{Re}(a+ib)\Phi^+\equiv au^+-bv^+=c \quad 在 L 上 \tag{43.1}$$

的 Riemann-Hilbert 問題,其中 $a=a(t)$, $b=b(t)$ 及 $c=c(t)$都是 L 上适合 H 条件的已知函数, 那么, 利用把区域 S^+ 变成圓域 $|\zeta|<1$ 的保角映射, 我們便可导出区域 $|\zeta|<1$ 上的同样的問題; 后一个問題的边界条件可由同一个公式 (43.1) 表出, 只要把 a, b 及 c 分别理解为圓周 γ 上点 τ 的函数 $a(\omega(\tau))$, $b(\omega(\tau))$ 及 $c(\omega(\tau))$.

因此,我們可以直接把对圓域的情形所得出的結果,移植到上述形式的区域的情形. 根据公式 $\zeta=\chi(z)$ 变回到变量 z, 我們就可从圓域 $|\zeta|<1$ 情形所对应的公式, 得出区域 S^+ 上問題的解和可解性条件的公式.

特别是,显然,指标 $\varkappa$ 可以直接由給定的函数 $a(t)$ 和 $b(t)$, 通

① 这里所指的关于 $\omega'(\zeta)$ 与 $\chi'(z)$ 的連續拓展性結果是屬于 O. D. Kellogg[2] 的,此外,他还証明了 $\omega'(\zeta)$ 与 $\chi'(z)$都适合 H 条件. 亦可参看 S. Warschawski[1].

过象圓域情形那样的公式:

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\left(\frac{a-ib}{a+ib}\right)\right]_L=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\left(\frac{a-ib}{a+ib}\right)\right]_L \tag{43.2}$$

或者公式

$$\varkappa=\frac{1}{\pi i}[\ln(a-ib)]_L=\frac{1}{\pi}[\arg(a-ib)]_L \tag{43.3}$$

来确定.

注釋1 設 $\Phi(z)$ 是 Riemann-Hilbert 問題 (43.1) 的任一个解. 則容易看出,在有关圍綫 L 及函数 $a(t)$, $b(t)$ 及 $c(t)$ 所作的假定下,边値 $\Phi^+(t)$ 是适合 H 条件的. 事实上,如果函数 $a(t)$, $b(t)$ 及 $c(t)$ 都适合 H 条件,那么,圓域上的 Riemann-Hilbert 問題的任一个解的边値亦都适合 H 条件;如上面所述,在 γ 上(或者在 L 上)适合 H 条件的函数,經过保角映射变成在 L 上(或者在 γ 上)适合 H 条件的函数.

注釋2 如果所考慮的(单連通的)区域的边界 L 延伸至无穷远处,那么,結果和前面并沒有什么本质的区别;在此处,当然,也可以利用保角映射把它归結为圓域上的情形.

在上一节中所考慮过的情形,是当 L 延伸至无穷远处的情形最簡单的实例.

2°. 前面所讲到的 Riemann-Hilbert 問題的解法是建立在应用保角映射把已給区域映射到圓域(或者半平面)的基础上的. 因此,在此处要求已給区域是单連通的是非常重要的(与联結問題正相反). 在 Д. А. Квеселава [2], И. Н. Векуа [11], 董光昌[1], Б. В. Боярский [2], Ф. Д. Гахов 及 Э. Г. Хасабов [1] 等的工作中,研究了多連通区域上的 Riemann-Hilbert 問題.

3°. Н. П. Векуа[16] 把前面所讲到的 Riemann-Hilbert 問題的解法推广到了若干个未知函数的情形,而 Б. В. Хведелидзе[18] 把这个方法推广到了未知函数仅要求能用 Cauchy 型积分表出的情形.

在 И. Н. Векуа 最近写成的专著[13]的第三章中，在很广泛的条件下給出了 Riemann-Hilbert 問題的求解和研究. 在这一专著中以及在这位著者以前的論文 [11] 中，所讲到的都是以普通解析函数为特例的广义解析函数的 Riemann-Hilbert 問題. 在那里还考虑了 Riemann-Hilbert 問題提法的适定性.

III. 在光滑的封閉圍綫和連續系数情形下的奇异积分方程

§44. 奇异积分算子与奇异积分方程

在整个这一部分中，正象在整个这一章中那样，我們把 L 理解为由有限条沒有公共点的光滑的封閉圍綫 $L_1, L_2, \cdots, L_p$ 所构成的曲綫.

在整个这一部分中，我們把由下述公式所确定的算子叫做(具有 Cauchy 型核的) **奇异积分算子**:

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t_0, t)\varphi(t)dt}{t-t_0}, \qquad (44.1)$$

其中 t 与 t_0 是 L 上的点，而 $A(t_0)$, $K(t_0, t)$ 都是給定在 L 上属于 H 类的函数.

K 是奇异积分算子的記号. 我們一般用粗体字母表示奇异积分算子.

有时为了方便起見，把公式(44.1)表成

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0, t)\varphi(t)dt, \qquad (44.2)$$

其中

$$B(t_0) = K(t_0, t_0), \quad k(t_0, t) = \frac{K(t_0, t) - K(t_0, t_0)}{t-t_0}. \qquad (44.3)$$

我們把由公式

$$\mathbf{K}^0\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} \qquad (44.4)$$

所确定的算子 $\mathbf{K}^0$, 叫做算子 $\mathbf{K}$ 的**特征部分**,而把 $A(t)$ 及 $B(t)$ 叫做**特征部分的系数**. 我們把函数 $\frac{K(t_0,\ t)}{t-t_0}$ 叫做算子 $\mathbf{K}$ 的**核**.

在今后我們常常还假定:函数

$$S(t)=A(t)+B(t), \quad D(t)=A(t)-B(t) \qquad (44.5)$$

在 L **上处处都不取值零**.

后面要闡明这个条件的意义①; 我們把适合这个条件的算子叫做**正則型的算子**.

还应指出, 根据所設的条件容易看出, 利用 §§ 5 及 6 中的結果,

$$k(t_0,\ t)=\frac{k^*(t_0,\ t)}{|t-t_0|^\lambda}, \quad 0\leqslant\lambda=\text{常数}<1, \qquad (44.6)$$

其中 $k^*(t_0,\ t)$ 在 L 上是属于 H 类的.

我們把形式为

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t_0,\ t)\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0) \quad (44.7)$$

的方程叫做(具有 Cauchy 型核的)**奇异积分方程**, 其中 $\mathbf{K}$ 是适合上述条件的奇异积分算子, $f(t)$ 是已知函数, 我們把它叫做方程的**自由項**或者方程的**右端**, 而 $\varphi(t)$ 是未知函数. 在算子 $\mathbf{K}$ 是正則型的情况下, 我們便說方程(44.7)是**正則型的方程**.

在整个这一章中,我們将假定自由項 $f(t)$ 是适合 H 条件的, 同时我們也只要求找适合这个条件的解 $\varphi(t)$.

根据(44.2), 方程(44.7)还可以写成

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0,\ t)\varphi(t)\,dt=f(t_0). \qquad (44.8)$$

---

① 函数 S 及 D 起着比之 A 及 B 更为重要的作用;記号的意义容易了解(Summa 及 Differentia).

我們把方程

$$\mathbf{K}^0\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0) \qquad (44.9)$$

叫做方程(44.7)所对应的**特征方程**,而函数 $A(t_0)$ 和 $B(t_0)$ 則称做**特征方程的系数**.

形式为(44.7)的奇异积分方程理論差不多是紧接着Fredholm方程理論的发生便开始研究了的. H. Poincaré① 及 D. Hilbert② 奠定了它的理論基础. 他們从完全不同的問題出发,而后来都得出了这种方程: Hilbert 是在研究解析函数論中某些边値問題而得出了这种方程的,而 Poincaré 則是从研究海潮学的一般理論而得出了这种方程的.

在他們以后,由于很多著者的工作(在后面适当的地方我們再提到他們),才使得这个理論向前大大地推进了.

注釋 1 有时为了方便起見,我們用稍有不同的形式

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k_1(t_0, t)\varphi(t)\,dt=f(t_0) \qquad (44.10)$$

来替代所写出的形式为(44.8)的奇异积分方程,其中 $B(t)$ 表示如上,而

$$k_1(t_0, t)=\frac{K(t_0, t)-K(t, t)}{t-t_0}. \qquad (44.11)$$

注釋 2 容易証明,只要圍綫 $L_1, L_2, \cdots, L_p$ 是光滑的,又彼此是不相交的③,那么,构成曲綫 L 的閉封圍綫 $L_1, L_2, \cdots, L_p$ 的形状和位置并无原則性的意义④.

① H. Poincaré[1].

② D. Hilbert[1], [2].

③ 其实,后一个条件是容易取消的.

④ 从应用的观点来看就有不同. 在应用中,积分曲綫 L 通常和所研究的問題有着密切的联系,而且方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 中所出現的每一个元素通常都是有一定的簡单的几何意义的,因而,可以用它来簡化問題的研究. 而当从 L 轉到另外的积分曲綫时,常常会失去这种优越性.

事实上，与曲綫 L 一起，我們再考虑另一条曲綫 Λ，它是由同样多条光滑的，而彼此互不相交的封閉圍綫 $\Lambda_0, \Lambda_1, \cdots, \Lambda_p$ 所构成的. 用 τ 表示 Λ 上的点（以及它的附标），并且在 L 与 Λ 之間規定一个相互单值的連續对应关系：

$$t=t(\tau). \tag{44.12}$$

这一定是可以做到的，而且还可以使得函数 $t'(\tau)=\dfrac{dt}{d\tau}$ 在 Λ 上是連續的，并且处处都不取值零①. 除此而外，我們还假定 $t'(\tau)$ 适合 H 条件. 例如，只要 L 与 Λ 是 Ляпунов 曲綫，便总可以保証 $t'(\tau)$ 适合 H 条件②. 但是，L 与 Λ 之間的这种对应关系，当 L 和 Λ 是簡单的光滑曲綫时，也是可以实現的；最簡单明显的例子是构成 L 与 Λ 的圍綫 L_k 与 Λ_k 在平面上只是彼此間的位置不同或者是彼此相似的情形.

在方程(44.7)中用 τ 代替 t，我們便得出下述方程

$$A(\tau_0)\varphi(\tau_0)+\frac{1}{\pi i}\int_\Lambda \frac{K^*(\tau_0, \tau)\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\tau_0}=f(\tau_0), \tag{44.13}$$

此处已引用了記号

$$A(\tau)=A(t(\tau)), \quad \varphi(\tau)=\varphi(t(\tau)), \quad f(\tau)=f(t(\tau))$$

及

$$K^*(\tau_0, \tau)=\frac{(\tau-\tau_0)t'(\tau)}{t(\tau)-t(\tau_0)}K(t(\tau_0), t(\tau)). \tag{44.14}$$

依据在§7中所讲过的結果，容易驗証，$K^*(\tau_0, \tau)$ 在 Λ 上是适合 H 条件的（参照§13，注釋5）.

这样一来，我們便得出了和原来方程同样类型的，但积分路徑已是 Λ 的奇异积分方程.

注釋 3 当然方程(44.7)还可以表成实变量的形式. 这可以用不同的方法来实現；我們指出其中最簡单的一种.

---

① 例如，只要能使在 L_k 与 Λ_k 上相互对应的点的弧坐标彼此成比例，便能保証实現这些要求.

② 为此只要建立象前一脚注中所規定的那种对应关系就够了.

为了簡单起見，我們假定 L 适合 Ляпунов 条件，又假定 L 只是由一条封閉圍綫构成. 不失一般性，我們可以假定这条封閉圍綫的长度为 2π，与此相应，L 的参数表示式可以取为形式

$$x=x(s),\quad y=y(s),\quad 0\leqslant s\leqslant 2\pi,$$

其中 s 是弧坐标；根据假定，$x'(s)$，$y'(s)$ 适合 H 条件，又

$$x(2\pi)=x(0),\quad y(2\pi)=y(0),$$

$$x'(2\pi-0)=x'(+0),\quad y'(2\pi-0)=y'(+0).$$

另外，容易看出(参看 §7)，比值

$$\frac{e^{is}-e^{is_0}}{t-t_0}=\omega(t_0,\ t),\quad \frac{t-t_0}{e^{is}-e^{is_0}}=\frac{1}{\omega(t_0,\ t)}$$

应該在 L 上适合 H 条件①.

注意到

$$\frac{dt}{t-t_0}=\frac{\omega(t_0,\ t)t'(s)ds}{e^{is}-e^{is_0}}=\frac{\omega(t_0,\ t)t'(s)e^{-is_0}e^{-i\frac{s-s_0}{2}}ds}{e^{i\frac{s-s_0}{2}}-e^{-i\frac{s-s_0}{2}}}$$

$$=\frac{\omega(t_0,\ t)t'(s)e^{-is_0}}{2i}\left\{\operatorname{ctg}\frac{s-s_0}{2}-i\right\}ds, \qquad (44.15)$$

并将它代入 (44.7)，再进行一些簡单变换（类似于由 (44.7) 得出 (44.8)所用过的变换）以后，我們得到方程

$$a(s_0)\psi(s_0)+\frac{b(s_0)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{s-s_0}{2}\psi(s)ds$$

$$+\int_0^{2\pi}l(s_0,\ s)\psi(s)ds=g(s_0), \qquad (44.16)$$

其中 $a(s)$，$b(s)$，$g(s)$ 都是以 2π 为周期并且适合 H 条件的已知函数，而 $l(s_0,\ s)$ 是可以表成形式为

$$l(s_0,\ s)=l^*(s_0,\ s)\left|\operatorname{ctg}\frac{s-s_0}{2}\right|^{\lambda},\quad 0\leqslant\lambda<1 \qquad (44.17)$$

---

① 如果我們簡单地用 $s-s_0$ 替代 $e^{is}-e^{is_0}$，那么，当 $s\to 2\pi$，$s_0\to 0$ 时，比値 $\frac{s-s_0}{t-t_0}$ 将是无界的. 正因为如此，我們才选取表示式 $e^{is}-e^{is_0}$，这个表示式以 2π 为周期，并且仅当 $s=s_0+2k\pi$（k 为整数）才取値零.

的已知函数，其中 $l^*(s_0, s)$ 对变量 s_0 与 s 是以 2π 为周期的函数，并且它适合 H 条件. 用 $\psi(s)$ 表示由 s 表示的未知函数 $\varphi(t)$.

反之，显然，每一个形式为(44.16)的方程都可以化成形式为(44.7)的方程，并且可以任意地选取圍綫 L，只要求 L 适合上述的光滑性条件.

如果給定了形式为(44.16)的方程，那么，最簡单的情形乃是积分展布在以坐标原点为中心，以1为半徑的圓周 L 上，而 s 是 L 上点 t 的幅角的情形. 此时，$t=e^{is}$, $dt=ie^{is}\,ds$,

$$\frac{dt}{t-t_0}=\frac{ie^{is}ds}{e^{is}-e^{is_0}}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{s-s_0}{2}\,ds+\frac{i}{2}\,ds, \qquad (44.18)$$

由此，再注意到 $i\,ds=\dfrac{dt}{t}$，就有

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{s-s_0}{2}\,ds=\frac{dt}{t-t_0}-\frac{1}{2}\frac{dt}{t}.$$

把这个表示式和 ds 的表示式代入(44.16)，我們显然得到一个形式为(44.8)的方程，或者还可以把它化为(44.7)的形式.

§ 45. 奇异积分算子的基本性质

我們进一步研究在上一节中所引进的奇异积分算子.

1°. 我們首先規定一些記号. 依据公式

$$\psi(t_0)=A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K(t_0,\ t)\varphi(t)\,dt}{t-t_0},$$

由公式(44.1)所确定的奇异积分算子 $\mathbf{K}$ 把 H 类中的每一个函数 $\varphi(t)$ 都变成一个新的函数 $\psi(t)$. 函数 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 之間的关系式，我們通常可以写成

$$\psi=\mathbf{K}\varphi, \qquad (*)$$

但是，有时需要指出，在应用算子 $\mathbf{K}$ 由函数 $\varphi(t)$ 而得出的函数 $\psi(t)$ 中，給变量以值 t_0 还是 t，例如也可写成

$$\psi(t_0)=\mathbf{K}\varphi(t_0) \quad 或者 \quad \psi(t)=\mathbf{K}\varphi(t).$$

这样一来,应該把記号 $\mathbf{K}\varphi(\ )$ 和函数 $\psi(\ )$ 看成是同一記号.

为了书写簡单起見,在很多情况下,例如,在公式(*)中,或者,例如,在表示式

$$\int_L \varphi\psi dt, \quad \int_L \varphi\psi\, dt_0$$

中,如果不致于引起混乱,我們通常可以略去函数自变量的記号,而以 φ, ψ 等等替代 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 或者 $\varphi(t_0)$, $\psi(t_0)$ 等等;显然,在 $\int_L \varphi\psi dt$ 中 φ 及 ψ 应該分别理解为 $\varphi(t)$ 及 $\psi(t)$,在 $\int_L \varphi\psi dt_0$ 中 φ 及 ψ 则应分别理解为 $\varphi(t_0)$ 及 $\psi(t_0)$.

2°. 作了这些几乎是很显然的注释以后,便可以进入研究奇异积分算子的一些比較重要的性质. 为了方便起見,我們提醒一下,在上一节中所引进过的記号:

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t_0, t)\varphi(t)dt}{t-t_0}, \qquad (45.1)$$

$$B(t) = K(t, t), \qquad (45.2)$$

$$S(t) = A(t) + B(t), \quad D(t) = A(t) - B(t); \qquad (45.3)$$

再提醒一下,我們只考虑正則型的算子,亦卽,在 L 上 $S(t)$ 和 $D(t)$ 处处都不等于零的算子. 我們仅将算子 $\mathbf{K}$ 作用到 H 类的函数 $\varphi(t)$ 上.

我們首先指出由 § 18, 4° 段中的結果直接得出的算子 $\mathbf{K}$ 的下列重要性质:

奇异算子 $\mathbf{K}$ 把 H 类的每一个函数 $\varphi(t)$ 变成一个也是 H 类的新函数 $\psi(t)$.

还要引进一个在以后起着重要作用的概念. 亦就是指标的概念,我們把整数

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{A-B}{A+B}\right]_L = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{D}{S}\right]_L \qquad (45.4)$$

叫做**算子** $\mathbf{K}$ **或方程** $\mathbf{K}\varphi = f$ **的指标**,其中$[\ ]_L$ 通常表示括号內的

函数当其自变量沿着正方向繞 L 一周时的增量.

由定义可以知道,指标仅与算子 $\mathbf{K}$ 的特征部分有关.

此外,还容易看出,如果象在上节注释2中那样,用别的曲綫 Λ 替代积分曲綫 L,則指标 $\varkappa$ 并不改变. 事实上,正如由公式(44.13)及(44.14)所指明的,系数 A 与 B 保持不变,亦卽,它們在曲綫 L 及 Λ 上对应的点处之值是彼此相等的.

如果 $B(t)\equiv 0$,从而,在 L 上处处都有 $A(t)\neq 0$(这是根据条件:在 L 上 S 和 D 都不等于零),那么,方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 就变成了普通的(第二类)Fredholm 方程. 因此,当 $B\equiv 0$ 时(或者完全同样地就是当 $S=D$ 时),我們把算子 $\mathbf{K}$ 叫做(第二类的)Fredholm 算子①. 由公式(45.4)表明,Fredholm 算子的指标等于零.

3° 我們現在轉到討論两个奇异积分算子的合成問題. 設 $\mathbf{K}_1$ 与 $\mathbf{K}_2$ 是由下述公式所确定的奇异积分算子:

$$\mathbf{K}_1\varphi\equiv A_1(t_0)\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K_1(t_0,\ t)\varphi(t)\,dt}{t-t_0},\qquad(45.5)$$

$$\mathbf{K}_2\psi\equiv A_2(t_0)\psi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K_2(t_0,\ t)\psi(t)\,dt}{t-t_0}.\qquad(45.6)$$

我們把由公式②

$$\mathbf{K}^*\psi=\mathbf{K}_1(\mathbf{K}_2\psi)\qquad(45.7)$$

所确定的算子

$$\mathbf{K}^*=\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2,\qquad(45.8)$$

叫做算子 $\mathbf{K}_1$ 与 $\mathbf{K}_2$ 按指定次序的合成(一般讲来,算子 $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$ 与 $\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$ 是不同的).

我們来找出算子 $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$ 的表示式. 进行在(45.7)中指定的运算,并且利用 Poincaré-Bertrand 置换公式(§28),我們便直接得出

---

① 以后我們簡单地讲 Fredholm 算子就是指的第二类 Fredholm 算子.

② 这里为符合中文的习惯,把公式(45.7)和(45.8)的位置交换了. ——譯者注

$$\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\psi\equiv[A_1(t_0)A_2(t_0)+B_1(t_0)B_2(t_0)]\psi(t_0)$$
$$+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{A_1(t_0)K_2(t_0,\ t_1)+K_1(t_0,\ t)A_2(t)}{t-t_0}\psi(t)dt$$
$$+\frac{1}{(\pi i)^2}\int_L\left[\int_L\frac{K_1(t_0,\ t_1)K_2(t_1,\ t)dt_1}{(t_1-t_0)(t-t_1)}\right]\psi(t)dt,\qquad(45.9)$$

这里，正与以前类似，$B_1(t)=K_1(t,\ t)$，$B_2(t)=K_2(t,\ t)$.

容易証明，

$$\int_L\frac{K_1(t_0,\ t_1)K_2(t_1,\ t)}{(t_1-t_0)(t-t_1)}dt_1=\frac{k_{12}(t_0,\ t)}{|t-t_0|^\lambda},\qquad(45.10)$$

其中 $0\leqslant\lambda<1$，而 k_{12} 是属于 H 类的函数．事实上，函数

$$F(t_0,\ t,\ t_1)=K_1(t_0,\ t_1)K_2(t_1,\ t)$$

适合 H 条件．另外，又有

$$\int_L\frac{F(t_0,\ t,\ t_1)}{(t_1-t_0)(t-t_1)}dt_1$$
$$=\frac{1}{t-t_0}\left\{\int_L\frac{F(t_0,\ t,\ t_1)}{t_1-t_0}dt_1-\int_L\frac{F(t_0,\ t,\ t_1)}{t_1-t}dt_1\right\}$$
$$=\frac{\omega_0(t_0,\ t)-\omega(t_0,\ t)}{t-t_0},\qquad(45.11)$$

其中

$$\omega_0(t_0,\ t)=\int_L\frac{F(t_0,\ t,\ t_1)}{t_1-t_0}dt_1,\quad\omega(t_0,\ t)=\int_L\frac{F(t_0,\ t,\ t_1)}{t_1-t}dt_1.$$

因为 $\omega(t_0,\ t)$ 和 $\omega_0(t_0,\ t)$ 都适合 H 条件（§18, 4° 段及 3° 段），并且 $\omega(t_0,\ t_0)=\omega_0(t_0,\ t_0)$，因此，易見(45.11)的右端可以表成 $\dfrac{k_{12}(t_0,\ t)}{|t-t_0|^\lambda}$ 的形式，于是我們的結論便得到了証明．

这样一来，我們看出，算子 $\mathbf{K}^*$ 的特征部分仅由(45.9)右端的前两項来确定．

用 $A^*(t)$ 及 $B^*(t)$ 表示算子 $\mathbf{K}^*$ 的特征部分的系数，根据(45.9)，我們有

$$A^*=A_1A_2+B_1B_2,\quad B^*=A_1B_2+B_1A_2,\qquad(45.12)$$

由此，如果假定 $S_j=A_j+B_j$，$D_j=A_j-B_j\ (j=1,\ 2)$，

$$S^*=A^*+B^*, \quad D^*=A^*-B^*,$$

則得出

$$S^*=S_1S_2, \quad D^*=D_1D_2. \tag{45.13}$$

根据(45.4)，由上面的公式可以知道，算子 $\mathbf{K}^*$ 的指标 $\varkappa^*$ 等于算子 $\mathbf{K}_1$ 和 $\mathbf{K}_2$ 的指标 $\varkappa_1$ 和 $\varkappa_2$ 的和：$\varkappa_1+\varkappa_2=\varkappa^*$.

如果算子 $\mathbf{K}_1$ 能够使得算子 $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$ 是 Fredholm 算子，我們就称算子 $\mathbf{K}_1$ 是算子 $\mathbf{K}_2$ 的正則化算子. 为了使得 $\mathbf{K}^*$ 是 Fredholm 算子必須而且只須使 $B^*\equiv 0$ 或者化为 $S^*=D^*$. 这样一来，如果算子 $\mathbf{K}_1$ 是算子 $\mathbf{K}_2$ 的正則化算子，那么，应有

$$A_1B_2+B_1A_2=0 \tag{45.14}$$

或同样地化为

$$S_1S_2=D_1D_2, \tag{45.15}$$

反之亦然. 由前面可以知道，如果給定了算子 $\mathbf{K}_2$，那么，可以用无穷多种方法来选取它的正則化算子 $\mathbf{K}_1$. 例如，可以任意地給定函数 $S^*=D^*\neq 0$，此时，根据公式

$$S_1=\frac{S^*}{S_2}, \quad D_1=\frac{S^*}{D_2} \tag{45.16}$$

可以确定 S_1, D_1；特别是，可以取 $S^*=D^*=1$. 通常使条件(45.14)总是得到滿足的最方便的方法是令

$$A_1=A_2, \quad B_1=-B_2. \tag{45.17}$$

我們看出：这种选取正則化算子的方法只是算子的特征部分在起作用.

此外，我們还看出，如果 $\mathbf{K}_1$ 是 $\mathbf{K}_2$ 的正則化算子，則 $\mathbf{K}_2$ 是 $\mathbf{K}_1$ 的正則化算子①.

因为，Fredholm 算子的指标等于零，因此，彼此正則化的两个算子 $\mathbf{K}_1$ 和 $\mathbf{K}_2$ 的指标大小相等而符号相反.

---

① 这里我們指出，对于与方程組相联系的算子来說，这一般是不对的（第六章）.

我們再对任意多个算子的合成补充説几句話. 容易驗証，如果 $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$ 都是奇异积分算子，則有

$$\mathbf{K}_1(\mathbf{K}_2\mathbf{K}_3)=(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2)\mathbf{K}_3, \tag{45.18}$$

亦即，算子的合成是适合結合律的；因此，我們可以把 $\mathbf{K}_1(\mathbf{K}_2\mathbf{K}_3)$ 或 $(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2)\mathbf{K}_3$ 直接写成 $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\mathbf{K}_3$，对于任意多个算子来說亦有完全类似的結果.

注釋 我們来研究由公式

$$\mathbf{k}\varphi\equiv\frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0,\ t)\varphi(t)dt \tag{45.19}$$

所确定的算子 $\mathbf{k}$，其中

$$k(t_0,\ t)=\frac{k_0(t_0,\ t)}{|t-t_0|^\lambda},\quad 0\leqslant\lambda<1, \tag{45.20}$$

而且 $k_0(t_0,\ t)$ 是适合 H 条件的. 这样的算子可以叫做**第一类的 Fredholm 算子**.

假設 $\mathbf{K}$ 是任一个奇异积分算子，那么，容易看出，算子 $\mathbf{Kk}$ 和 $\mathbf{kK}$ 都是第一类的 Fredholm 算子.

这一点本来可以由公式(45.12)得出，因为第一类的 Fredholm 算子可以看作是奇异积分算子的特殊情形（但已經不是正則型的算子），它的特征部分的系数 A 和 B 恒等于零.

另外，我們的結論还容易直接地驗証. 如果

$$\mathbf{K}\psi\equiv A(t_0)\psi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K(t_0,\ t)\psi(t)dt}{t-t_0},$$

那么，例如，直接把 $\psi=\mathbf{k}\varphi$ 代入，我們便得出

$$\mathbf{Kk}\varphi\equiv\frac{1}{\pi i}\int_L n(t_0,\ t)\varphi(t)dt^{①},$$

其中

$$n(t_0,\ t)=A(t_0)k(t_0,\ t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K(t_0,\ t)k(t_1,\ t)dt_1}{t_1-t},$$

① 这里改变积分次序的合法性由 § 28 (注釋) 推出.

容易看出，$n(t_0, t)$适合与$k(t_0, t)$同样形式(45.20)的条件[①]. 对 **kK** 的討論是完全类似的.

§46. 相联的算子和相联的方程

1°. 我們把由下式所确定的两个算子 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{K}'$ 叫做相联的算子:

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t_0, t)\varphi(t)}{t-t_0}dt \tag{46.1}$$

和

$$\mathbf{K}'\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t, t_0)\psi(t)}{t-t_0}dt, \tag{46.2}$$

此两式中,一个是由另一个将核 $\dfrac{K(t_0, t)}{t-t_0}$ 中的 t 和 t_0 交换位置而得出的. 特别是,由下式确定的特征算子 $\mathbf{K}^0$:

$$\mathbf{K}^0\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} \tag{46.3}$$

之相联算子 $\mathbf{K}^{0\prime}$ 是由公式

$$\mathbf{K}^{0\prime}\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\psi(t)dt}{t-t_0} \tag{46.4}$$

确定的.

应該注意的是特征算子 $\mathbf{K}^0$ 的相联的算子 $\mathbf{K}^{0\prime}$, 一般說来, 并不是算子 $\mathbf{K}'$ 的特征部分 $\mathbf{K}'^0$, 这是因为 $\mathbf{K}'^0$ 是由下式給出的:

$$\mathbf{K}'^0\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) - \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\psi(t)dt}{t-t_0}. \tag{46.5}$$

这样一来,对記号 $\mathbf{K}^{0\prime}$ 与 $\mathbf{K}'^0$ 应該加以区分.

---

① 这是容易直接驗証的. 另外,如果考虑到,根据条件(45.20), $k(t_0, t)$ 可以表成

$$k(t_0, t) = \frac{k^*(t_0, t)}{t-t_0},$$

其中 $k^*(t_0, t)$ 是适合 H 条件的 (与 §28 末尾的注釋作比較), 这也可从公式 (45.10) 推出.

2°. 現在回到一般的情形上，我們要指出相联的算子的下列基本性质.

I. 相联的两个算子的指标大小相等而符号相反.

II. 对于每两个算子，我們有

$$(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2)' = \mathbf{K}_2'\mathbf{K}_1'; \tag{46.6}$$

一般地，有

$$(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\cdots\mathbf{K}_n)' = \mathbf{K}_n'\mathbf{K}_{n-1}'\cdots\mathbf{K}_2'\mathbf{K}_1'. \tag{46.6a}$$

III. 对每两个函数 φ 和 ψ，有

$$\int_L \psi\mathbf{K}\varphi\, dt = \int_L \varphi\mathbf{K}'\psi dt. \tag{46.7}$$

进行簡单的直接驗証，就可以証明这些性质．容易驗証（我們在这里不讲了）性质 III 是相联的算子的概念的一个重要特征，也就是說，如果两个奇异积分算子 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{K}'$，对于任何适合 H 条件的函数 φ 和 ψ，都有关系式 (46.7)，那么，算子 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{K}'$（在原先給定的意义下）是相联的算子.

3°. 我們把积分方程

$$\mathbf{K}\varphi = f \quad 及 \quad \mathbf{K}'\psi = g \tag{46.8}$$

叫做**相联的方程**，而不論其右端 f 与 g 是怎样的函数.

由 (46.7) 可以导出下述重要的命題：**如果方程** $\mathbf{K}\varphi = f$ **有解，則必有**

$$\int_L f\psi dt = 0, \tag{46.9}$$

其中 ψ **是相联齐次方程** $\mathbf{K}'\psi = 0$ **的任一解**[①].

事实上，如果 φ 是方程 $\mathbf{K}\varphi = f$ 的解，那么

$$\int_L f\psi dt = \int_L \psi\mathbf{K}\varphi dt = \int_L \varphi\mathbf{K}'\psi dt = 0.$$

逆命題也是成立的；它将在 §53 中加以証明.

---

① 提醒一下，我們所說的解总指的是属于 H 类的解.

§ 47. 特征方程的求解

对于我們所討論类型的奇异积分方程的一般理論来讲，方程

$$\mathbf{K}^0\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0) \qquad (47.1)$$

的解是具有重大意义的，方程(47.1)就是我們所謂的特征方程. И. Н. Векуа[1] 完整地給出了这个方程一般而且非常簡单的解法，我們在这里将要介紹这种解法①.

我們提醒一下：$A(t)$, $B(t)$, $f(t)$ 表示属于 H 类的函数，我們要求未知函数 $\varphi(t)$ 亦适合 H 条件.

我們討論分区全純函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}. \qquad (47.2)$$

根据 Сохоцкий-Plemelj 公式

$$\varphi(t_0)=\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0),\quad \frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0), \quad (47.3)$$

再依据(47.1)，我們看出，函数 $\Phi(z)$ 应該是联結問題

$$(A+B)\Phi^+(t)-(A-B)\Phi^-(t)=f \qquad (47.4)$$

在无穷远处取值零的解. 反之，假設分区全純函数 $\Phi(z)$ 是問題(47.4)的在无穷远处取值零的解. 我們用公式(47.3)中的第一个确定出函数 $\varphi(t_0)$. 那么(§31)，函数 $\Phi(z)$ 可以表成形式(47.2)，于是，(47.3)中的第二个公式亦成立，而这就証明了 $\varphi(t)$ 是原来方程(47.1)的解.

但是，边值問題(47.4)我們是无解的. 为了直接应用前面已經得出的公式，我們把条件(47.4)改写成

---

① 这里所讲的解法的思想是属于 T. Carleman[1] 的，但是，他所考虑的只是上面所列的情形的一个特例(参看 §99 的开始部分). 同样的想法为 С. Г. Михлин[3] 所应用过，但是，他仅給出了方程(47.1)在 $\varkappa=0$ 的情形的解(此外，他还假定了 $A(t)=1$，而 L 是一条曲率适合 H 条件的簡单封閉圖綫). 在 $\varkappa\neq0$ 的情形，С. Г. Михлин 仅考虑了当 L 为一个圓周时齐次方程 $\mathbf{K}^0\varphi=0$ 的解.

$$\Phi^{+}(t_0)=G(t_0)\Phi^{-}(t_0)+\frac{f(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}, \tag{47.5}$$

其中

$$G(t_0)=\frac{A(t_0)-B(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}. \tag{47.6}$$

現在我們看出，上面 (§ 45) 我們把它叫做积分方程(47.1)的指标的数 $\varkappa$ 是对应的联結問題(47.5)的指标.

假設 $X(z)$ 是对应的联結問題(47.5)的典則函数(§ 37).

于是 (§ 37)，当 $\varkappa\geqslant 0$ 时，問題(47.5)在无穷远处取値零的一般解由下式給出：

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)\,dt}{[A(t)+B(t)]X^{+}(t)(t-z)}+X(z)Q_{\varkappa-1}(z), \tag{47.7}$$

其中 $Q_{\varkappa-1}(z)$ 是次数不超过 $\varkappa-1$ 的任意多項式，并且当 $\varkappa=0$ 时，$Q_{\varkappa-1}(z)=0$. 当 $\varkappa<0$ 时，只有当适合条件

$$\int_L\frac{t^k f(t)\,dt}{[A(t)+B(t)]X^{+}(t)}=0,\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ -\varkappa-1 \tag{47.8}$$

时，才有解存在；如果适合这些条件，則 (唯一) 解仍然由公式 (47.7) (在其中 $Q_{\varkappa-1}(z)=0$) 給出.

从公式 $\varphi(t_0)=\Phi^{+}(t_0)-\Phi^{-}(t_0)$，我們得出原来积分方程的解. 事实上，从这个公式依据公式 (47.7) 以及 Сохоцкий-Plemelj 公式，可以得出

$$\begin{aligned}\varphi(t_0)=&\frac{X^{+}(t_0)+X^{-}(t_0)}{2[A(t_0)+B(t_0)]X^{+}(t_0)}f(t_0)\\&+\frac{X^{+}(t_0)-X^{-}(t_0)}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)\,dt}{[A(t)+B(t)]X^{+}(t)(t-t_0)}\\&+[X^{+}(t_0)-X^{-}(t_0)]Q_{\varkappa-1}(t_0).\end{aligned} \tag{47.9}$$

現在注意到，由于函数 $X(z)$ 的定义

$$\frac{X^{+}(t_0)}{X^{-}(t_0)}=G(t_0)=\frac{A(t_0)-B(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)},$$

就容易看出，解(47.9)可以改写成

$$\varphi(t_0)=\mathbf{K}^* f+B^*(t_0)Z(t_0)P_{\varkappa-1}(t_0), \tag{47.10}$$

其中我們已引进了下列記号：

$$\mathbf{K}^* f\equiv A^*(t_0)f(t_0)-\frac{B^*(t_0)Z(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{Z(t)(t-t_0)}, \tag{47.11}$$

$$Z(t_0)=[A(t_0)+B(t_0)]X^+(t_0)=[A(t_0)-B(t_0)]X^-(t_0), \tag{47.12}$$

$$A^*(t_0)=\frac{A(t_0)}{A^2(t_0)-B^2(t_0)},\quad B^*(t_0)=\frac{B(t_0)}{A^2(t_0)-B^2(t_0)}, \tag{47.13}$$

而 $P_{\varkappa-1}(t_0)$ 表示次数不超过 $\varkappa-1$ 的任意多項式.

在这个公式中出現的 L 上点 t 的函数 $Z(t)$，可以依据§35中的公式容易地算出.

例如，如果 L 仅由一条封閉圍綫构成(它的正方向是任意选定的)，那么，依据公式(35.8)，容易得出

$$Z(t)=(t-a)^{-\frac{\varkappa}{2}}\sqrt{A^2(t)-B^2(t)}\,e^{\Gamma(t)}, \tag{47.14}$$

其中 a 表示 L 内部的任一定点，而 $\Gamma(t)$ 由以下的公式确定：

$$\Gamma(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln[(t-a)^{\mp\varkappa}G(t)]\,dt}{t-t_0}, \tag{47.15}$$

其中 $G(t)$ 的值是由公式(47.6)确定的. 在下述情形下，$\varkappa$ 前面取上面的符号(－)，如此选定 L 上的正方向，由 L 所圍成的有界区域保持在 L 之左側，在相反的情形下，$\varkappa$ 前面取下面的符号(＋). (47.14)的右端在 L 上任一点处两种可能的值，可以任意地选定一种，然后連續地变化这个值。

公式(47.10)給出了积分方程(47.1)当 $\varkappa\geqslant 0$ 时的一般解. 如果认为在公式(47.10)中 $P_{\varkappa-1}(t_0)=0$，又认为方程的自由項 $f(t)$ 适合(充分和必要)条件(47.8)，那么，当 $\varkappa<0$ 时，解亦可以由同一个公式給出(其中設 $P_{\varkappa-1}(t_0)\equiv 0$)；依据(47.12)，条件(47.8)可以改写成

$$\int_L \frac{t^k f(t)\,dt}{Z(t)} = 0, \quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ -\varkappa-1. \qquad (47.16)$$

И. Н. Векуа[1] 給出了和公式(47.9)～(47.16)等价的一些公式①.

在 $f(t)=0$ 的情形下，亦卽，在研究齐次方程的情形时，上面的結果表明，当 $\varkappa\leqslant 0$ 时，齐次方程沒有异于零的解，而当 $\varkappa>0$ 时，它恰好有 $\varkappa$ 个綫性无关解，所有这些解均由下式給出：

$$\varphi(t) = B^*(t) Z(t) P_{\varkappa-1}(t), \qquad (47.17)$$

其中 $P_{\varkappa-1}(t)$ 是次数不超过 $\varkappa-1$ 的任意多項式.

我們把函数 $Z(t)$ 叫做对应于方程(47.1)的典則函数.

我們把上面得到的結果簡述如下：

I. 如果 $\varkappa>0$, 則齐次方程 $\mathbf{K}^0\varphi=0$ 恰好有 $\varkappa$ 个綫性无关解.

II. 如果 $\varkappa\leqslant 0$, 則这个方程沒有非零解.

III. 如果 $\varkappa\geqslant 0$, 則非齐次方程 $\mathbf{K}^0\varphi=f$ 对任何右端 f 均是可解的.

IV. 如果 $\varkappa<0$, 則这个方程为可解的充分和必要条件是右端 f 满足 $-\varkappa$ 个下述形式的条件：

$$\int_L f\psi_k\,dt = 0, \quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ -\varkappa-1, \qquad (47.18)$$

其中 ψ_k 是确定的綫性无关的函数(参看(47.16)). 当适合这些条件时，方程有而且只有一个解.

在 $\varkappa>0$ 的情形下，齐次方程所有的解都由公式(47.17)給出；在 $\varkappa\geqslant 0$ 的情形下，非齐次方程的一般解由公式 (47.10) 給出；在 $\varkappa<0$ 的情形下，非齐次方程的可解性条件由公式(47.16)給出，而解則由公式(47.10)取 $P_{\varkappa-1}(t_0)=0$ 而給出.

注釋 1 在实际中直接利用公式 (47.9) 常常会更方便些；例

---

① И. Н. Векуа 实际上仅給出了当 L 由一条封閉圍綫所构成的情形的公式. 但是，在解决了对应的联結問題以后，把它推广到几条圍綫的情形并不需要任何原則上是新的方法.

如,参看后一注释.

注释 2 如果在特征方程(47.1)中 $A(t_0)\equiv 0$, 于是根据条件, 在 L 上处处都有 $B(t_0)\neq 0$, 不失一般性, 可以认为 $B(t_0)=1$; 此时,得到形如

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0) \tag{47.19}$$

的方程.

将假定 L 上的正方向按照在 § 29, 1° 段中那样的选擇, 又假定 S^+, S^- 表示和所提到的地方一样(参看第 139 頁图 16).

在这种情形下, $G(t)=-1$. 容易看出(和 § 35, 注释 4 作一比較),典則函数 $X(z)$ 由下式确定(精确到差一个常数因子)

$$X(z)=\begin{cases}-1 & \text{当 } z\in S^+,\\ +1 & \text{当 } z\in S^-.\end{cases} \tag{47.20}$$

这样一来, $X^+(t)=-1$, $X^-(t)=1$, 并且由公式(47.9)給出

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{47.21}$$

于是,正象我們所希望的那样,我們用另外的方法得到了在 § 32 中所推出过的反演公式.

注释 3 不难推广到构成 L 的一些圍綫有有限个公共点的情形;和 § 35 中注释 3 作一比較.

§ 48. 特征方程的相联方程的求解

我們現在研究方程 $\mathbf{K}^0\varphi=f$ 的相联方程

$$\mathbf{K}^{0\prime}\psi\equiv A(t_0)\psi(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\psi(t)\,dt}{t-t_0}=g(t_0); \tag{48.1}$$

这个方程的指标 $\varkappa'$ 等于 $-\varkappa$, 而 $\varkappa$ 仍然表示算子 $\mathbf{K}^0$ 的指标.

用下面簡单的方法, 也可以把方程 (48.1) 归結为一个联結問

題[①]. 引进一个在无穷远处取值零的分区全純函数

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{B(t)\psi(t)\,dt}{t-z}. \tag{48.2}$$

注意到公式

$$B(t_0)\psi(t_0)=\Psi^+(t_0)-\Psi^-(t_0),$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{B(t)\psi(t)}{t-t_0}\,dt=\Psi^+(t_0)+\Psi^-(t_0),$$

則可以看出,方程(48.1)和下述問題是等价的:

要求根据条件

$$\begin{aligned}A(t_0)\psi(t_0)&=\Psi^+(t_0)+\Psi^-(t_0)+g(t_0),\\B(t_0)\psi(t_0)&=\Psi^+(t_0)-\Psi^-(t_0),\end{aligned} \tag{48.3}$$

来找一个 H 类的函数 $\psi(t)$ 和一个在无穷远处取值零的分区全純函数 $\Psi(z)$.

条件(48.3)正好等价于条件

$$(A+B)\psi=2\Psi^++g,\quad (A-B)\psi=2\Psi^-+g,$$

或者还等价于

$$\psi=\frac{2\Psi^+}{A+B}+\frac{g}{A+B},\quad \psi=\frac{2\Psi^-}{A-B}+\frac{g}{A-B}. \tag{48.4}$$

比較右端,就得出联結問題

$$\Psi^+(t_0)=[G(t_0)]^{-1}\Psi^-(t_0)+\frac{B(t_0)\,g(t_0)}{A(t_0)-B(t_0)}, \tag{48.5}$$

其中 $G(t_0)$ 仍然象在前一节中那样,表示

$$G(t_0)=\frac{A(t_0)-B(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}, \tag{48.6}$$

而且要求所要找的解在无穷远处取值零. 解决了这个問題以后,根据公式(48.4)中的任何一个就可得出原来問題的解.

---

① 这个方法是由著者本人(对更一般的情形,亦即,对奇异积分方程組的情形)指出的,并发表在 Н. И. Мусхелишвили 和 Н. П. Векуа 的論文[1]中. 这里所考虑的方程一般可以利用代换 $\varphi(t)=B(t)\psi(t)$ 把它化为特征方程;但是,对于 $B(t)$ 并不是处处都不等于零的情形,进行这种代换(至少在未經补充研究以前)并不能认为是合法的.

我們应該注意的是，从 (48.5) 取 $g(t)\equiv 0$ 而得的齐次联結問題

$$\Psi^+(t_0)=[G(t_0)]^{-1}\Psi^-(t_0), \tag{48.7}$$

是由 (47.5) 取 $f\equiv 0$ 而得的齐次联結問題的相联問題 (§ 36). 因此，如果用 $X(z)$ 及 $\varkappa$ 表示后一个問題的典則解及指标，那么，$[X(z)]^{-1}$ 及 $\varkappa'=-\varkappa$ 是問題 (48.7) 的典則解及指标. 与此相应，当 $\varkappa'\geqslant 0$ (亦卽，当 $\varkappa\leqslant 0$) 时，問題 (48.5) 在无穷远处取值零的一般解可以表成下列形式：

$$\Psi(z)=\frac{[X(z)]^{-1}}{2\pi i}\int_L\frac{X^+(t)B(t)g(t)\,dt}{[A(t)-B(t)](t-z)}+[X(z)]^{-1}Q_{\varkappa'-1}(z), \tag{48.8}$$

其中 $Q_{\varkappa'-1}(z)$ 是次数不超过 $\varkappa'-1$ 的任意多項式 (当 $\varkappa'=0$ 时，$Q_{\varkappa'-1}(z)=0$).

当 $\varkappa'<0$ (亦卽，当 $\varkappa>0$) 时，如果适合下列可解性的充分和必要条件

$$\int_L\frac{X^+(t)B(t)g(t)t^k\,dt}{A(t)-B(t)}=0 \quad (k=0,1,\cdots,-\varkappa'-1), \tag{48.9}$$

則解由同一个公式(48.8) (取 $Q_{\varkappa'-1}(z)=0$)給出.

根据公式(48.4) 中的任何一个，再經过一些簡单的变換以后，从(48.8)我們得出

$$\psi(t_0)=\mathbf{K}^{*\prime}g+\frac{P_{\varkappa'-1}(t_0)}{Z(t_0)}, \tag{48.10}$$

其中 $\mathbf{K}^{*\prime}$ 表示上一节中的算子 $\mathbf{K}^*$ 的相联算子，亦卽，

$$\mathbf{K}^{*\prime}g\equiv A^*(t_0)g(t_0)+\frac{1}{\pi i Z(t_0)}\int_L\frac{Z(t)B^*(t)g(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{48.11}$$

而且 $A^*(t)$, $B^*(t)$, $Z(t)$ 仍然表示上一节中[公式(47.12), (47.13)]所表示的函数.

条件(48.9)可以改写成

$$\int_L t^k Z(t) B^*(t) g(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, -\varkappa'-1. \tag{48.12}$$

当 $\varkappa'>0$ 时,齐次方程的一般解是由下式給出的:

$$\psi(t) = \frac{P_{\varkappa'-1}(t)}{Z(t)}, \tag{48.13}$$

其中 $P_{\varkappa'-1}(t)$ 是次数不超过 $\varkappa'-1$ 的任意多項式. 因此, 当 $\varkappa'>0$ 时,齐次方程恰好有 $\varkappa'$ 个綫性无关解; 当 $\varkappa'\leqslant 0$ 时, 齐次方程沒有非零解.

总而言之, 方程 $\mathbf{K}^{0\prime}\psi=g$ 和 $\mathbf{K}^0\varphi=f$ 具有同样的性质; 因此, 上一节的結論 I~IV 对于方程 $\mathbf{K}^{0\prime}\psi=g$ 也仍然是成立的, 只不过要把那里的 $\mathbf{K}^0$ 和 $\varkappa$ 分别換成 $\mathbf{K}^{0\prime}$ 和 $\varkappa'=-\varkappa$.

現在我們看出,在方程 $\mathbf{K}^0\varphi=f$ 的可解性条件(47.18)中所出現的函数 ψ_k $(k=1, 2, \cdots, \varkappa')$ 是相联齐次方程 $\mathbf{K}^{0\prime}\psi=0$ 的綫性无关解的完备系; 同样地, 方程 $\mathbf{K}^{0\prime}\psi=g$ 的可解性条件(48.12)可以写成

$$\int_L g\varphi_k dt = 0, \tag{48.14}$$

其中 φ_k $(k=1, 2, \cdots, \varkappa)$ 是齐次方程 $\mathbf{K}^0\varphi=0$ 的綫性无关解的完备系,而 $\mathbf{K}^0\varphi=0$ 是方程 $\mathbf{K}^{0\prime}\psi=g$ 的相联方程. 这些命題是在 §53 中将要証明的重要定理的特殊情形.

我們还指出下列事实, 它亦是在 §53 中要証明的一个重要的一般定理的特殊情形: 齐次方程 $\mathbf{K}^0\varphi=0$ 綫性无关解的个数 k 与相联齐次方程 $\mathbf{K}^{0\prime}\psi=0$ 綫性无关解的个数 k' 之差等于算子 $\mathbf{K}^0$ 的指标:

$$k-k'=\varkappa. \tag{48.15}$$

事实上,当 $\varkappa\geqslant 0$ 时, $k=\varkappa$, $k'=0$; 当 $\varkappa\leqslant 0$ 时, $k=0$, $k'=-\varkappa$.

§ 49. 若干一般性的注釋①

在继續往下討論之前，我們先提出若干一般性的注釋. 我們知道，第二类的 Fredholm 方程

$$\mathbf{N}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \int_L n(t_0, t)\varphi(t)\,dt = f(t_0) \qquad (49.1)$$

(其中 $A(t_0)$ 在 L 上处处不为零②) 和由 (49.1) 置 $A(t_0)=0$ 而得到的第一类的 Fredholm 方程

$$\int_L n(t_0, t)\varphi(t)\,dt = f(t_0) \qquad (49.2)$$

之間有着很大的本質上的区别. 但是，在奇异积分方程

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0, t)\varphi(t)\,dt = f(t_0) \qquad (49.3)$$

及

$$\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0, t)\varphi(t)\,dt = f(t_0) \qquad (49.4)$$

之間，并沒有这种本質上的区别.

通常我們也分别把奇异积分方程(49.3)及(49.4)叫做第二类和第一类方程(以后有时亦会这样做)，但是，这样的分类并不象在 Fredholm 方程情形的分类那样恰当. 正如我們以后将会見到的，

① 在这一节中，我們利用了若干泛函分析的一般性概念；因为以后除了一节(§ 133)(这一节亦可以略去)外都用不到这些概念. 因此，省略掉相应的地方，亦并不致于影响到对别处的理解. 在下列論文中，讲到了泛函分析的一般方法对奇异积分方程的有意义的应用：Ф. В. Аткинсон [1], Н. И. Ахиезер [1], И. Ц. Гохберг [1]～[5], И. Ц. Гохберг 和 М. Г. Крейн [1], [2], А. И. Гусейнов [2], М. Г. Крейн [1], С. Г. Михлин[1]～[7], С. А. Фрейдкин [2]～[4], З. И. Халилов [3], Б. В. Хведелидзе [18], Ю. И. Черский [1], J. Elliott [2], W. Koppelman 和 J. Pincus [1], H. Schaefer [1].

② 我們引进系数 $A(t_0)$ 是为了和奇异积分方程容易进行比較，实际上，在(49.1)中总可以規定 $A(t_0)=1$.

并且也正如通过一个簡单的例子我們已經看到过的（§47 中注釋2），方程(49.4)是方程(49.3)的一个簡单的特殊情形．关于这一点的理由一般地可以叙述如下：

为了簡单起見，我們将規定核 $n(t_0, t)$，系数 $A(t_0)$ 以及在(49.1)和(49.2)中的自由項都是連續函数，并且解 $\varphi(t)$ 須从連續函数的泛函空間 C 里来找．我們将把空間 C 的范数定义为

$$\max|\varphi(t)| \quad (t\in L),$$

而 $\varphi_1(t)$ 与 $\varphi_2(t)$ 之間的距离定义为 $\max|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|\,(t\in L)$．

我們用 $\mathbf{E}$ 表示单位算子，也就是說，$\mathbf{E}\varphi=\varphi$ 的算子，而 $\mathbf{n}$ 則表示由下式所确定的算子：

$$\mathbf{n}\varphi=\int_L n(t_0, t)\varphi(t)dt. \tag{49.5}$$

那么，方程(49.1)可以改写成

$$A\mathbf{E}\varphi+\mathbf{n}\varphi=f. \tag{49.1a}$$

綫性算子 $\mathbf{n}$ 是全連續算子，也就是說，它把每一个(按模)有界的函数 $\varphi(t)$ 的集合变成列紧集合，而算子 $\mathbf{E}$ 是簡单的連續算子．这样一来，在算子 $A\mathbf{E}+\mathbf{n}$ 中的两部分 $A\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{n}$ 具有本质上不同的性质．

現在轉到討論奇异积分方程(49.3)，并且把它写成

$$\mathbf{K}\varphi\equiv A\mathbf{E}\varphi+B\mathbf{I}\varphi+\mathbf{k}\varphi=f, \tag{49.3a}$$

其中 $\mathbf{I}$ 与 $\mathbf{k}$ 分别是由下式所确定的算子：

$$\mathbf{I}\varphi\equiv\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0},\quad \mathbf{k}\varphi\equiv\frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0, t)\varphi(t)dt. \tag{49.6}$$

为了簡单起見，我們假定 $A(t_0)$，$B(t_0)$ 及 $k(t_0, t)$ 在 L 上都适合 $H(\nu)$ 条件，又設 μ 是某一个确定的正数，$\mu\leqslant\nu$，$\mu<1$[①]．

我們討論所有在 L 上适合 $H(\mu)$ 条件的函数 $\varphi(t)$ 的集合，

① 我們仅把結果用来研究 Cauchy 型积分，因此，我們引进条件 $\mu<1$．但是，当 $\nu=1$ 时，在定义賦范空間 H^μ（参看后面）及証明它的完备性时，可以假定 $\mu\leqslant1$；这对証明算子 $\mathbf{k}$（参看后面）是全連續算子的情形亦如此．

并用下面的方式規定它的范数 $\|\varphi(t)\|$①：

$$\|\varphi(t)\| = M + M_0,$$

其中

$$M = \max|\varphi(t)| \quad (t \in L), \qquad M_0 = \sup \frac{|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|}{|t_2 - t_1|^{\mu}} \quad (t \in L)$$

(在后一个等式中 sup 表示上确界)；与此相应，我們把两个函数 $\varphi_1(t)$ 与 $\varphi_2(t)$ 之間的距离規定为 $\|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\|$. 容易看出，三角形公理是成立的（与范数和距离有关的所有其他公理也是成立的)，于是，函数 $\varphi(t)$ 的集合构成完备的綫性赋范空間，我們用 H^{μ} 表示这个空間②.

容易看出，**I** 正象 **E** 那样是 H^{μ} 空間的連續(但并不是全連續的)算子，算子 $A\mathbf{E}+B\mathbf{I}$ 亦具有同样的性质. 因此，一般讲来，把算子 **K** 的特征部分 $A\mathbf{E}+B\mathbf{I}$ 看作一个整体是合理的.

但是，至于算子 **k**，則它与 **E** 及 **I** 有着本质上的区别，因为 **k** 是 H^{μ} 空間内的全連續算子，也就是說，它把函数 φ 的每一个有界集合都变成列紧集合(在 H^{μ} 空間的度量意义下). 我們来証明这一点. 設 $\{\varphi\}$ 是 H^{μ} 空間内适合条件 $\|\varphi\| < R$ 的函数集合，此处

---

① 这里范数的記号已遵照中文习慣把原文中 $|\varphi(t)|$ 改成 $\|\varphi(t)\|$，§ 133 中亦如此. ——譯者注

② 我們来証明这个空間的完备性. 設 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$ 是这个空間内的任意一个基本序列，因此，对每一个整数 $p>0$，均有

$$\|\varphi_{n+p} - \varphi_n\| \leqslant \varepsilon_n, \tag{*}$$

其中 ε_n 与 p 无关，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

由(*)可以知道，序列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$ 是 C 空間的基本序列，因此，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ 在 $\lim\limits_{n\to\infty} \max|\varphi - \varphi_n| = 0$ 的意义下存在. 再者，由(*)可以得出

$$\sup\left|\frac{\varphi_{n+p}(t_2) - \varphi_{n+p}(t_1)}{|t_2 - t_1|^{\mu}} - \frac{\varphi_n(t_2) - \varphi_n(t_1)}{|t_2 - t_1|^{\mu}}\right| \leqslant \varepsilon_n,$$

从而由于 ε_n 与 p 无关，可以得出

$$\sup\left|\frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{|t_2 - t_1|^{\mu}} - \frac{\varphi_n(t_2) - \varphi_n(t_1)}{|t_2 - t_1|^{\mu}}\right| \leqslant \varepsilon_n.$$

于是，显然可以知道，$\dfrac{|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|}{|t_2 - t_1|^{\mu}}$ 是有界量，因此，函数 φ 属于 H^{μ} 空間；另外，显然，又有 $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi - \varphi_n\| = 0$，而这亦就証明了 H^{μ} 空間的完备性.

R 是常数. 那么, 由范数 $\|\varphi\|$ 的定义可以知道, 函数 φ 是一致有界的, 又是等度連續的①. 于是, 依据 Arzela 定理, 从这些函数 φ 的每一个无穷子集都可以选出一个一致收斂的子序列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots$. 我們用 φ 表示它的极限(在普通意义下, 亦即, 在 C 空間的度量意义下的极限). 假設 $\psi_n = \mathbf{k}\varphi_n$, $\psi = \mathbf{k}\varphi$. 如果我們能够証明, 在 H^μ 的度量意义下, ψ_n 趋于 ψ, 亦即, $\|\omega_n\| \to 0$, 其中 $\omega_n = \psi - \psi_n$, 那么, 我們的命題就得到了証明. 而这直接可以由 $\max|\omega_n| \to 0$, 以及

$$\omega_n(t_2) - \omega_n(t_1) = \frac{1}{\pi i}\int_L [k(t_2, t) - k(t_1, t)]\rho_n(t)\,dt$$

导出, 从后式有

$$\frac{|\omega_n(t_2) - \omega_n(t_1)|}{|t_2 - t_1|^\mu} \leqslant \frac{1}{\pi}\int_L \frac{|k(t_2, t) - k(t_1, t)|}{|t_2 - t_1|^\mu}|\rho_n(t)|\,dt,$$

其中 $\rho_n = \varphi - \varphi_n$, 并因此有

$$\sup \frac{|\omega_n(t_2) - \omega_n(t_1)|}{|t_2 - t_1|^\mu} \to 0.$$

这样一来, 我們的結論便得到了証明.

特别是, 从上述, 奇异积分算子 $\mathbf{K}$ 中的特征部分 $A\mathbf{E} + B\mathbf{I}$ 应該和 Fredholm 算子 $\mathbf{N}$ 中的 $A\mathbf{E}$ 部分起着类似的作用. 但是, 也应該考慮到它們之間存在着的本质上的区别: 算子 $A\mathbf{E}$ 是有逆的, 亦即, 方程 $A\mathbf{E}\varphi = f$ 总是单值可解的, 而算子 $A\mathbf{E} + B\mathbf{I}$ 并不是一定有逆的②. 事实上, 我們已看到, 方程

$$\mathbf{K}^0\varphi \equiv A\mathbf{E}\varphi + \mathbf{I}\varphi = f$$

只有当 $\varkappa \geqslant 0$ 时, 才对每一个右端 f 都是可解的, 而且只有当 $\varkappa = 0$ 时, 它才对每一个右端 f 都是单值可解的. 在下面我們将会看到, 指标 $\varkappa = 0$ 的奇异积分方程与(第二类的) Fredholm 方程在很多地方是类似的.

① 这是由于 $|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leqslant M_0|t_2 - t_1|^\mu \leqslant R|t_2 - t_1|^\mu$.

② 正由于这个緣故(参看 С. М. Никольский [1]), 奇异积分方程理論的基本定理与 Fredholm 定理是不同的.

注釋 在(49.3a)中左端的項 $A\mathbf{E}\varphi$ 和 $B\mathbf{I}\varphi$ 在已知的意义下是平等的这一事实，还可以从下面的討論得出来．作代换：$\psi=\mathbf{I}\varphi$，其中 ψ 为新的未知函数．則根据反演公式(§32) $\varphi=\mathbf{I}\psi$，方程(49.3a)还可以写成形式

$$B\mathbf{E}\psi+A\mathbf{I}\psi+\mathbf{k}_1\psi=f,$$

其中，容易看出，算子 $\mathbf{k}_1$ 与算子 $\mathbf{k}$ 有着同样的形式；这样一来，系数 A 和 B 可以随便改变它們的地位．

§50. 奇异积分方程的正則化

研究奇异积分方程的普通方法是把它正則化，也就是，把它归結为 Fredholm 方程．我們現在介紹一种正則化的方法①．

假定已給定了一个奇异积分方程

$$\mathbf{K}\varphi=f, \tag{50.1}$$

又設 $\mathbf{M}$ 是 $\mathbf{K}$ 的任一正則化算子(亦是奇异积分算子)(§45)．

将算子 $\mathbf{M}$ 作用到方程(50.1)的两端，我們得到一个 Fredholm 方程

$$\mathbf{N}\varphi\equiv\mathbf{MK}\varphi=\mathbf{M}f. \tag{50.2}$$

显然，原来方程的每一个解亦都是 Fredholm 方程(50.2)的解；但是，相反的結論，一般讲来，是不对的②；因此，方程(50.1)和(50.2)一般說来并不是等价的．但是，容易看出，如果我們会找出 Fredholm 方程(50.2)的所有解，那么我們也就可以求出原来方程(50.1)的所有解来．这一点我們将要在后面詳細地加以討論(§53)；暫时我們先指出一个可由上面直接得出的推論：

齐次奇异积分方程

$$\mathbf{K}\varphi=0 \tag{50.3}$$

① 到目前为止，这种方法是最常用的，它是由奇异积分方程理論的奠基人 Poincaré 和 Hilbert (在不同的特殊应用中)提出的．F. Noether[1] 把它用到一般的情形上．

② 后面将要詳細讲到这一点(参看§53)．

綫性无关解的个数是个有限数.

事实上，方程 (50.3) 的每一个解亦都是齐次 Fredholm 方程 $\mathbf{MK}\varphi=0$ 的解，可是，我們知道，方程 $\mathbf{MK}\varphi=0$ 的綫性无关解之个数是有限的.

我們再指出下述重要的情况. Fredholm 方程 (50.2) 具有形式①

$$\mathbf{N}\varphi\equiv a(t_0)\varphi(t_0)+\int_L n(t_0, t)\varphi(t)dt=g(t_0), \qquad (50.4)$$

其中，根据 §45 的結果，容易驗証，在 L 上 $a(t_0)$ 处处都不取値零，并且是属于 H 类的，右端 $g(t_0)=\mathbf{M}f(t_0)$ 亦是属于 H 类的，而核 $n(t_0, t)$ 具有形式

$$n(t_0, t)=\frac{n^*(t_0, t)}{|t-t_0|^\lambda}, \quad 0\leqslant\lambda=\text{常数}<1, \qquad (50.5)$$

其中 $n^*(t_0, t)$ 是属于 H 类的.

Fredholm 方程通常都是在連續函数类中求解；不过，就我們的目的来說，重要的是要在 H 类中找解. 但是，并不需要在事前把后一个补充条件加到 Fredholm 方程 (50.4) 的解上，因为它是自动适合这个条件的. 也就是說，容易証明，在我們所假定的条件下，方程 (50.4) 的每一个連續解(甚至只是有界而且可积的解)必然是属于 H 类的. 在下一节中，我們将要証明这一个結論.

§ 51. Fredholm 方程解的連續性特征

1°. 为了要証明上一节末尾所讲到的結論，我們来研究 Fredholm 方程

$$a(t_0)\varphi(t_0)+\int_L n(t_0, t)\varphi(t)dt=g(t_0). \qquad (51.1)$$

---

① 我們常常假定，所考慮的奇异积分算子适合 §44 中所指出的条件. 除此而外，我們常常还假定，(50.1) 的右端 $f(t_0)$ 是属于 H 类的，并且对未知函数 $\varphi(t)$ 亦要求适合这个条件.

我們把 $a(t_0)$ 理解为 H 类中不取值零的已知函数①，又认为核 $n(t_0, t)$ 可表为形式

$$n(t_0, t)=\frac{n^*(t_0, t)}{|t-t_0|^\lambda}, \quad 0<\lambda=\text{常数}<1, \tag{51.2}$$

其中 $n^*(t_0, t)$ 对两个变量是属于 H 类的.

我們来証明：如果函数 $g(t_0)$ 是属于 H 类的，那么，方程 (51.1) 的任何一个有界可积解 $\varphi(t)$ 亦是属于 H 类的.

从 (51.1) 可以知道

$$\varphi(t_0)=-\frac{\omega(t_0)}{a(t_0)}+\frac{g(t_0)}{a(t_0)}, \tag{51.1a}$$

其中已令

$$\omega(t_0)=\int_L n(t_0, t)\varphi(t)dt=\int_L\frac{n^*(t_0, t)\varphi(t)dt}{|t-t_0|^\lambda}. \tag{51.3}$$

如果我們能够証明，对于任何有界可积函数 $\varphi(t)$，函数 $\omega(t_0)$ 是属于 H 类的，那么我們的結論就得到了証明. 而为了証明这一点，我們只需証明：函数

$$\omega(t_0, t)=\int_L\frac{n^*(t_1, t)\varphi(t)dt}{|t-t_0|^\lambda}$$

对 t_0 及 t_1（t_1 和 t_0 都是 L 上的任意点）是适合 H 条件的就够了.

有关 t_1 的这个結論是几乎显然的：用 μ 表示函数 $n^*(t_1, t)$ 对于 t_1 的 H 条件的指数，我們得出

$$\begin{aligned}|\omega(t_0, t_1+h)-\omega(t_0, t_1)|&\\ \leqslant\int_L&\frac{|n^*(t_1+h, t)-n^*(t_1, t)||\varphi(t)|ds}{|t-t_0|^\lambda}\\ \leqslant B|h|^\mu&\int_L\frac{ds}{|t-t_0|^\lambda}\leqslant B_0|h|^\mu,\end{aligned} \tag{51.4}$$

其中 B 与 B_0 皆为常数.

我們現在証明有关 t_0 的結論. 我們有

① 不失一般性，可以假定 $a(t_0)=1$.

$$\omega(t_0+h,\ t_1)-\omega(t_0,\ t_1)$$
$$=\int_L \frac{|t-t_0|^\lambda-|t-t_0-h|^\lambda}{|t-t_0|^\lambda|t-t_0-h|^\lambda} n^*(t_1,\ t)\varphi(t)dt,$$

由此,再注意到 $|t-t_0|^\lambda$ 是适合 $H(\lambda)$ 条件的,就有

$$|\omega(t_0+h,\ t_1)-\omega(t_0,\ t_1)|$$
$$\leqslant C|h|^\lambda \int_L \frac{ds}{|t-t_0|^\lambda|t-t_0-h|^\lambda}=C|h|^\lambda I,$$

其中 C 为常数. 我們現在把积分 I 分成两部分: $I=I_1+I_2$, 其中 I_1 是展布在 l 上的积分, l 是用以 t_0 为中心, R 为半徑的标准圓从 L 上截取下的标准弧,而 I_2 是展布在曲綫 $L-l$ 上的积分. 不失一般性,可以假定 $|h|<R/2$. 那么,显然, $|I_2|<C_2$, 其中 C_2 为常数. 再者,引进变量 $r=|t-t_0|$, 我們就得到

$$I_1<C_1\int_0^R \frac{dr}{r^\lambda|r-\delta|^\lambda},$$

其中 C_1 是常数,且为了簡单起見,我們在这里引进了記号 $\delta=|h|$. 通过关系式 $r=\delta\cdot\rho$ 引进新的变量 ρ, 我們得出

$$|I_1|<C_1\delta^{1-2\lambda}\int_0^{\frac{R}{\delta}} \frac{d\rho}{\rho^\lambda|1-\rho|^\lambda}.$$

現在如果 $\lambda>\frac{1}{2}$, 則有

$$\int_0^{\frac{R}{\delta}} \frac{d\rho}{\rho^\lambda|1-\rho|^\lambda}<\int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho^\lambda|1-\rho|^\lambda}=\text{常数}$$

(后一个积分是收斂的). 因为在公式 (51.2) 中总可以认为 $\lambda>\frac{1}{2}$ $\left(\text{当 } \lambda\leqslant\frac{1}{2}\right.$ 时,沒有什么困难亦同样可以得出一个直接的估計式$\left.\right)$, 因此我們的結論得到了証明.

2°. 上面所得到的結果可以稍为加以推广. 亦就是,假定函数 $\varphi(t)$ 在 L 上是可积的,并在 L 上可能除了有限个 L 上点 c 的(任意小的) 邻域外, 处处都是有界的, 而在点 c 附近这个函数可能是

无界的，但是，这个函数在那里具有性质

$$|\varphi(t)|<\frac{\text{常数}}{|t-c|^{\alpha}},\quad 0\leqslant\alpha=\text{常数}<1; \tag{51.5}$$

另外，还假定，可能除了值 $t=c$ 而外，$\varphi(t)$ 适合方程(51.1). 于是我們現在能够証明：如果在点 c 处給函数 $\varphi(t)$ 以适当的值，那么这个函数在 L 上就是属于 H 类的.

在証明时，显然只需考虑仅有一个 c 点的情形就够了. 如果我們能够証明由公式 (51.3) 所确定的函数 $\omega(t_0)$ 是有界的，那么我們的結論就得到了証明，这是因为証明了这一点以后，我們便可以利用上一段所得出的結果.

我們有

$$|\omega(t_0)|\leqslant K\int_L\frac{ds}{|t-c|^{\alpha}|t-t_0|^{\lambda}},$$

其中 K 是某个常数. 依据我們的要求，为了估計 $|\omega(t_0)|$，显然只需估計下列积分就够了：

$$I_0(t_0)=\int_l\frac{ds}{|t-c|^{\alpha}|t-t_0|^{\lambda}},$$

其中 l 表示由以 c 为中心以 R 为半徑的标准圓周从 L 上截取的弧，而 t_0 是弧 l 上不与 c 重合的点. 令 $r=|t-c|$, $r_0=|t_0-c|$，我們就有

$$I_0(t_0)\leqslant K'\int_0^R\frac{dr}{r^{\alpha}|r-r_0|^{\lambda}}=K'I'(t_0),$$

其中 K' 为某个常数.

如果 $\alpha+\lambda<1$，那么，积分

$$I'(t_0)=\int_0^R\frac{dr}{r^{\alpha}|r-r_0|^{\lambda}}$$

是有界的[①]，于是我們的結論得到了証明.

我們可以通过将数 α (或者 λ) 稍許 (任意小地) 增大的办法来消除 $\alpha+\lambda=1$ 的情形.

① 比照第 99 頁.

我們来研究 $\alpha+\lambda>1$ 的情形. 作代换 $r=r_0\rho$, 我們得出

$$I'(t_0)=\frac{1}{r_0^{\alpha+\lambda-1}}\int_0^{\frac{R}{r_0}}\frac{d\rho}{\rho^\alpha|1-\rho|^\lambda}<\frac{1}{r_0^{\alpha+\lambda-1}}\int_0^\infty\frac{d\rho}{\rho^\alpha|1-\rho|^\lambda},$$

这是由于后一积分是收斂的.

从上面所得的估計式,可以得出对于函数 $\omega(t_0)$ 的类似的估計式:

$$|\omega(t_0)|<\frac{\text{常数}}{|t_0-c|^{\alpha+\lambda-1}},$$

依据等式(51.1a),由它可以导出 $\varphi(t)$ 的下列新的估計式

$$|\varphi(t)|\leqslant\frac{\text{常数}}{|t-c|^{\alpha'}},$$

其中 $\alpha'=\alpha+\lambda-1<\alpha$. 如果 $\alpha'+\lambda<1$, 那么, 我們可以化为前一个情形. 但若 $\alpha'+\lambda>1$(如前面所述, $\alpha'+\lambda=1$ 的情形可以弃去), 我們可以重复上面的討論, 且显然, 經过有限次这样的步驟以后, 我們可以把它归結为 $\alpha+\lambda<1$ (在新記号下) 的情形. 这样一来, 我們的結論便得到了証明.

§52. Fredholm 方程的豫解式

我們再提醒一下, Fredholm 方程

$$\mathbf{N}\varphi\equiv a(t_0)\varphi(t_0)+\int_L n(t_0,\ t)\varphi(t)dt=g(t_0) \qquad (52.1)$$

理論中的某些結果.

对于方程 (52.1) 中的元素, 我們暫时做一些比上面更一般的假定,亦就是,規定 $a(t)$ 是不为零的連續函数①,而

$$n(t_0,\ t)=\frac{n^*(t_0,\ t)}{|t_0-t|^\lambda},\quad 0\leqslant\lambda<1, \qquad (52.2)$$

其中 $n^*(t_0,\ t)$ 是 L 上的連續函数. 我們也可认为函数 $g(t)$ 是連續的.

① 不失一般性,象往常那样,可以认为 $a(t)=1$.

根据 Fredholm 方程理論，我們将认为以下的事实是已知的．如果齐次方程

$$\mathbf{N}\varphi=0 \tag{52.3}$$

沒有非零解，那么，方程(52.1)对每一个右端 $g(t)$ 都有唯一的解，并且这个解由公式

$$\varphi(t_0)=\mathbf{\Gamma}g\equiv\alpha(t_0)g(t_0)+\int_L\gamma(t_0,t)g(t)dt \tag{52.4}$$

給出，其中 $\alpha(t_0)=\dfrac{1}{a(t_0)}$，而 $\gamma(t_0,t)$ 是完全确定的函数，它具有形式

$$\gamma(t_0,t)=\frac{\gamma^*(t_0,t)}{|t-t_0|^\lambda},\quad 0\leqslant\lambda<1,$$

其中 $\gamma^*(t_0,t)$ 是連續函数．我們把函数 $\gamma(t_0,t)$ 叫做 Fredholm **豫解式**．

現在轉到討論齐次方程(52.3)有非零解的情形．上面已經提醒过，这个方程只能有有限多个綫性无关解，它的相联方程

$$\mathbf{N}'\psi=0 \tag{52.5}$$

亦有同样个数的綫性无关解．

我們分别用 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 和 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n$ 表示齐次方程(52.3)及(52.5)的綫性无关解的完备系．

当且仅当非齐次方程(52.1)的右端适合条件

$$\int_L g(t)\psi_j(t)dt=0,\quad j=1,2,\cdots,n \tag{52.6}$$

时，方程(52.1)才有解．

現在我們証明，在我們所討論的情形下，亦存在象在(52.4)中出現的那种算子 $\mathbf{\Gamma}$，并且这种算子具有下述的性质：如果适合条件(52.6)，則函数

$$\varphi(t_0)=\mathbf{\Gamma}g\equiv\alpha(t_0)g(t_0)+\int_L\gamma(t_0,t)g(t)dt$$

是方程(52.1)的解（更确切地說，它是一个解）；在这种情形下，我

們可以把函数 $\gamma(t_0, t)$ 叫做**广义的** Fredholm **豫解式**①.

我們要用的方法是設法把問題归結为齐次方程沒有非零解的情形来解决②.

为了这个目的,我們引入两組适合 H 条件③的函数 $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\cdots$, $\xi_n(t)$ 及 $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$, $\cdots$, $\eta_n(t)$, 它們与函数 $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\cdots$, $\varphi_n(t)$ 及 $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\cdots$, $\psi_n(t)$ 由下列关系式:

$$\int_L \varphi_i \xi_j dt = \delta_{ij}, \quad \int_L \psi_i \eta_j dt = \delta_{ij} \tag{52.7}$$

联系,其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = j, \\ 0 & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$

这样的函数 ξ_i 及 η_i 是一定可以用无穷多种办法作出的. 在本书末尾的附录三中将要証明这一点.

与方程(52.1)一起,我們来研究一个新的 Fredholm 积分方程

$$a(t_0)\varphi(t_0) + \int_L \left\{ n(t_0, t) + \sum_{i=1}^{n} \eta_i(t_0)\xi_i(t) \right\} \varphi(t)dt = g(t_0), \tag{52.8}$$

并且要証明,只要适合条件(52.6),它的任何一个解同时也是原来方程(52.1)的解. 事实上,假定 $\varphi(t)$ 是方程(52.8)的任一个解(如果这样的解是存在的),那么,根据方程本身,有

$$\mathbf{N}\varphi(t_0) + \sum_{i=1}^{n} a_i \eta_i(t_0) = g(t_0), \tag{52.9}$$

其中 a_i 是常数

$$a_i = \int_L \varphi(t)\xi_i(t)dt. \tag{52.10}$$

---

① Fredholm 本人也曾有过这样的豫解式. 广义的豫解式的最簡单的理論可以在 W. A. Hurwitz [1] 中找到, 他把它叫做拟豫解式. 此处所采用的广义的豫解式的作法就是他的方法.

② 参看前面的注釋.

③ 我們附加这个条件是为了应用于奇异积分方程; Hurwitz 只考慮了(实范圍内的)連續函数, 他并沒有引进这个条件.

将 (52.9) 的两端乘以 $\psi_k(t_0)dt_0$，并沿着 L 对于 t_0 进行积分，又注意到(52.6)，(52.7)以及(参看 § 46)

$$\int_L \psi_k \mathbf{N} \varphi dt_0 = \int_L \varphi \mathbf{N}' \psi_k dt_0 = 0 \qquad (52.11)$$

(因为 $\mathbf{N}'\psi_k=0$)，我們得到 $a_k=0$. 因此，在 (52.9) 中所有 $a_i=0$，于是，$\mathbf{N}\varphi=g(t_0)$，而这亦就証明了我們的結論.

最后，我們証明：由 (52.8) 取 $g(t_0)\equiv 0$ 而得出的齐次方程沒有非零解. 事实上，我們剛才已經看到这个方程的每一个解同时也是方程 $\mathbf{N}\varphi=0$① 的解，而且所有的常数 $a_i=0$. 因此，一方面 $\varphi=b_1\varphi_1+b_2\varphi_2+\cdots+b_n\varphi_n$，其中 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 皆为常数；另一方面，因为 $a_i=0$，故由 (52.10) 及 (52.7)，我們得出，所有 $b_i=0$，这亦就証明了我們的結論.

由上面还可以推出，非齐次方程(52.8)对每一个右端 $g(t_0)$ 都是单值可解的，而且这个解可以表成形式 $\varphi=\mathbf{\Gamma}g$，其中 $\mathbf{\Gamma}$ 是上述形式的算子. 此外，如果还适合条件 (52.6)，那么，正象我們所見到的那样，$\mathbf{\Gamma}g$ 将是原来方程(52.1)的一个解. 因此，我們便証明了广义豫解式的存在性.

在适合条件(52.6)下，方程 (52.1) 的一般解显然可以表成形式

$$\varphi=\mathbf{\Gamma}g+c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\cdots+c_n\varphi_n. \qquad (52.12)$$

还容易看出，$\mathbf{\Gamma}$ 的相联算子 $\mathbf{\Gamma}'$ 对方程 $\mathbf{N}\varphi=g$ 的相联方程 $\mathbf{N}'\omega=g$ 所起的作用与算子 $\mathbf{\Gamma}$ 对方程 $\mathbf{N}\varphi=g$ 所起的作用是同样的.

最后我們指出下列事实. 我們假定，在方程 (52.1) 中系数 $a(t_0)$ 是属于 H 类的，并且核 $n^*(t_0, t)$ 具有 (52.2) 的形式，其中 $n^*(t_0, t)$ 亦是属于 H 类的. 再假定 $g(t_0)$ 是 L 上点 t_0 的 H 类的任意函数. 注意到函数 $\varphi(t_0)=\mathbf{\Gamma}g(t_0)$ 是方程 (52.8) 的解，根据

---

① 因为当 $g(t_0)\equiv 0$ 时，条件(52.6)显然是适合的.

上一节所得的結果，可以看出，$\mathbf{\Gamma}g(t_0)$ 是属于 H 类的．对 $\mathbf{\Gamma}'g(t_0)$ 显然也有同样的結論．

§53. 基本定理

把上面几节所得到的結果和 Fredholm 方程的基本理論进行对照，就容易导出奇异积分方程①

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t_0, t)\varphi(t)dt}{t-t_0}=f(t_0) \quad (53.1)$$

的一般理論．

方程 (53.1) 的一般理論基本上首先是由 F. Noether[1] 給出的．在 И. Н. Векуа 的論文中，特別在他的論文[7]中，給出了奇异积分方程理論非常簡单的形式，我們将在下面几节中叙述 И. Н. Векуа 的結果．

但是，在这一节中，我們基本上遵照着 Noether② 的方法来讲解，只做了一些修正和簡化．

設 $\mathbf{M}$ 是算子 $\mathbf{K}$ 的某个正則化算子(参看 §45)．正象在 §50 中那样，由(53.1)我們得出一个 Fredholm 方程

$$\mathbf{N}\varphi \equiv \mathbf{MK}\varphi=\mathbf{M}f, \quad (53.2)$$

在它的解中包含了方程(53.1)的所有解．

現在提出的目的是：在有了 Fredholm 方程 (53.2) 的一般解后，要想求出方程(53.1)的一般解来．

首先，我們写出方程(53.2)的可解性条件，它們是

$$\int_L \omega_j \mathbf{M} f dt_0=0, \quad j=1, 2, \cdots, n, \quad (53.3)$$

---

① 正象在这整个一部分中那样，我們假定适合在 §44 中所加的条件．

② F. Noether 考虑了可表为在 §44 末尾注释 3 中所指出的形式的奇异积分方程，但是，他的討論不作任何原則性的改变，便可以移植到这里所考虑的情形．这种移植作了若干簡化后发表在 В. Д. Купрадзе 的論文[3]（参看 §55 末尾的脚注）中．

其中 $\omega_j=\omega_j(t_0)$, $j=1, 2, \cdots, n$ 是 (53.2) 的相联齐次 Fredholm 方程

$$\mathbf{N}'\psi\equiv\mathbf{K}'\mathbf{M}'\psi=0 \tag{53.4}$$

的綫性无关解的完备系. 假定条件 (53.3) 是适合的，而这些条件依据公式(46.7)可以改写成:

$$\int_L f\mathbf{M}'\omega_j dt_0=0, \quad j=1, 2, \cdots, n. \tag{53.5}$$

那么，方程(53.2)的一般解可以表示成(参看上一节)形式

$$\varphi(t_0)=\mathbf{\Gamma M}f(t_0)+\sum_{i=1}^{n} c_i\chi_i(t_0), \tag{53.6}$$

其中 $\mathbf{\Gamma}$ 是上一节所指出的完全确定的算子，而 χ_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 是齐次方程 $\mathbf{MK}\varphi=0$ 的綫性无关解的完备系，c_i 都是任意常数.

但是，方程(53.2)的这个解可能并不是原来方程(53.1)的解. 事实上，如果 φ 是方程 (53.2) 的任一个解，而方程 (53.2) 可以改写成:

$$\mathbf{M}(\mathbf{K}\varphi-f)=0,$$

那么，显然有

$$\mathbf{K}\varphi-f=\sum_{i=1}^{m} a_i\xi_i, \tag{53.7}$$

其中 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ 是方程 $\mathbf{M}\xi=0$ 的綫性无关解的完备系，而 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是某些常数. 显然，如果給定了函数 φ，也就是，如果公式(53.6)中的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 都給定了，那么，常数 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 将是完全确定了的.

为了保証方程(53.2)的解(53.6)也是方程 (53.1) 的解，必需而且只需使所有 $a_i=0$. 我們把这些条件通过已知函数 f 和常数 c_j 来表示；为了这个目的，把公式 (53.7) 中的常数 a_i 用上面所述元素来表示. 为此我們这样来进行：設 $\xi_1^*, \xi_2^*, \cdots, \xi_n^*$ 是 L 上 H 类的任意的确定函数，使它們适合下列条件:

$$\int_L \xi_i(t_0)\xi_j^*(t_0)dt_0=\delta_{ij},$$

其中

$$\delta_{ij}=1\ (\text{当}\ i=j),\quad \delta_{ij}=0\ (\text{当}\ i\neq j);$$

这样的函数是一定可以找到的[①]. 現在将 (53.7) 的两端乘以 $\xi_j^*(t_0)dt_0$ 并且沿着 L 积分,那么,我們得出

$$a_j=\int_L \xi_j^*(\mathbf{K}\varphi-f)dt_0.$$

現在把函数 $\varphi(t_0)$ 用它的表示式 (53.6) 来替代,并且进行簡单的变换[②],我們就得到公式

$$a_j=f_j+\sum_{i=1}^{n}A_{ji}c_i, \tag{53.8}$$

其中 f_j 是通过函数 f 由下述公式表示的常数:

$$f_j=\int_L f_j^*(t_0)f(t_0)dt_0, \tag{53.9}$$

其中 $f_j^*(t_0)$ 表示 H 类中完全确定的函数,并且它們既与函数 f 无关,又与常数 c_i 无关,而 A_{ji} 是完全确定的常数,它們亦与 f 和 c_i 无关. 于是,为了保証由公式 (53.6) 所确定的函数 φ 是原来方程 (53.1)的解,必須而且只須使常数 c_i 适合綫性代数方程組

$$\sum_{i=1}^{n}A_{ji}c_i+f_j=0,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ m. \tag{53.10}$$

如果这个方程組有解,那么,原来的积分方程亦有解,反之亦然. 但是,我們知道,方程組(53.10)的可解性条件是有限个形式为

$$\sum_{j=1}^{m}B_{ij}f_j=0$$

的关系式(具体是多少个并无关紧要),其中 B_{ij} 是确定的常数. 回想起,常数 f_j 具有(53.9)的形式,我們可以把上述条件改写成形式

$$\int_L f(t)\psi_j^*(t)dt=0, \tag{53.11}$$

---

① 参看本书末尾的附录三.

② 特别是这样的变换(参看 §46)

$$\int_L \xi_j^*\,\mathbf{K\Gamma M}f dt_0=\int_L f\mathbf{M'\Gamma'K'}\xi_j^* dt_0.$$

其中 $\psi_j^*(t)$ 是与 f 无关的完全确定的 H 类函数. 再注意到条件(53.5)也具有(53.11)的形式,我們就得出下述重要的結論:

原来的积分方程可解的充分和必要条件，可以表成有限个形式为(53.11)的条件,其中 $\psi_j^*(t)$ 是 H 类中确定的函数.

現在不难証明下面三个属于 F. Noether 的定理，它們在形式为(53.1)的奇异积分方程理論中起着著名的 Fredholm 定理对 Fredholm 方程所起的同样的作用. 这三个定理是:

定理 I **方程**

$$\mathbf{K}\varphi=f \tag{53.1}$$

可解的充分和必要条件是

$$\int_L f(t)\psi_j(t)dt=0, \quad j=1, 2, \cdots, k', \tag{53.12}$$

其中 $\psi_1(t), \psi_2(t), \cdots, \psi_{k'}(t)$ **是相联齐次方程** $\mathbf{K}'\psi=0$ **的綫性无关解的完备系.**

定理 II **齐次方程** $\mathbf{K}\varphi=0$ **綫性无关解的个数** k **与相联齐次方程** $\mathbf{K}'\psi=0$ **綫性无关解的个数** k' **之差，只与算子** $\mathbf{K}$ **的特征部分有关.**

定理 III **在前一定理中所提到的差等于算子** $\mathbf{K}$ **的指标，也就是說，**

$$k-k'=\varkappa. \tag{53.13}$$

定理 II 显然是定理 III 的直接推論,这是因为根据指标 $\varkappa$ 的定义本身，它只与算子 $\mathbf{K}$ 的特征部分有关. 但是，我們认为单独列出这一条定理 II 还是合式的，这是由于定理 I 和这个定理都可以不通过求解联結問題来証明,因此,就有可能把这些定理推广到一系列其他类型的奇异积分方程上去，而对这些方程或者不可能直接利用联結問題或与它类似的問題，或者利用它們反而会或多或少地复杂化①. 現在我們轉到定理 I～III 的証明.

① 根据同样的理由,尽管 И. Н. Векуа [7] 的方法一开始利用了联結問題，可以使得証明大大地簡化,但是,我們认为根本不讲述証明定理 I 和定理 II 的 Noether 方法是不切当的.

定理 I 的証明 条件(53.12)的必要性,可以直接从 §46 末尾所讲的結果推出. 我們現在証明条件 (53.12) 的充分性. 为此只要証明条件(53.11)是条件 (53.12) 的推論就够了,因为我們知道 (53.11) 是方程 (53.1) 可解的充分条件. 用下面的簡单方法 (F. Noether 的方法) 很快地就可以达到目的. 假定 $g(t)$ 是任意一个 H 类的函数. 方程

$$\mathbf{K}\varphi=\mathbf{K}g$$

是可解的,因为 $\varphi=g$ 就是它的一个解. 于是,根据条件(53.11)的必要性,有

$$\int_L \psi_j^* \mathbf{K} g dt=\int_L g\mathbf{K}'\psi_j^* dt=0.$$

因为这个等式对每一个函数 g 都应該成立,于是,显然应該有 $\mathbf{K}'\psi_j^*\equiv 0$, 也就是説, ψ_j^* 是齐次方程 $\mathbf{K}'\psi=0$ 的解. 所以, ψ_j^* 应該是函数 ψ_j 的綫性組合. 因此,条件(53.11)就是条件(53.12)的推論,而这就是所要求証明的.

定理 II 及 III 的証明 仍然假定 $\mathbf{M}$ 是 $\mathbf{K}$ 的任意一个正則化算子. 我們考慮两个彼此相联的齐次 Fredholm 方程

$$\mathbf{MK}\varphi=0, \quad \mathbf{K}'\mathbf{M}'\psi=0. \tag{53.14}$$

这两个方程具有同样个数的綫性无关解. 我們用两种方法来計算这个个数,再比較所得的結果,我們便得出定理 II①.

我們分别用

$$\varphi_j(j=1,2,\cdots,k),\ \psi_j(j=1,2,\cdots,k'),$$
$$\chi_j(j=1,2,\cdots,m),\ \omega_j(j=1,2,\cdots,m')$$

表示方程

$$\mathbf{K}\varphi=0,\quad \mathbf{K}'\psi=0,\quad \mathbf{M}\chi=0,\quad \mathbf{M}'\omega=0$$

---

① 这里所引进的定理 II 的証明的想法和 F. Noether 的証明是一致的,但是,已經大大地簡化了它,这种証法是由 И. Н. Векуа 指出的,并且发表在我的論文[8]中.

的綫性无关解的完备系. 方程 $\mathbf{MK}\varphi=0$ 的所有解都适合方程

$$\mathbf{K}\varphi=\sum_{j=1}^{m} a_j\chi_j, \tag{53.15}$$

其中 a_j 都是常数. 这些常数应該如此选擇, 使得方程 (53.15) 是可解的,根据定理 I, 亦就是,要求

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij}a_j=0 \quad (i=1, 2, \cdots, k'), \tag{53.16}$$

其中

$$A_{ij}=\int_L \psi_i\chi_j dt \quad (i=1, 2, \cdots, k'; j=1, 2, \cdots, m). \tag{53.17}$$

假定 r 是矩陣 $\|A_{ij}\|$ 的秩; 那么, 我們知道, 在滿足方程組(53.16)的常数 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 中有 $m-r$ 个是完全任意的, 而其余 r 个則是它們的綫性組合. 我們用 $b_1, b_2, \cdots, b_{m-r}$ 表示这些任意常数. 把(53.15)右端的 a_j 换成它們通过 b_j 的表示式, 就把方程(53.15)变成形式

$$\mathbf{K}\varphi=\sum_{i=1}^{m-r} b_i\xi_i,$$

其中 ξ_i 是函数 χ_j 的某些綫性組合; 容易看出, 函数 ξ_i 是綫性无关的[①].

上面的方程对任何 b_i 都是可解的,解这个方程,就得出

$$\varphi=\sum_{i=1}^{m-r} b_i\eta_i+\sum_{j=1}^{k} c_j\varphi_j,$$

其中 c_j 和 b_i 同样都是任意常数, 而 η_i 是方程 $\mathbf{K}\varphi=\xi_i$ $(i=1, 2,$

---

① 事实上,如果对于某些常数值 b_i 有

$$\sum_{i=1}^{m-r} b_i\xi_i=0,$$

則和式

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\chi_i$$

(在其中以 a_i 用它通过 b_j 的表示式代入就得出上面的和式) 亦等于零,于是,根据 χ_i 的綫性无关性,所有 $a_i=0$. 但是, b_j 无非是 a_i 中的某些数,于是所有 $b_j=0$.

$\cdots, m-r)$ 的任一特解. 容易看出, 函数 η_i, φ_j 是綫性无关的[1]. 于是, (53.14) 的第一个方程恰好有 $m-r+k$ 个綫性无关的解.

現在轉到討論 (53.14) 的第二个方程, 我們得出完全类似的結果: 在推导中只需分别把 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{K}$ 换成 $\mathbf{K}'$ 和 $\mathbf{M}'$, 从而, 把 χ_i 和 φ_i 分别换成 ψ_i 和 ω_i. 与此相应, 代替常数 A_{ij}, 我們得到常数

$$A'_{ij}=\int_L \chi_i\psi_j\,dt=A_{ji},$$

于是, 矩陣 $\|A'_{ij}\|$ 的秩与前一矩陣 $\|A_{ij}\|$ 的秩是相同的, 它也等于 r. 这样一来, 我們得出: (53.14) 的第二个方程的綫性无关解之个数等于 $k'-r+m'$. 把这个結果和前面的結果作比較, 我們便得出

$$m'-r+k'=m-r+k,$$

由此, 最后得出

$$k-k'=m'-m. \tag{53.18}$$

因为, 对于所有具有同一特征部分的方程 $\mathbf{K}\varphi=0$, 我們都可以选取同一个 $\mathbf{M}$ 当作正則化算子, 因此, 数 $m'-m$ 也都是相同的, 于是, 由等式 (53.18) 便証明了定理 II.

根据定理 II 知道, 为了証明定理 III, 只要在算子 $\mathbf{K}$ 中仅仅保留它的特征部分来計算 $k-k'$ 就可以了; 但是, 这时方程 $\mathbf{K}\varphi=0$ 就变成了齐次特征方程, 所以由 § 48 末尾所讲到的公式 (48.15) 就可以直接推出定理 III[2].

---

[1] 事实上, 如果对某些值 b_i, c_j, 有

$$\sum_{i=1}^{m-r} b_i\eta_i+\sum_{j=1}^{k} c_j\varphi_j=0,$$

則将算子 $\mathbf{K}$ 作用到上一等式的两端, 便得出

$$\sum_{i=1}^{m-r} b_i\xi_i=0,$$

由此可以知道, 所有 $b_i=0$. 但是, 由此

$$\sum_{j=1}^{k} c_j\varphi_j=0,$$

这就意味着所有 $c_j=0$.

[2] F. Noether 本人为了計算差数 $k-k'$ 并沒有利用联結問題, 而是利用了 Riemann-Hilbert 問題, 他对后一个問題在同一篇論文中給出了一个不很严格的解法.

注釋 1 我們指出定理 III 的一个直接推論.

如果指标 $\varkappa>0$, 那么,齐次方程 $\mathbf{K}\varphi=0$ 至少有 $\varkappa$ 个綫性无关解,这是因为此时这个方程解的个数为 $k=\varkappa+k'$, 而 $k'\geqslant 0$.

注釋 2 由上面的注釋可以推知,如果方程

$$\mathbf{K}\varphi=f \tag{*}$$

的指标 $\varkappa$ 是負的, 那么, 找不到这样的正則化算子 $\mathbf{M}$, 使得方程(*)对任意取定的 f 都与 Fredholm 方程

$$\mathbf{MK}\varphi=\mathbf{M}f \tag{**}$$

是等价①的. 事实上,我們已經知道(§ 45), 正則化算子的指标应該等于 $-\varkappa>0$. 我們假定, 对任意取定的 f, 方程(*)和(**)都是等价的. 我們从 H 类任意取定函数 φ, 又設 $f=\mathbf{K}\varphi+\chi$, 其中 χ 是齐次方程 $\mathbf{M}\chi=0$ 的任一个非零解(因为算子 $\mathbf{M}$ 的指标是正的, 因此,总有这种解存在). 但是,这时有 $\mathbf{MK}\varphi=\mathbf{M}f$, 因此,根据方程(*)和(**)的等价性假定, $\mathbf{K}\varphi=f$, 从而有 $\chi=0$, 而这和所設的条件是矛盾的.

注釋 3 我們还指出下述事实. 在曲綫 L 上取定有限个点 c_1, c_2, $\cdots$, c_n, 我們不在 H 类中找方程(53.1)的解, 而是在更一般的 H^* 类(假定点 c_1, c_2, $\cdots$, c_n 是它的"結点")中来找这个方程的解. 容易看出,这时候对要找的解所加的条件更一般化了,而我們所要找的解仍然是和前面同样的解;換句話說, H^* 类的解必然属于 H 类. 从 H^* 类的每一个解都必然适合 Fredholm 方程(53.2),便可以推出这一点,而后一个方程在 H^* 类的解都必然属于 H 类(§ 51, 2° 段).

§ 54. 实方程的情形

可能发生这样的情况:方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 我們暂时把它写成

$$\mathbf{K}\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\int_L N(t_0,\ t)\varphi(t)dt=f(t_0), \tag{54.1}$$

① 这个事实是由 С. Г. Михлин[3] 指出的.

其中

$$N(t_0, t)=\frac{1}{\pi i}\frac{K(t_0, t)}{t-t_0}, \tag{54.2}$$

它实际上是一个实方程的情形，这就是說，在适当地选取实变量 s 以替代变量 t 以后，它就变成一个实方程.

假設 $t=t(s)$ 是联系变量 t 与 s 的关系式，当 s 跑过确定的区間 $l_1, l_2, \cdots, l_p$ 时，那么 t 描出构成 L 的圍綫 $L_1, L_2, \cdots, L_p$（而且仅描繪一次）．我們将規定，导函数 $\frac{dt}{ds}=t'(s)$ 处处都不取値零，并且适合 H 条件；关于区間 l_j 端点所应該做的附带条件是显然的．为了簡单起見，如果我們仍然用原来的記号，用表示通过 s 的表示式表出 t 的函数，那么，方程(54.1)具有以下的形式:

$$\mathbf{N}\varphi\equiv A(s_0)\varphi(s_0)+\int_L N(s_0, s)t'(s)\varphi(s)ds=f(s_0). \tag{54.3}$$

根据条件: $A(s)$, $N(s_0, s)$, $t'(s)$ 及 $f(s)$ 都是实函数．我們用别的記号(在这里的情形用 $\mathbf{N}$)表示通过变量 s 表出的算子 $\mathbf{K}$，后面便会明白这样做的理由．

我們来考察方程(54.1)所对应的齐次方程

$$\mathbf{K}\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\int_L N(t_0, t)\varphi(t)dt=0, \tag{54.4}$$

或者完全同样地，考察方程(54.3)所对应的齐次方程

$$\mathbf{N}\varphi\equiv A(s_0)\varphi(s_0)+\int_L N(s_0, s)t'(s)\varphi(s)ds=0. \tag{54.5}$$

显然，在我們所考慮的情形下，如果 $\varphi(s)=\xi(s)+i\eta(s)$（其中 $\xi(s)$ 及 $\eta(s)$ 都是实函数）是方程(54.4)或者完全同样地是方程(54.5)的任一个解，那么，函数 $\xi(s)$ 及 $\eta(s)$ 中的每一个亦都是解.

假定 $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_k(s)$ 是齐次方程(54.4)或者(54.5)的綫性无关的实解的完备系．那么，这个方程的每一个实解都可以表成綫性組合的形式:

$$\varphi(s)=c_1\varphi_1(s)+c_2\varphi_2(s)+\cdots+c_k\varphi_k(s), \tag{54.6}$$

其中常数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 都可以取任意的实数値.

根据上面所述，显然，方程(54.4)或者(54.5)的每一个复解也都可以表示成同一个公式(54.6)，但是，这时常数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 可以取任意的复数値.

这样一来，我們无論是在实域中还是在复域中求解时，方程(54.5)的綫性无关解的个数都是相同的，只是在第一种情形下，綫性組合应該理解为实系数的，而在第二种情形下，綫性組合可以是复系数的.

我們現在考察(54.4)的相联方程，亦即，方程

$$\mathbf{K}'\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) + \int_L N(t, t_0)\psi(t)dt = 0. \qquad (54.7)$$

我們現在作出 (54.5)（理解为实方程）的相联方程，也就是，在(54.5)的核中把变量 s_0 与 s 交換位置而得到的方程：

$$\mathbf{N}'\omega \equiv A(s_0)\omega(s_0) + t'(s_0)\int_L N(s, s_0)\omega(s)ds = 0. \quad (54.8)$$

这个方程与方程(54.7)并不相同，因为在方程(54.7)中引进变量 s 以后，它变成了形式

$$A(s_0)\psi(s_0) + \int_L N(s, s_0)t'(s)\psi(s)ds = 0 \qquad (54.9)$$

（这正是我們对方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 和 $\mathbf{N}\varphi=f$ 左端所出現的算子采用不同的記号来表示的理由）.

但是，方程(54.8)和(54.9)之間并沒有本质上的区别：如果在方程(54.9)中通过关系式

$$\psi(s) = [t'(s)]^{-1}\omega(s)$$

用新的未知函数 $\omega(s)$ 来替代未知函数 $\psi(s)$，那么，将方程(54.9)乘以 $t'(s_0)$ 之后，它就变成了方程(54.8).

假定 $\omega_j(s)$ $(j=1, 2, \cdots, k')$ 是方程 $\mathbf{N}'\omega=0$ 綫性无关的实解的完备系. 根据上面所讲的容易看出，函数組 $\psi_j(s)=[t'(s)]^{-1}\omega_j(s)$ 是方程 $\mathbf{K}'\varphi=0$（在复域上）的綫性无关解的完备系. 我們知道，

方程(54.1)的可解性条件为

$$\int_L f(t)\psi_j(t)dt=0 \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ k'). \qquad (54.10)$$

将 ψ_j 用它們的表示式 $[t']^{-1}\omega_j$ 来替代，我們就得到在实形式下的这些条件：

$$\int_L f(s)\omega_j(s)ds=0 \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ k'). \qquad (54.11)$$

綜合所有上述，我們就得出下述結論：如果只討論实域上的解，而且将 $\mathbf{N}\varphi=0$ 的相联方程也理解为实方程 $\mathbf{N}'\omega=0$，那末，在上一节中所讲到的基本定理对于实方程 $\mathbf{N}\varphi=f$ 仍然是有效的.

§55. И. Н. Векуа 的等价性定理和基本定理的新証明

在§50中我們所指出的正則化方法（我們曾經用它来証明了基本定理）的根本性弱点，是經正則化后而得到的 Fredholm 方程不一定和原来方程是等价的. 我們甚至已經看到了（§53中的注釋2），在 $\varkappa<0$ 的情形下，用这种方法一般是不能得到等价性的. 但是，这并不是說根本就不可能把已給的奇异积分方程用某种方法变成一个和它等价的 Fredholm 方程. 相反地，却有下列定理.

等价性定理（И. Н. Векуа） 奇异积分方程

$$\mathbf{K}\varphi=f \qquad (55.1)$$

（在后面所讲到的确定的意义下）一定等价于某个 Fredholm 方程（只需利用积分計算，便可由原来的方程求出这个方程来[①]）.

事实上，我們用 $\varkappa$ 表示前一个方程的指标，并分别討論下列两种情形：

I. $\varkappa\geqslant0$. 在这种情形下，存在算子 $\mathbf{K}$ 的这样的正則化算子 $\mathbf{M}$，使得齐次方程 $\mathbf{M}\omega=0$ 沒有非零解. 例如，可以取算子 $\mathbf{K}^{0\prime}$（也就是，算子 $\mathbf{K}$ 的特征部分的相联算子）或算子 $\mathbf{K}'^{0}$（也就是，算子

① И. Н. Векуа[7].

$\mathbf{K}$ 的相联算子 K' 的特征部分) 作为这样的算子. 这两个算子的指标都等于 $-\varkappa\leqslant 0$, 因此,对于这样取定的 $\mathbf{M}$, 方程 $\mathbf{M}\omega=0$ 就只有平凡解 $\omega\equiv 0$①. 在这种情形下, 由公式 (45.14), (46.4) 及 (46.5) 可以知道, $\mathbf{M}$ 的确是正则化算子.

設 $\mathbf{M}$ 是具有上述性质的任一个算子,那么, Fredholm 方程

$$\mathbf{MK}\varphi=\mathbf{M}f \tag{55.2}$$

和方程(55.1)就是等价的,因为方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 的所有解显然亦都是方程 $\mathbf{MK}\varphi=\mathbf{M}f$ 的解; 反之, 方程 $\mathbf{MK}\varphi=\mathbf{M}f$ 的所有解也都是方程(55.1)的解,这是因为, 由方程 (55.2) 可以得出 $\mathbf{M}(\mathbf{K}\varphi-f)=0$, 并因此,有 $\mathbf{K}\varphi-f=0$②.

II. $\varkappa<0$. 在这种情形下,存在这样的算子 $\mathbf{M}$, 算子 $\mathbf{K}$ 是 $\mathbf{M}$ 的正則化算子,此外,方程

$$\mathbf{M}\psi=g \tag{55.3}$$

对于每一个右端 g(H 类的)都是可解的. 亦象在前面那样,例如,可以取 $\mathbf{K}^{0\prime}$ 或者 $\mathbf{K}^{\prime 0}$ 中的一个当作算子 $\mathbf{M}$. 因为这时它們的指标 $-\varkappa>0$, 因此它們都具有上面所要求的性质; 这种选法还具有下列的优越性:方程(55.3)对于 ψ 不但是可解的,而且仅須通过积分法(§§ 47, 48)就可以把解表成完整的形式.

現在进行代换

$$\varphi=\mathbf{M}\psi, \tag{55.4}$$

其中 ψ 是新的未知函数. 那么,方程(55.1)变成 Fredholm 方程

$$\mathbf{KM}\psi=f, \tag{55.5}$$

这个方程在下述意义下与方程 (55.1) 是等价的: 方程 (55.1) 和 (55.5) 同时可解或者同时不可解;而且在可解的情况下,求解它們

---

① 参看 §§ 47, 48.

② 当 $\varkappa\geqslant 0$ 时, 方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 能够化为和它等价的 Fredholm 方程 $\mathbf{MK}\varphi=\mathbf{M}f$ 这个事实是由 С. Г. Михлин[3] 指出的. 但是, 他只考慮了 $A(t)=1$ 而 L 仅由一条封閉圖綫所构成的情形; 如果还規定 L 是一个圓周, 他还証明了算子 $\mathbf{K}^{\prime 0}$ 可以取作算子 $\mathbf{M}$(用我們这里的記号).

中間的任一个方程都可以直接归結为求解另外一个方程；同时，如果把算子 $\mathbf{K}^{0\prime}$ 和 $\mathbf{K}^{\prime 0}$ 中的一个取作 $\mathbf{M}$，那么，利用計算积分的方法就可以实現从求解一个方程过渡到求解另一个方程.

事实上，方程(55.5)的每一个解 ψ 都对应于方程(55.1)的(一个)解 φ，而方程(55.1)的每一个解 φ 都(至少)对应于方程(55.5)的(一个)解 ψ. 我們可以对 ψ 解方程(55.4)而求出这个解. 因此，方程(55.1)和(55.5)是同时可解或者同时不可解的. 現在我們假定这些方程都是可解的. Fredholm 方程(55.5)的一般解由公式

$$\psi=\psi_0+\sum_{i=1}^{m} a_i\psi_i \tag{55.6}$$

給出，其中 ψ_0 是它的任一个特解，$\psi_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 是方程 $\mathbf{KM}\psi=0$ 的綫性无关解的完备系，而 a_i 是任意常数. 由上述显然，原来方程所有的解都由公式①

$$\varphi=\mathbf{M}\psi_0+\sum_{i=1}^{m} a_i\mathbf{M}\,\psi_i \tag{55.7}$$

給出；对逆問題——根据方程(55.1)的解找出方程(55.5)的一般解——亦是类似的(不过我們对它并无兴趣).

上面的定理使得我們有可能特別簡单地来証明 §53 中的基本定理. 我們給出这些定理的新的証明.

定理 I 的証明 (И. Н. Векуа[7]) 由 §46 末尾所述可以推出条件(53.12)的必要性. 我們来証明此条件的充分性. 为此，我們将假定条件(53.12)是适合的，我們要証明方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 是可解的.

a) 首先假定 $\varkappa\geqslant 0$. 此时，方程(55.1)等价于 Fredholm 方程(55.2)，于是，根据 Fredholm 理論如果适合关系式

$$\int_L \omega_j\mathbf{M}f\,dt=0,\quad j=1, 2, \cdots, n, \tag{55.8}$$

① 虽然，函数 $\psi_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 是綫性无关的，但是，从公式(55.7)并不能导出，齐次方程 $\mathbf{K}\varphi=0$ 的綫性无关解的个数等于 m 的結論，这是因为函数 $\mathbf{M}\psi_i\,(i=1, 2, \cdots, m)$ 可能是綫性相关的.

其中 $\omega_j(j=1, 2, \cdots, n)$ 是 (55.2) 的相联齐次方程 $\mathbf{K}'\mathbf{M}'\omega=0$ 的綫性无关解的完备系，那么，方程(55.2)是可解的．上述条件可以改写成形式

$$\int_L f\mathbf{M}'\omega_j dt=0. \tag{55.9}$$

但是，由于 $\mathbf{K}'\mathbf{M}'\omega_j=0$，因此，函数 $\mathbf{M}'\omega_j$ 就是齐次方程 $\mathbf{K}'\psi=0$ 的解；于是，根据条件 (53.12)，条件 (55.9) 是适合的，从而，方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 是可解的．

b) 現在設 $\varkappa<0$．此时，如果 Fredholm 方程 (55.5) 是可解的，那么，方程(55.1)就是可解的．方程(55.5)的可解性条件为

$$\int_L f\chi_j dt=0, \tag{55.10}$$

其中 χ_j 是(55.5)的相联齐次方程 $\mathbf{M}'\mathbf{K}'\chi=0$ 的綫性无关解的完备系．但是，方程 $\mathbf{M}'\omega=0$ 不可能有非零解，因为，由条件，方程(55.3)对任何右端都是可解的，而当方程 $\mathbf{M}'\omega=0$ 有非零解时，这是不可能的．于是，$\mathbf{K}'\chi_j=0$，再依据条件(53.12)，条件 (55.10) 是适合的．这样一来定理 I 便得到了証明．

定理 II 及 III 的証明 只要对 $\varkappa\geqslant0$ 的情形来証明就足够了，因为在 $\varkappa<0$ 的情况下可以对相联方程 $\mathbf{K}'\psi=0$（它的指标等于 $-\varkappa>0$）进行同样的討論．

我們取算子 $\mathbf{K}^{0\prime}$ 或 $\mathbf{K}'^{0}$ 之一当作正則化算子 $\mathbf{M}$．那么，方程 $\mathbf{M}\varphi=0$ 沒有非零解，而方程 $\mathbf{M}'\psi=0$ 有 $\varkappa$ 个綫性无关解．Fredholm 方程 $\mathbf{MK}\varphi=0$ 等价于方程 $\mathbf{K}\varphi=0$，因此，方程 $\mathbf{MK}\varphi=0$ 的解的个数等于方程 $\mathbf{K}\varphi=0$ 的解的个数 k[①]．因此，方程 $\mathbf{K}'\mathbf{M}'\psi=0$ 的解的个数也应該等于 k．但是，方程 $\mathbf{K}'\mathbf{M}'\psi=0$ 的解由非齐次方程

$$\mathbf{M}'\psi=c_1\psi_1+c_2\psi_2+\cdots+c_{k'}\psi_{k'} \tag{55.11}$$

的解得出，其中 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{k'}$ 是方程 $\mathbf{K}'\psi=0$ 的綫性无关解的

① 均是指綫性无关解的个数．——譯者注

完备系,而 $c_1, c_2, \cdots, c_{k'}$ 是任意常数. 但是,方程 (55.11) 总是可解的,而且容易看出,它的綫性无关解的个数是在 (55.11) 右端中的綫性无关的函数 ψ_j 的个数 k' 与方程 $\mathbf{M}'\psi=0$ 的解的个数 $\varkappa$ 之和,亦即,$k=k'+\varkappa$, 于是,定理 II 和 III 便得到了証明①.

§56. 奇异积分方程和 Fredholm 方程的对比. 拟 Fredholm 奇异积分方程. 化为标准型

1° 我們知道,下列定理在 Fredholm 积分方程的某些問題的应用中起着重要的作用.

假定給定了 Fredholm 方程 $\mathbf{F}\varphi=f$, 其中 $\mathbf{F}$ 是 Fredholm 算子. 此时,

I. 齐次方程 $\mathbf{F}\varphi=0$ 仅有有限个綫性无关解.

II. 相联的齐次方程 $\mathbf{F}\varphi=0$ 和 $\mathbf{F}'\psi=0$ 有同样个数的綫性无关解.

III. 非齐次方程 $\mathbf{F}\varphi=f$ 对于任意右端 f, 当且仅当相联齐次方程 $\mathbf{F}'\psi=0$ (或者說齐次方程 $\mathbf{F}\varphi=0$ 也完全一样) 沒有非零解时,才可解.

IV. 非齐次方程可解的充分和必要条件是适合关系式

$$\int_L f(t)\psi_k(t)dt=0,$$

其中 $\psi_k(t)$ 是相联齐次方程 $\mathbf{F}'\psi=0$ 的綫性无关解的完备系.

把这些結果和在上一节中已証明过的有关奇异积分方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 的結果加以比較,便可相信,包含在命題 I~IV 中的結論,除了在下面加有重点的部分外,都可以移植到奇异积分方程上去. Fredholm 方程和奇异积分方程的基本区别是命題 II 应該换成命題(仍然沿用前面各节中的記号)

---

① 这里定理 II 与 III 的証明与 В. Д. Купрадзе[3] 所給出的証明是一致的;亦参看 И. Н. Векуа[7].

$$k-k'=\varkappa.$$

但是,在奇异积分方程中可以划分出这样一类方程,对于这些方程,毫无例外地,命題 I～IV 的所有結論都是成立的. 这就是指标 $\varkappa$ 等于零的那一类奇异积分方程. 在这种情形下, $k=k'$, 并且如果齐次方程 $\mathbf{K}\varphi=0$ 沒有非零解,那么,非齐次方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 对于 H 类的每一个右端都是可解的(因为, 此时相联齐次方程 $\mathbf{K}'\psi=0$ 亦沒有非零解).

这一类奇异积分方程可以叫做拟 Fredholm 奇异积分方程,而把对应的算子 (亦即,指标为零的算子) 叫做拟 Fredholm 奇异积分算子①.

2°. 我們轉到討論一般形式的奇异积分方程. 回想起,在很多情况下, Fredholm 积分方程并不用来求某些問題的数值解, 而只是用来对它們进行定性的研究. 因此,显然,在建立了奇异积分方程的一般性质之后,就可以象 Fredholm 方程那样, 直接用它有效地为同样的目的服务. 因此,并不是在所有的情形下,把奇异积分方程归結为 Fredholm 方程都是确当的: 这种中間过程通常反而会使研究更加复杂化.

因此,便自然地产生了下列問題:可否把給定的奇异积分方程归結为某种尽可能簡单的,又和它等价的 (奇异积分) 方程呢? 当然,这个問題是一个含糊的問題.

И. Н. Векуа[7] 曾指出了一类非常簡单形式的奇异积分方程,所有其他的奇异积分方程都可以归結为这一类方程, 而且不致破坏等价性②. 亦就是,假定給定了奇异积分方程

$$\mathbf{K}\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0,\ t)\varphi(t)\,dt=f(t_0). \tag{56.1}$$

① 在 И. Н. Векуа[7] 中,在这种情形下应用了"拟正則"这一术語. 应該指出,在泛函分析中,現在通常把能应用定理 I～IV 的泛函方程簡称为 Fredholm 方程.

② И. Н. Векуа 仅考虑了 L 圍成平面上某个連通部分的情形. 在这里所考虑的更一般的情形下,我們得出了同样的結果(利用了适当的記号).

不失一般性，我們可以认为，L 上的正方向是照 § 29, 1° 段中那样选取的. S^+ 及 S^- 是照同一节中那样来理解，并且假定 S^- 表示平面上包含无穷远点的那一部分，而坐标原点位在 S^+ 内.

我們用 $\varkappa$ 表示方程 (56.1) 的指标，并考察由下式所确定的算子 $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M}\psi \equiv a(t_0)\psi(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\psi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{56.2}$$

其中

$$\begin{aligned} 2a(t) &= \frac{1}{A(t)+B(t)} + \frac{t^{\varkappa}}{A(t)-B(t)}, \\ 2b(t) &= \frac{1}{A(t)+B(t)} - \frac{t^{\varkappa}}{A(t)-B(t)}. \end{aligned} \tag{56.3}$$

容易看出，$\mathbf{M}$ 是拟 Fredholm 奇异积分算子，亦即，它的指标等于零. 事实上，这个指标等于

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{a-b}{a+b}\right]_L &= \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\left\{\frac{A+B}{A-B}t^{\varkappa}\right\}\right]_L \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{A-B}{A+B}\right]_L + \frac{\varkappa}{2\pi i}[\ln t]_L \\ &= -\varkappa + \frac{\varkappa}{2\pi i}[\ln t]_L = 0, \end{aligned}$$

因为 $[\ln t]_L = 2\pi i$; 如果注意到，L 可以視为平面上部分 S^- 的边界，而 S^- 包含无穷远点但不包含坐标原点，便不难确信后一点是对的[①].

从 $\mathbf{M}$ 是指标为零的特征算子这个事实可以得出，齐次方程 $\mathbf{M}\psi=0$ 沒有非零解.

因此，方程(56.1)等价于方程

$$\mathbf{N}\varphi \equiv \mathbf{MK}\varphi = \mathbf{M}f. \tag{56.4}$$

---

① 在計算 $[\ln t]_L$ 时，只須繞这样的封閉圍綫的全体一周就够了：这些圍綫构成一些平面上的連通部分的边界，这些連通部分是 S^- 的組成部分并且包含点 $z=\infty$，这是因为函数 $\ln t$ 繞所有別的圍綫一周的增量都等于零.

此时,算子 $\mathbf{N}$ 的特征部分 $\mathbf{N}^0$ 具有非常簡单的形式①

$$\mathbf{N}^0\varphi\equiv\frac{1}{2}(1+t_0^{\varkappa})\varphi(t_0)+\frac{1}{2}(1-t_0^{\varkappa})\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{56.5}$$

仅当奇异积分方程

$$\mathbf{N}\varphi=f \tag{56.6}$$

的特征部分 $\mathbf{N}^0$ 具有上述的形式时,我們才可把它叫做**奇异积分方程的标准型**.

我們着重指出,如果假定在 $\varkappa<0$ 的情形下适合可解性条件②,那么,特征方程

$$\mathbf{N}^0\varphi=f \tag{56.7}$$

的一般解亦具有非常簡单的形式,

$$\varphi(t_0)=\mathbf{N}^*f+(1-t_0^{-\varkappa})P_{\varkappa-1}(t_0), \tag{56.8}$$

其中 $P_{\varkappa-1}(t_0)$ 是次数不超过 $\varkappa-1$ 的任意多項式,并且当 $\varkappa\leqslant0$ 时,$P_{\varkappa-1}(t_0)\equiv0$, 又有

$$\mathbf{N}^*f\equiv\frac{1}{2}(1+t_0^{-\varkappa})f(t_0)+\frac{1}{2}(1-t_0^{-\varkappa})\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{f(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{56.9}$$

如果注意到,方程 $\mathbf{N}^0\varphi=f$ 所对应的函数 $X(z)$ 是由下式給出的:

$$X(z)=\begin{cases}1 & \text{当 } z\in S^+,\\ z^{-\varkappa} & \text{当 } z\in S^-,\end{cases} \tag{56.10}$$

那么由公式(47.9)就很容易直接得出公式(56.9).

事实上,对应于方程 $\mathbf{N}^0\varphi=0$ 的齐次联結問題的边界条件具有形式:

$$\Phi^+(t)=t^{\varkappa}\Phi^-(t),$$

并且显然(和§35的注釋4作比較),由公式(56.10)所确定的函数 $X(z)$ 是这个問題的典則解.

在 $\varkappa<0$ 的情形下,方程(56.7)的可解性条件具有下列形式:

---

① 这里应該利用公式(45.12)或(45.13).

② 后面要給出这些条件[公式(56.11)].

$$\int_L t^k f(t)\,dt=0, \quad k=0, 1, \cdots, -\varkappa-1; \tag{56.11}$$

这直接可以从(47.8)及(56.10)导出.

§57. T. Carleman-И. Н. Векуа的正則化方法

在前面几节中,我們介紹了两种正則化奇异积分方程的方法①. 現在再給出一种方法,这种方法是由 T. Carleman[1] 对一种特殊情形給出(参看后面的§99),并且由 И. Н. Векуа[1]~[4],[7] 把它加以推广的. 在很多情形下,这种方法比之上述的方法会更方便些.

假設給定了奇异积分方程

$$\mathbf{K}\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0, t)\varphi(t)\,dt=f(t_0), \tag{57.1}$$

或者把它簡写成

$$\mathbf{K}\varphi\equiv\mathbf{K}^0\varphi+\mathbf{k}\varphi=f, \tag{57.2}$$

其中 $\mathbf{K}^0$ 是算子 $\mathbf{K}$ 的特征部分,亦即仍然是

$$\mathbf{K}^0\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} \tag{57.3}$$

和

$$\mathbf{k}\varphi\equiv\frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0, t)\varphi(t)\,dt, \tag{57.4}$$

并且 $k(t_0, t)$ 具有在§44中所指出的那种形式[公式(44.6)].

把(57.2)改写成

$$\mathbf{K}^0\varphi=f-\mathbf{k}\varphi, \tag{57.5}$$

并把右端設想为已知函数,解出这个方程. 暂时不管当 $\varkappa<0$ 时所

① 第一种方法是用方程 $\mathbf{MK}\varphi=\mathbf{M}f$ 来替代方程 $\mathbf{K}\varphi=f$,其中 $\mathbf{M}$ 是正則化算子,而第二种方法則是利用代换 $\varphi=\mathbf{M}\psi$.

产生的可解性条件①．根据 § 47 的結果，我們得出

$$\varphi(t_0) = \mathbf{K}^* f - \mathbf{K}^* \mathbf{k} \varphi + B^*(t_0) Z(t_0) P_{\varkappa-1}(t_0),$$

或者

$$\varphi(t_0) + \mathbf{K}^* \mathbf{k} \varphi = \mathbf{K}^* f + B^*(t_0) Z(t_0) P_{\varkappa-1}(t_0), \tag{57.6}$$

其中

$$\mathbf{K}^* f \equiv A^*(t_0) f(t_0) - \frac{B^*(t_0) Z(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{f(t)\,dt}{Z(t)(t-t_0)}, \tag{57.7}$$

并且 $Z(t)$, $A^*(t)$, $B^*(t)$ 是由公式(47.12), (47.13)所确定的函数，而 $P_{\varkappa-1}(t_0)$ 是次数不超过 $\varkappa-1$ 的任意多項式（当 $\varkappa \leqslant 0$ 时，有 $P_{\varkappa-1}(z) \equiv 0$）.

根据 § 45（注釋）中所述，算子 $\mathbf{K}^* \mathbf{k}$ 是第一类 Fredholm 算子，

$$\mathbf{K}^* \mathbf{k} \varphi \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L N(t_0, t) \varphi(t)\,dt, \tag{57.8}$$

其中

$$N(t_0, t) = \mathbf{K}^* k(t_0, t), \tag{57.9}$$

并且当把算子 $\mathbf{K}^*$ 作用到函数 $k(t_0, t)$ 上时，把 t_0 当作变量，而把 t 考慮成参数，因此

$$N(t_0, t) = A^*(t_0) k(t_0, t) - \frac{B^*(t_0) Z(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{k(t_1, t)\,dt_1}{Z(t_1)(t_1-t_0)}. \tag{57.10}$$

根据 § 47 的結果，当 $\varkappa \geqslant 0$ 时，方程 (57.6) 等价于原来方程 (57.1)；但是，如果 $\varkappa < 0$，那么，应該把由条件(47.16)产生的方程

$$\int_L \frac{t^k \mathbf{k} \varphi(t)}{Z(t)} dt = \int_L \frac{t^k f(t)\,dt}{Z(t)} \quad (k = 0, 1, \cdots, -\varkappa-1), \tag{57.11}$$

也归入方程 (57.6)，并且此时原来方程 (57.1) 与方程 (57.6) 和 (57.11) 的全体是等价的.

方程(57.6)是（第二类）Fredholm 方程．提醒一下，根据 § 45（注釋）中所讲的結果

$$N(t_0, t) = \frac{N^*(t_0, t)}{|t-t_0|^\lambda}, \quad 0 \leqslant \lambda < 1, \tag{57.12}$$

① 这些条件在后面要考慮到[公式(57.11)].

其中 $N^*(t_0, t)$ 适合 H 条件.

这样一来,我們就把原来的方程进行了正則化,并且特别重要的是还保持了等价性. 其实,在 $\varkappa<0$ 的情形下,除了第二类 Fredholm 方程以外,我們还得到了附加方程(57.11),但是,这并不是本质的問題,因为,基本上已經把問題归結为求解一个 Fredholm 方程(57.6).

为了正則化奇异积分方程,如果不利用 § 47 的公式,也可以从 § 48 的公式出发. 亦即,假設給定了方程[1]

$$\mathbf{K}'\psi \equiv \mathbf{K}^{0\prime}\psi + \mathbf{k}'\psi = f(t_0), \tag{57.13}$$

其中

$$\mathbf{K}^{0\prime}\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\psi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{57.14}$$

$$\mathbf{k}'\psi \equiv \frac{1}{\pi i}\int_L k(t, t_0)\psi(t)\,dt. \tag{57.15}$$

和上面完全类似,利用 § 48 中的結果,我們就得出:当 $\varkappa' \geqslant 0$ 时(其中 $\varkappa'$ 表示方程 (57.13) 的指标),方程(57.13)等价于(第二类) Fredholm 方程

$$\psi + \mathbf{K}^{*\prime}\mathbf{k}'\psi = \mathbf{K}^{*\prime}f + \frac{Q_{\varkappa'-1}(t_0)}{Z(t_0)}, \tag{57.16}$$

其中 $Q_{\varkappa'-1}(t_0)$ 是次数不超过 $\varkappa'-1$ 的任意多項式(当 $\varkappa'=0$ 时, $Q_{\varkappa'-1}(t_0)\equiv 0$).

当 $\varkappa'<0$ 时,方程(57.13)与方程(57.16) [其中 $Q_{\varkappa'-1}(t_0)\equiv 0$] 和由条件(48.12)所得出的附加方程

$$\int_L t^k Z(t) B^*(t)\mathbf{k}'\varphi(t)\,dt = \int_L t^k Z(t) B^*(t) f(t)\,dt$$
$$(k=1, 2, \cdots, -\varkappa'-1) \tag{57.17}$$

是等价的.

[1] 不言而喻,方程 $\mathbf{K}'\psi=f$ 当然可以看成与它作为方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 的相联方程是沒有联系的,因为每一个奇异积分算子 $\mathbf{K}'$ 都可以表成形式 $\mathbf{K}^{0\prime}+\mathbf{k}'$.

我們指出，甚至在 $\mathbf{K}'$ 表示 $\mathbf{K}$ 的相联算子的情形下，Fredholm 方程(57.6)及(57.16)一般讲来并不是相联的，这是由于 $(\mathbf{K}^*\mathbf{k})'=\mathbf{k}'\mathbf{K}^{*\prime}$，而并不是 $\mathbf{K}^*\mathbf{k}'$.

从这种正則化方法出发，可以得出上一节所讲的全部基本定理①；这在 И. Н. Векуа 的論文[2]和[4]中已經这样做过(他用的是本节所讲到的两种方法中的第一种方法)；此外，用这种方法还可以得出一系列新的結果，例如，在下一节中所讲的結果便是这样的結果.

§58. 参数 λ 的引进

和在 Fredholm 方程理論中所做过的类似，也可以在奇异积分方程中引进某个参数 λ；当把参数 λ 作为形式为(57.2)的方程中的算子 $\mathbf{k}$ 前面的因子而引进时，或者把它作为形式为(57.13)的方程中的算子 $\mathbf{k}'$ 前面的因子而引进时②，可以得出最簡单的又与 Fredholm 經典理論最接近的結果；И. Н. Векуа[7] 就是这样做的.

按照上面所讲的，我們来考察奇异积分方程

$$\mathbf{K}\varphi \equiv \mathbf{K}^0\varphi+\lambda\mathbf{k}\varphi=f(t_0), \tag{58.1}$$

其中 λ 是任意参数(一般讲是复参数).

利用上一节中所指出的第一种方法来正則化这个方程. 当 $\varkappa\geqslant 0$ 时，我們得出一个等价的 Fredholm 方程

$$\varphi+\lambda\mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi=f^*(t_0), \tag{58.2}$$

其中

$$f^*(t_0)=\mathbf{K}^*f+B^*(t_0)Z(t_0)P_{\varkappa-1}(t_0), \tag{58.3}$$

而 $P_{\varkappa-1}(t_0)$ 是次数不超过 $\varkappa-1$ 的任意多項式. 上述方程的相联齐次方程具有形式

$$\psi+\lambda(\mathbf{K}^*\mathbf{k})'\psi\equiv\psi+\lambda\mathbf{k}'\mathbf{K}^{*\prime}\psi=0. \tag{58.4}$$

---

① 在后面 §102 中，将应用这个方法来証明在更一般情形下的基本定理.

② 这恰好对应于在 Fredholm 方程中参数(通常)是作为 Fredholm 算子全連續部分(参看 §49)前面的因子的情形；用别的方法来引进参数会使理論大大复杂化.

由 Fredholm 方程理論可以知道，相联的齐次方程 $\varphi+\lambda\mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi=0$ 及 $\psi+\lambda\mathbf{k}'\mathbf{K}^{*\prime}\psi=0$ 同时具有或者同时沒有非零解（并且这些方程綫性无关解的个数总是相同的）；仅当参数 λ 取一列（有限个或者无限多个）在有限距离內沒有极限点的"特征值"

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n,\ \cdots \tag{58.5}$$

时，才会有这种非零解存在．如果 λ 不是(58.5)中的值，則非齐次方程(58.2)对每个右端都是单值可解的；而且解可以表成形式：

$$\varphi(t_0)=f^*(t_0)+\int_L \Gamma(t_0,\ t;\lambda)f^*(t)\,dt, \tag{58.6}$$

其中 $\Gamma(t_0,\ t;\lambda)$ 是 Fredholm 豫解式，它对 λ 而言是半純函数并在点列(58.5)处具有极点．

当 $f=0$ 时，也就是，在原来方程是齐次方程的情形下，有

$$f^*(t_0)=B^*(t_0)Z(t_0)\left(C_0t_0^{\varkappa-1}+C_1t_0^{\varkappa-2}+\cdots+C_{\varkappa-1}\right) \tag{58.7}$$

（C_j 均是任意常数），又当 λ 异于特征值(58.5)时，方程(58.2)恰好有 $\varkappa$ 个綫性无关解，这 $\varkappa$ 个解可以通过求解 Fredholm 方程

$$\varphi+\lambda\mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi=B^*(t_0)Z(t_0)t_0^k\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \varkappa-1) \tag{58.8}$$

而得出．

这样一来，我們得出下列結論：

当 $\varkappa\geqslant0$ 时，奇异积分方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 的一般解是 λ 的半純函数，并且綫性地包含 $\varkappa$ 个任意常数．可能除了参数 λ 的一列离散的特征值 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n,\ \cdots$ 外，齐次方程 $\mathbf{K}\varphi=0$ 恰好有 $\varkappa$ 个綫性无关解，而且这些解亦是 λ 的半純函数．［正如由§53中（注釋1）已經知道的，在所有各个情形下，齐次方程至少有 $\varkappa$ 个綫性无关解］．

对 И. Н. Векуа[7] 曾指出过的这些結果，我們还作如下的补充：現在假設 $\varkappa<0$，那末，原来方程(58.1)与方程(58.2)［其中 $P_{\varkappa-1}(t_0)\equiv0$］以及上一节的附加条件(57.11)是等价的．将 φ 的表示式(58.6)代入(57.11)后，容易看出，我們得到下列形式的条件

$$\int_L \omega_j(t, \lambda) f(t) dt = 0, \quad j=1, 2, \cdots, -\varkappa, \tag{58.9}$$

其中 $\omega_j(t, \lambda)$ 对 λ 而言是在点列(58.5)处具有极点的确定的半純函数. 对于异于值(58.5)的 λ, 条件(58.9)是方程 (58.1) 可解的充分和必要条件, 这是因为在这种情形下, Fredholm 方程(58.2)总是可解的. 假定 λ 异于值 (58.5), 我們可以用其他的方法来表示条件(58.9). 也就是, 我們考察方程 $\mathbf{K}\varphi=0$ 的相联齐次方程

$$\mathbf{K}'\psi = \mathbf{K}^{0\prime}\psi + \lambda \mathbf{k}'\psi = 0. \tag{58.10}$$

假設 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{k'}$ $(k' \geqslant \varkappa' = -\varkappa)$ 是它的綫性无关解. 因为条件

$$\int_L \psi_j(t) f(t) dt = 0, \quad j=1, 2, \cdots, k' \tag{58.11}$$

也是方程(58.1)可解的充分和必要条件, 因此条件 (58.9) 和条件 (58.11) 应該是等价的.

由此容易看出[①], 函数 $\omega_j(t, \lambda)$ 是函数 $\psi_j(t)$ 的綫性組合, 反之亦然. 于是, 当 λ 不是值(58.5) 时, 所有的函数 $\omega_j(t,\lambda)$ $(j=1, 2, \cdots, \varkappa')$ 是綫性无关的, 并且 $k'=\varkappa'=-\varkappa$.

这样一来, 我們得出了下述結果:

当 $\varkappa=-\varkappa'<0$ 时, 对于所有异于特征值 (58.5) 的值 λ, 方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 的可解性条件恰好可以表成 $\varkappa'=-\varkappa$ 个关系式(58.9), 其中 $\omega_j(t, \lambda)$ 对 λ 而言是在点 (58.5) 处具有极点的半純函数, 并且它們是綫性无关的; 当 f 适合这些条件时, 公式(58.6)就給出方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 的解.

当 $\varkappa=0$ 时, 亦就是, 在拟 Fredholm 奇异积分方程的情形下, 本节中的結果恰好和 Fredholm 方程有关的已知結果是一致的.

§ 59. 对于某些其他結果的簡单介紹

本章中所讲到的結果将在第四、五、六章中沿着不同的方向加以推广.

---

① 参看本书末尾附录三所提到的命題.

但是，在这一节中，我們要簡单地介紹和前面結果有着紧密联系的一些結果，虽然这些結果本身亦很重要，但是由于受到本书原定范圍的限制，我們不可能仔細地来叙述它們.

在§§ 116, 117 及本书末尾的附录四中，我們将对主要在后来得到的另一些重要結果作簡单的介紹.

1° 假定 $\mathbf{K}$ 表示前面曾經討論过的奇异积分算子. 在§55中讲到过用 И. Н. Векуа 指出过的方法，可以把奇异积分方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 正則化为等价的 Fredholm 方程. 但是在早些时候，И. Н. Векуа 还曾指出过另一个有价值的方法. 这个方法是以§57中所讲到的正則化方法为基础的. 当指标 $\varkappa\geqslant 0$ 时，我們曾看到过，方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 可以利用这个方法直接正則化为等价的 Fredholm 方程. И. Н. Векуа[3],[4] 曾証明过：当 $\varkappa<0$ 时，利用簡单的变換，可以将給定的奇异积分方程化为 Fredholm 方程，連同附加条件

$$\int_L \omega_j(t) f(t)\, dt=0; \qquad (*)$$

这里所提到的 Fredholm 方程及函数 $\omega_j(t)$ 都只需通过簡单的积分便可求出.

2° 用 $\mathbf{T}$ 表示由下式所确定的算子：

$$\mathbf{T}\varphi(t)=\frac{dt(s)}{ds}\cdot\varphi(t),$$

其中，亦象通常那样，t 是圍綫 L 上点的附标，而 s 則表示它所对应的弧坐标；在这一段中，我們将假定 L 是适合 Ляпунов 条件的，亦即，$\dfrac{dt}{ds}$ 是属于 H 类的. 我們在算子記号上加小横綫表示复的共軛算子，也就是說，根据定义

$$\overline{\mathbf{K}}\varphi=\overline{\mathbf{K}\overline{\varphi}},$$

并考察下列算子

$$\overline{\mathbf{K}}'\mathbf{T}\mathbf{K}, \quad \mathbf{U}=[\overline{\mathbf{K}}'\mathbf{T}\mathbf{K}]^0, \quad \mathbf{M}=\mathbf{U}'\overline{\mathbf{K}}'\mathbf{T},$$

其中右上角的記号 ^{0} 表示取算子的特征部分.

容易直接驗証，算子 $\overline{\mathbf{K}}'\mathbf{T}\mathbf{K}$ 与 $\mathbf{U}$ 都是拟 Fredholm 奇异积分算子，而 $\mathbf{MK}$ 是 Fredholm 算子，因此，算子 $\mathbf{M}$ 是算子 $\mathbf{K}$ 的正則化算子. 再者，下列定理成立：如果方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 是可解的，那末，对每一个 f，Fredholm 方程

$$\mathbf{MK}\varphi=\mathbf{M}f$$

都是可解的，而且它与方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 是等价的.

И. Н. Векуа[7] 曾指出过，我們亦可以看出，算子 $\mathbf{M}$ 可以用完全初等的方法作出，并且具有剛才所指出的性质（其証明参看 И. Н. Векуа[7]）.

还在早些时候，В. Д. Купрадзе[3] 曾指出过，对形式为(44.16)的实方程 $\mathbf{L}\varphi=f$ 的情形，$\mathbf{L}$ 的相联算子 $\mathbf{L}'$ 就具有这样的性质. В. Д. Купрадзе[4] 还曾对方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 作出一些具有这些性质的算子；但是要作出这样的算子，就要求找出相联齐次方程 $\mathbf{K}'\psi=0$ 的所有解来.

3°. 在 L. Berg 的論文[1]～[3]中，亦包含了一系列有价值的結果. 特別应該指出“奇异豫解式”的作法，奇异豫解式是一个函数，它对奇异积分方程所起的作用和 Fredholm 豫解式所起的作用是类似的，它适合与 Fredholm 豫解式所滿足的已知泛函方程类似的两个泛函方程.

4°. G. Giraud 的很多工作是致力于奇异积分方程的. 可以从他后期的一篇論文中找到这些工作的目录：G. Giraud[2]；亦可参看 В. Д. Купрадзе[1]，С. Г. Михлин[7].

我认为对一維方程的領域来讲，也就是，对我們所考虑的那种类型的方程来讲，G. Giraud 的研究显得太复杂①，而且也不够完整：例如，对整个理論非常重要的指标概念，在他的研究里就沒有提到，尽管这个概念在很久以前就有了. G. Giraud 把他自己的

① 在这个領域里，他所得到的最完善形式的結果叙述在 G. Giraud 的著作[2]中.

理論建立在研究参数 λ（他并不是象我們在前一节中所述那样引进参数 λ 的）与积分方程的解之間的依賴关系的基础上；亦即，他研究了方程（我們把它用这里的記号写出）

$$A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{\lambda B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\lambda\int_L k(t_0,\,t)\varphi(t)\,dt=f(t_0), \qquad (59.1)$$

其中参数 λ 也在特征部分中出現．这就破坏了与在 Fredholm 經典理論中所考慮的方程之間的內在相似性（和 §58 起首作一比較），因此，使研究大大地复杂了．在任何情况下，方程(59.1)的一般理論与更一般得多的方程

$$A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K(t_0,\,t;\,\lambda)\,\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0) \qquad (59.2)$$

有关的理論比較起来并不簡单多少，至少对 G. Giraud 所得到的結果来讲便是如此，此处 $K(t_0,\,t;\,\lambda)$ 对于 t 和 t_0 都适合 H 条件，而对于 λ 它是某个区域內的半純函数①．

如果对方程(59.2)应用前面所讲过的方法，則可以比之 Giraud 本人所作的簡单得多地得出 G. Giraud 的結果，甚至还可以得到一系列更为一般的結果．这是由 Д. Ф. Харазов[1] 給出的②．

5°. 把上面所讲的結果按照下列意义加以推广显得比較重要，扩大已知函数的类，特别是扩大未知函数的类，同时又将光滑曲綫換成更一般形式的积分曲綫．在所述方向上最簡单的推广将在第四及五章中給出．在 L. Berg 的論文 [3] 中給出了在类似方向上的一个推广．在 §116 中要簡略地讲到需要用到 Lebesgue 积分的另一些推广．

① 方程(59.2)与 J. D. Tamarkin 所研究的 Fredholm 方程（它的核是参数 λ 的半純函数）是类似的(J. D. Tamarkin[1])．

② 后来 И. Ц. Гохберг[2] 把这些結果中的某一些移植到 Banach 空間內的綫性方程的情形．

在这里我們仅指出，上述結果容易移植到H类换成在§27中所讲到的稍为一般些的連續函数类的情形. 在 Л. Г. Магнарадзе 的論文[5]，[7]，[8]中給出了这样的推广.

6°. Л. А. Чикин 的論文 [2] 从事于研究联結問題的解的稳定性問題，而 Г. Ф. Манджавидзе 的論文 [4]～[6]，А. В. Батырев 的論文 [1] 和 В. В. Иванов 的論文 [5] 都是研究联結問題的近似解的.

第三章

对一些边值問題的应用

在前面两章中所讲过的結果，对解决解析函数論和数学物理中很多重要問題都是很有用的．最近以来，用这些方法得出了一系列非常有价值的結果．在这一章中，我們将叙述这一类結果中的某一些結果．

我們从研究在所討論的那一类問題中的最簡单的一个——Dirichlet 問題——开始．在应用奇异积分方程的基础上求解这个問題(§§ 64, 65)之前，我們先介紹一下 Fredholm 的經典解法，在讲解这一种經典解法时作了一些变更，以便使它能更接近于在这一章中所討論的問題的范圍[①]．

I. Dirichlet 問題

§ 60. Dirichlet 問題和变态的 Dirichlet 問題的提法．唯一性定理

假定 S^+ 表示一个(連通)区域，它是由互不相交的一些簡单

① 如果不考慮在多連通区域情形下所产生的一些附加情况，那么 Dirichlet 問題就是 Riemann-Hilbert 問題当边界条件 (40.1) 的系数 a 和 b 中有一个恒等于零时的特殊情形．

但是，为了求解 Riemann-Hilbert 問題，我們利用了保角映射把已給的区域 S^+ 映射到圓域上去，而找这样的保角映射相当于求解某个 Dirichlet 問題．因此，在此处还有必要单独地研究 Dirichlet 問題，特别对于由任意多条圍綫所圍成的区域的情形更需如此．

的光滑的封閉圍綫 L_0, L_1, ⋯, L_p 所圍成的，其中第一条圍綫包圍了所有其余的圍綫. 我們把 L 理解为这些圍綫的全体；我們假定 L 的正方向是使 S^+ 保持在其左边的方向. 圍綫 L_0 可以不出現，此时 S^+ 是无界区域. 我們用 S_1^-, S_2^-, ⋯, S_p^- 分別表示由 L_1, L_2, ⋯, L_p 所圍成的有界区域，用 S_0^- 表示位在 L_0 外部的点所构成的无界区域（当圍綫 L_0 出現时），用 S^- 表示区域 S_1^-, S_2^-, ⋯, S_p^- 及 S_0^- 的全体.

我們还要求圍綫 L_0, L_1, ⋯, L_p 适合下述条件：L_j 的切綫与某一固定方向之間的夹角适合 H 条件，換句話說，我們假定 L 适合 Ляпунов 条件.

我們这样来提出区域 S^+ 上的經典 Dirichlet 問題：

A. Dirichlet 問題 要求根据边界条件

$$u=f(t) \quad 在 L 上, \tag{60.1}$$

来找一个在 S^+ 內是調和的，在 S^++L 上是連續的（实）函数 $u(x, y)$，其中 $f(t)$ 是給定在 L 上的（实）連續函数；在区域 S^+ 是无界的情形下，还要求 $u(x, y)$ 在无窮远处是有界的.

后一个 u 在无窮远处的有界性条件，相当于要求当 z 趋于无窮时，u 趋于一个完全确定的极限①.

下述我們称之为"变态的 Dirichlet 問題"②的問題，对于某些应用来讲，它的用处并不少.

B. 变态的 Dirichlet 問題 要求根据条件：I) $u(x, y)$ 是某个在 S^+ 內为全純的函数 $\Phi(z)$ 的实部，II) $u(x, y)$ 适合边界条件

---

① 我們提醒一下，每一个在圓 $|z|>R_0$ 外是調和的，在无窮远处是有界的函数 $u(x, y)$ 在 $|z|>R_0$ 时都可以展开成級数

$$u(x, y)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(a_n\cos n\vartheta+b_n\sin n\vartheta) \quad (z=re^{i\vartheta}),$$

这个級数在每一个半徑为 $R>R_0$ 的圓外部是絕对而且一致收斂的. 因此，当 $r\to\infty$ 时，$u\to a_0$.

② 在 Н. И. Мусхелишвили 及 Д. З. Авазашвили 的論文[1]中才引用了这一个术語.

$$u=f(t)+a(t) \quad 在 L 上, \tag{60.2}$$

来找一个在 S^+ 內是調和的，在 S^++L 上是連續的函数 $u(x, y)$，其中 $f(t)$ 是給定在 L 上的(实)連續函数，而

$$a(t)=a_j, \quad t\in L_j, \quad j=0, 1, \cdots, p, \tag{60.3}$$

此处 a_j 是事先幷未給定的(实)常数；在区域 S^+ 是无界的情形下，L_0 上的条件 $u=f+a_0$ 应換成 $u(x, y)$ 在无穷远处是有界的条件.

以后将要証明：在常数 a_j 之中(任意地)选定一个以后，其余各个常数便都可以由問題本身的条件完全确定. 今后，除了作相反的說明外，我們将假定 a_0 等于零(当圍綫 L_0 不出現时，这个要求应該換成条件：在无穷远处 $u=0$).

我們指出，当 L 是仅由一条封閉圍綫构成的特殊情形. 这里应該区别两种情形：

a) $p=0$. 在这种情形下，S^+ 是平面上由圍綫 L_0 所圍成的有限部分.

b) $p=1$，而圍綫 L_0 不存在. 在这种情形下，S^+ 是平面上由圍綫 L_1 所圍成的无界部分.

容易看出，在情形 a) 問題 A 和 B 是一致的(如果假定 $a_0=0$). 在情形 b) 这两个問題中的任何一个都可以直接归結为另外一个. 例如，如果 $u(x, y)$ 是問題 B 的解(在无穷远处取值零)，那么，$u(x, y)-a_1$ 将是問題 A 的解.

現在轉到討論任意 p 的一般情形. 在这种情形下，問題 A 与 B，亦卽，經典的与变态的 Dirichlet 問題之間的区别如下所述：

如果 $u(x, y)$ 是問題 A 的解，那么，u 的共軛函数 v 可能(一般讲来应該)是多值的. 在問題 B 的提法中的条件 I) 就排除了这种可能性，因而这样一来，也就限制了所要找的調和函数的类；但是，問題 B 中的条件 II) 仅要求使函数 u 在圍綫 L_j 上取不完全确定的，而且是精确到差一个常数項的值.

問題 A 和 B 中的每一个都不可能有多于一个的解(如果对問

題 B, 亦象前面所說那样,規定 $a_0=0$①).

在問題 A 的情形下,这个結論可以归結为需要証明:在 S^+ 內是調和的,在 S^++L 上是連續的,并且在 L 上取值零的函数,在整个区域內等于零. 但是,这可以由一个众所周知的命題推出:一个不是常数的調和函数只可能在边界上取得极大値和极小値②.

我們轉到对問題 B 証明我們的結論.在这种情形下,这个結論可以归結为下列命題:

如果在 S^+ 內調和、在 S^++L 內連續的函数 $u(x, y)$ 是某个在 S^+ 內为全純的函数 $\Phi(z)=u+iv$ 的实部,并且 $u(x, y)$ 在 L_j 上取常数値 a_j, 而 $a_0=0$,那么,一定有 $u=0$, $a_1=a_2=\cdots=a_p=0$ (在无界区域的情形下, 条件 $a_0=0$ 应該換成条件: 在无穷远处 u 取零)③.

我們用 a_m 表示常数 $a_0, a_1, \cdots, a_p$ 中最小的一个, 或者在无界区域的情形下, 表示常数 $a_1, a_2, \cdots, a_p$ 中最小的一个 (如果有几个这样的常数,就取其中的任一个当作 a_m). 我們假定 $u(x, y)$ 在 S^+ 內不恒等于常数. 因为在 L_m 上 $u=a_m$, 因此, a_m 是 u 在 S^++L 上的极小値. 因为根据假定,函数 u 不是常数,所以,在 S^+

---

① 亦可以用 $a_k=0$ 替代 $a_0=0$, 其中 a_k 是常数 $a_1, a_2, \cdots, a_p$ 中的一个.

② 利用簡单的反演变换, 可以把无界区域的情形(也就是 L_0 不出現的情形)归結为有界区域的情形.

③ 下面的証明的思想是来自 J. Plemelj 的书[3]中的. 我們現在再引进一个簡单的証明. 我們暫且先假定 S^+ 是有界区域,根据众所周知的定理,

$$\int_L u\frac{du}{dn}ds=\iint\limits_{S^+}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy,$$

其中 n 为 L 的外法綫. 但是,上面公式左端是等于零的,这是由于

$$\int_L u\frac{du}{dn}ds=\int_L u\frac{dv}{ds}ds=\sum_{j=0}^{p}a_j\int_{L_j}dv=0,$$

因为,根据条件,函数 v 是单值的. 于是,再根据前一公式:在 S^+ 內 $u=$常数. 但在 L_0 上 $u=0$, 从而在 S^+ 內 $u=0$. 对于无界区域的情形也可以类似地証明. 但是这个証明并不能认为是完全的, 因为 $\frac{du}{dn}$, $\frac{dv}{ds}$ 的存在問題以及在边界 L 上关系式 $\frac{du}{dn}=\frac{dv}{ds}$ 成立的問題(在我們所設的条件下,它們的确都是对的)也还是需要加以証明的.

內处处都有 $u>a_m$. 因此，容易看出，在区域 S^+ 內一定可以做出两条接近于 L_m 的光滑圍綫 L'_m 和 L''_m，在 L'_m 和 L''_m 上，$u(x, y)$ 分别取常数值 $a_m+\varepsilon'$ 及 $a_m+\varepsilon''$，而 $0<\varepsilon'<\varepsilon''$①.

我們用 Σ 表示介于 L'_m 和 L''_m 之間的环形区域，又用 $\Lambda=L'_m+L''_m$ 表示它的边界，利用众所周知的公式

$$\int_{\Lambda} u\frac{du}{dn}ds=\iint_{\Sigma}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy, \qquad (*)$$

其中 n 是 Λ 的指向 Σ 之外側的法綫. 但是，

$$\int_{L'_m} u\frac{du}{dn}ds=\int_{L'_m} u\frac{dv}{ds}ds=(a_m+\varepsilon')\int_{L'_m}dv=0;$$

类似地也可以討論展布在 L''_m 上的积分. 因此，公式(*)的左端等于零；于是，在 Σ 內 $u=$常数，从而在整个区域 S^+ 內，$u=$常数. 但是，因为在 L_0 上 $u=a_0=0$，或者在无界区域的情形下，因为在

① 在 L_m 上的点 t 处指向 S^+ 內部的法綫上，截取长度为充分小的綫段 tM (长度等于常数 δ)，使当 t 处在 L_m 上的任何位置时，綫段 tM 整个属于区域 S^+. 当点 t 描繪出 L_m 时，点 M 描繪出一条連續的封閉圍綫 (此圍綫可能自身相交，但是这并不重要). 显然，在整个这条曲綫上，$u\geqslant a_m+\varepsilon_0$，其中 ε_0 是某个正常数. 因此，如果选取数 ε_1 及 ε_2，适合 $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon_0$，那么，在綫段 tM 上可以选取点 t_1 和 t_2，使 $u(x, y)$ 在 t_1 和 t_2 处分别取值 $a_m+\varepsilon_1$ 和 $a_m+\varepsilon_2$. 当点 t 沿着 L_m 移动时，点 t_1 和 t_2 描繪出封閉的連續圍綫 $L_m^{(1)}$ 和 $L_m^{(2)}$. 因为 $u(x, y)$ 在 $L_m^{(1)}$ 和 $L_m^{(2)}$ 上取不同的値，因此，这些圍綫沒有公共点. 再者，这些圍綫中之每一条都自身不能相交，因为否則，例如，$L_m^{(1)}$ 是一条回綫的話，那么，在回綫上取常数値 $a_m+\varepsilon_1$ 的調和函数 u，就应該在由这条回綫所圍成的整个区域內等于常数，从而，在整个区域 S^+ 內 u 也是常数，而这与假設条件是矛盾的. 在适合形如 $u(x, y)=$常数的方程的圍綫 $L_m^{(1)}$ 和 $L_m^{(2)}$ 上只能有有限多个奇点 $\left(\text{亦即，使 } \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0 \text{ 的点}\right)$. 实际上，在这些点处，$\Phi'(z)=0$，但是，由于 $\Phi'(z)$ 不恒等于零(否則，$\Phi(z)$ 在 S^+ 內恒等于常数，从而，$u(x, y)$ 在 S^+ 內恒等于常数)，因此，在 S^+ 內是全純的函数 $\Phi'(z)$ 只能有有限个和 S^+ 的边界保持一定距离的零点. 因为函数 $u(x, y)$ 是解析的，故 $L_m^{(1)}$ 和 $L_m^{(2)}$ 是由有限条解析弧构成的. 圍綫 $L_m^{(1)}$ 和 $L_m^{(2)}$ 圍成某一整个位在 S^+ 內部的环形区域 Σ. 在 Σ 內使 $\Phi'(z)=0$ 的 z_j 只有有限多个. 另一方面，如果 ε 是任意一个适合不等式 $\varepsilon_1<\varepsilon<\varepsilon_2$ 的数，那么，象剛才我們作出圍綫 $L_m^{(1)}$ 与 $L_m^{(2)}$ 那样，可以作出整个位在 Σ 內的圍綫 L_m^0，使在 L_m^0 上 $u=a_m+\varepsilon$. 因为点 z_j 的个数是有限个，因此，存在无限多个这样的値 ε，使得对应的 L_m^0 不經过这些点 z_j，于是，L_m^0 是沒有奇点的解析圍綫(当然，它更是光滑圍綫)，令 ε 取两个适合这些条件的値 ε' 和 ε''，我們就得出所要求的两条圍綫 L'_m 和 L''_m.

无穷远处 $u=0$，因此，在区域 S^+ 内 $u=0$.

注釋　我們仍然假定，在 L_j 上 $u=a_j$，但是，抛弃掉条件 $a_0=0$，那么显然，$u=$ 常数 $=a_0=a_1=\cdots=a_p$.

因此，当附加条件 $a_0=0$ 放弃时，問題 B 的两个解可以相差一个常数.

§61. 利用双层势求解变态的 Dirichlet 問題

我們現在开始討論变态的 Dirichlet 問題的求解. 除了沿用上一节所用过的記号和条件以外，我們还假定函数 $f(t)$ 是属于 H 类的①. 我們将假定要找的解 $\Phi(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 可以表成

$$u(x, y)+iv(x, y)=\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z} \tag{61.1}$$

的形式，其中 $\mu(t)$ 是未知的 H 类的实函数.

令 $t-z=re^{i\vartheta}$ 并分出其实部，我們得出(参看 §12)

$$u(x, y)=\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\,d\vartheta=\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\cos(r, n)}{r}\,ds, \tag{61.2}$$

其中 n 是点 t 处指向 L 左側的法綫，而 (r, n) 則表示 n 与方向 $\overrightarrow{tz}$ 之間的夹角.

这样一来，$u(x, y)$ 就表成了一个双层势的形式.

让 $z\to t_0$ 在 (61.1) 中取极限，然后分出实部，对于 $u(x, y)$ 的边值，我們得出表示式②：

$$u=\operatorname{Re}\Phi^+(t_0)=\mu(t_0)+\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0}\right\}$$

$$=\mu(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)d\vartheta=\mu(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\cos(r,n)}{r}\,ds, \tag{61.3}$$

其中 $\vartheta=\vartheta(t_0,t)$ 这次表示方向 $\overrightarrow{t_0t}$ 和 Ox 軸之間的夹角，$r=|t-t_0|$，而 (r, n) 表示方向 $\overrightarrow{tt_0}$ 与 n 之間的夹角(第 53 頁图 9).

① 可以很容易地摆脫这条假定(参看本节末尾的注釋 1).

② 在这里我們利用了 Сохоцкий-Plemelj 公式 [(16.2) 的第一个公式]; 亦可参看 §13, 公式(13.6)及其后的公式.

这样一来,边界条件(60.2)具有形式

$$\mu(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\,d\vartheta=f(t_0)+a(t_0), \tag{61.4}$$

或者还具有形式

$$\mu(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\cos(r,\ n)}{r}\,ds=f(t_0)+a(t_0), \tag{61.4a}$$

其中我們提醒一下, 在 L_j 上 $a(t_0)=a_j=$ 常数. 如果不考虑上式右端的(事先并未給出的)項 $a(t_0)$, 那么, 它便是 Fredholm 方程①,其核是

$$K(t_0,\ t)=\frac{1}{\pi}\frac{\cos(r,\ n)}{r},$$

根据我們所假設的条件,这个核可以表成(§7, 3° 段)形式:

$$K(t_0,\ t)=\frac{K_0(t_0,\ t)}{|t-t_0|^{\alpha}}=\frac{K_0(t_0,\ t)}{r^{\alpha}}, \tag{61.5}$$

其中 $0\leqslant\alpha<1$, 而 $K_0(t_0,\ t)$ 对两个变量都是适合 H 条件的.

由于我們对給定的函数 $f(t)$ 加上了 H 条件, 因此(§51), 方程(61.4)的每一个(連續)解也都适合 H 条件②.

我們来討論与方程(61.4)对应的齐次方程

$$\mu(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\,d\vartheta=0. \tag{61.6}$$

直接驗証表明,它具有下述形式的解③:

$$\begin{aligned}&\mu(t)=C_k\quad 在\ L_k\ 上,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ p;\\ &\mu(t)=0\quad\ \ 在\ L_0\ 上,\end{aligned} \tag{61.7}$$

其中 C_k 皆为任意常数. 方程(61.6)沒有別的解. 事实上, 假定 $\mu(t)$ 是它的任一个解,那末,在 S^+ 内是全純的函数

---

① 如果不考虑項 $a(t)$,則它本身便是通常为了求解 Dirichlet 問題所用到的方程.

② 可以容易地証明: 不但 $\mu(t)$ 适合 H 条件,而且 $\mu(t)$ 与 $f(t)$ 具有相同的指数(H 条件的)(参看 J. Schauder[1] 第 633 頁).

③ 在无界区域的情形下,等式(61.7)中的最后一个应取消.

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z}$$

的实部在 L 上取値零. 因此, 在 S^+ 内 $\operatorname{Re}\Phi(z)=0$, 于是我們的結論便得到了証明(§30 的注釋 1).

齐次方程的一般解(61.7)是 p 个綫性无关解 $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\cdots$, $\mu_p(t)$的綫性組合,其中

$$\mu_j(t)=\begin{cases}1, \text{当 } t\in L_j (j=1, 2, \cdots, p),\\ 0, \text{在其余的圍綫上.}\end{cases} \tag{61.8}$$

根据 Fredholm 积分方程的一般理論, 非齐次方程(61.4)可解的充分和必要条件是它的右端适合 p 个已知的积分条件. 为了求解問題应該这样来选取常数 a_j, 使得这些积分条件是适合的.

但是, 上面所讲到的条件的构成(至少在实际上)是相当复杂的:为此需要找出方程(61.6)的相联齐次方程的所有綫性无关解. 此外,即使已經用适当的方法选定了常数 a_j,但是,由于方程(61.6)具有非零解,也会使得原来的方程(61.4)的求解大大地复杂化.

我們可以通过一个非常簡单的方法来繞过所有这些困难, 这个方法就是把方程(61.4)換成一个与它等价的, 但是已經不包含待定常数 a_j 的方程, 而且后一个方程具有性质: 它对应的齐次方程沒有非零解. 亦即, 代替方程(61.4)我們考慮另外一个 Fredholm 积分方程

$$\mu(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\,d\vartheta-\int_L k(t_0, t)\mu(t)\,ds=f(t_0), \tag{61.9}$$

其中 s 是点 t 的弧坐标,而(实)函数 $k(t_0, t)$是用下法定义在 L 上的函数:

$$k(t_0, t)=\begin{cases}\rho_j(t), \text{对 } t_0, t\in L_j, j=1, 2, \cdots, p,\\ 0, \quad \text{对所有别的情形;}\end{cases} \tag{61.10}$$

$\rho_j(t)$表示給定在圍綫 L_j 上的实的連續函数($j=1, 2, \cdots, p$),只要求它适合条件

$$\int_{L_j} \rho_j(t)\,ds \neq 0, \tag{61.11}$$

而在其他方面它是完全任意的．例如，我們可以取

$$\rho_j(t)=1, \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ p.$$

在(61.9)左端出現的表示式

$$\int_L k(t_0,\ t)\mu(t)\,ds$$

在每一条圍綫 L_j 上都保持为常数値：

$$\int_L k(t_0,\ t)\mu(t)\,ds=c_j,\ \text{当}\ t_0\ \text{在}\ L_j\ \text{上},\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ p, \tag{61.12}$$

其中 c_j 皆为常数①，并且 $c_0=0$②．

我們来証明，方程(61.9)就具有我們所要求的性质，亦就是，齐次方程

$$\mu(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\,d\vartheta-\int_L k(t_0,\ t)\mu(t)\,ds=0 \tag{61.13}$$

沒有非零解．

事实上，假定 $\mu(t)$ 是这个方程的任一个解．根据(61.12)及(61.13)，在 S^+ 内是全純的函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z} \tag{*}$$

的实部，在圍綫 L_j 上取常数値 c_j，并且 $c_0=0$．于是，根据上一节所証明过的結果：在 S^+ 内 $\mathrm{Re}\,\Phi(z)=0$．因此(§30，注释1)，在 L_j 上 $\mu(t)=b_j$，其中 b_j 皆为常数，并且 $b_0=0$．如果把 $\mu(t)$ 的这些値代入(61.13)之中，那么我們显然可得到

$$b_j\int_{L_j}\rho_j\,ds=0, \quad j=1,\ 2,\cdots,\ p,$$

---

① 这就是，

$$c_j=\int_{L_j}\rho_j\mu\,ds.$$

② 在无界区域的情形下，$c_0=0$ 这一等式要取消掉，而在(61.12)中应該取 $j=1,2,\cdots,p$.

也就是說，根据(61.11)，应該有 $b_j=0$. 这样一来，便証明了我們的結論.

根据上述可以得出：非齐次方程(61.9)总有(唯一的)解.

因为根据(61.12)有

$$\mu(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)d\vartheta=f(t_0)+c_j \quad \text{在 } L_j \text{ 上},$$

因此，由方程(61.9)的解 $\mu(t)$ 可以給出原来方程(61.4)的解. 同时对在(61.4)中出現的常数 a_j，可以得到它們完全确定的数値：

$$a_j=c_j=\int_{L_j}\rho_j\mu\,ds. \tag{61.14}$$

这样一来，問題就得到了彻底的解决①.

注釋1 我們把 H 条件加到未知函数 $\mu(t)$ 上，只是为了在(61.1)中让 $z\to t_0$ 而取极限时，要能够利用 Сохоцкий-Plemelj 公式. 但是，如果在(61.1)中我們在取极限之前先分出其实部，并且利用双层势的已知性质，那么，只要单单假定 $\mu(t)$ 是連續的，我們也就可以得出結果(61.3).

因此，如果仅假定已知函数 $f(t)$ 及未知函数 $\mu(t)$ 都是連續的，那么，上述所有結果仍然是有效的.

注釋2 輔助核 $k(t_0, t)$ 的选擇当然会影响到积分方程(61.9)的解 $\mu(t)$. 但是，容易看出，由于核 $k(t_0, t)$ 的改变而引起的变化，只是要用 $\mu(t)+\alpha(t)$ 代替 $\mu(t)$，其中 $\alpha(t)$ 在每一条圍綫 L_j 上都分别保持常数値，并且在 L_0 上，$\alpha(t)=0$. 事实上，如果 $\mu_1(t)$ 和 $\mu_2(t)$ 分别是对应于两个不同的輔助核 $k_1(t_0, t)$ 和 $k_2(t_0, t)$ 的解，那么，差式 $\mu(t)=\mu_2(t)-\mu_1(t)$ 显然应該适合形式为(61.4)的方程［当 $f(t_0)\equiv 0$ 时］. 象上面那样，我們可以推出：在 S^+ 內

---

① 此处所讲的方法是由著者在論文[2]中給出的；某些进一步的推論可以参看著者的論文[3]. 在著者的論文[5]中給出了对一个混杂問題的推广；对三維空間情形的推广可以参看著者的論文[4]；亦可以和 Д. И. Шерман[4], В. Д. Купрадзе[2], И. Н. Векуа[13] 作一比較.

$\mathrm{Re}\,\Phi(z)=0$，这里 $\Phi(z)$ 表示利用公式(*)由 $\mu(t)$ 所确定的函数，于是，如上所述，在 L_j 上 $\mu(t)=a_j=$ 常数，并且 $a_0=0$.

此外，根据上一节中所証明过的变态的 Dirichlet 問題解的唯一性定理，显然：在公式(61.14)中的常数 a_j 与核 $k(t_0, t)$ 的选擇是无关的.

§62. 一些推論

假定 $\Psi(z)$ 是在 S^+ 內为全純的函数，并且它的实部 $\mathrm{Re}\,\Psi(z)$ 可以連續拓展到 L 上；那么，我們知道(§9)，函数 $[\mathrm{Re}\,\Psi(t)]^+$ 在 L 上是連續的. 我們暂时先假定圍綫 L_0 是存在的. 如果把函数 $[\mathrm{Re}\,\Psi(t)]^+$ 当作变态的 Dirichlet 問題边值条件(60.2)中的 $f(t)$，那么，这个問題显然有解 $u(x, y)=\mathrm{Re}\,\Psi(z)$，并且 $a_1=a_2=\cdots=a_p=0$(根据条件还有 $a_0=0$). 根据唯一性定理，这个問題沒有别的解.

另一方面，公式[①]

$$u(x, y)=\mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z}$$

便給出这个問題的解，其中 $\mu(t)$ 是实的連續函数，它是由积分方程(61.9)确定的，在(61.9)中 $f(t)=[\mathrm{Re}\,\Psi(t)]^+$.

于是，我們有

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z}+Ci, \tag{62.1}$$

其中 C 是实常数. 这样一来，我們便有下述結果：

每一个在有界区域 S^+ 內是全純的函数 $\Psi(z)$，只要它的实部可以从左側連續拓展到 L 上，它就可以写成形式(62.1)，其中 $\mu(t)$ 为一个实的連續函数，而 C 是一个实常数.

根据推导过程本身(亦可以直接从§30中的命题推出)，显然，

① 这里我們应用了在前一节末尾的注釋1所讲过的結果；如果我們只准备考虑前一节正文中所讲到的情形，那么，只要假定 $[\mathrm{Re}\,\Psi(t)]^+$ 适合 H 条件也就够了.

对于給定的函数 $\Psi(z)$，函数 $\mu(t)$ 在內部的圍綫 $L_1, L_2, \cdots, L_p$ 上可以确定精确到只差一个(实的)任意常数，而在 L_0 上則 $\mu(t)$ 是被唯一确定了的；常数 C 也是完全确定了的.

在无界区域 S^+ 的情形下，也就是，当圍綫 L_0 不出現时，容易看出，在对 $\Psi(z)$ 仍然加上前面所假設的那些条件下，就有表示式

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\mu(t)\,dt}{t-z}+\Psi(\infty), \tag{62.1a}$$

其中 $\mu(t)$ 是实的連續函数，在圍綫 L_j 上它可以确定精确到差一个任意常数.

我們現在假定 $[\operatorname{Re}\Psi(t)]^+$ 在 L 上是属于 H 类的. 那么，根据前一节所讲到过的結果：由积分方程(61.9)[其中的 $f(t)=[\operatorname{Re}\Psi(t)]^+$]所确定的函数 $\mu(t)$ 是适合 H 条件的.

因此，根据 §§ 15 及 18 中的結果，边値 $\Psi^+(t)$ 是存在的①，并且这个边値是属于 H 类的. 这样一来，我們有下述的結果(И. И. Привалов 定理)②：

如果在 S^+ 內是全純的函数 $\Psi(z)$ 的实部在 L 上取得确定的属于 H 类的边値，那么，它的虛部亦具有同样的性质③.

§ 63. Dirichlet 問題的求解

在解决了变态的 Dirichlet 問題以后，再来解决經典的 Dirichlet 問題(60.1)，便沒有什么困难了. 可以用很多方法把它归結为前面的变态的 Dirichlet 問題(在有界的单連通区域的情形下，这两个問題簡直就是一致的).

---

① 提醒一下，只在当沿着任意一条位在 S^+ 內的路綫而取得的极限存在时，我們才利用表示式 $\Psi^+(t)$.

② И. И. Привалов[2]；在这篇論文中，定理是对圓域証明的，但是，利用保角映射就可以直接得出在我們这里所討論的任意区域情形上的推广.

③ 容易証明(参看第 275 頁的注②)，如果 $[\operatorname{Re}\Psi^+(t)]$ 适合 $H(\alpha)$ 条件，那么，当 $\alpha<1$ 时，$[\operatorname{Im}\Phi(t)]^+$ 亦适合 $H(\alpha)$ 条件，而当 $\alpha=1$ 时，$[\operatorname{Im}\Phi(t)]^+$ 适合 $H(1-\varepsilon)$ 条件，其中 ε 为任意小的正数.

我們在这里指出这类化法中的最简单的一个．假定 $z_1, z_2, \cdots, z_p$ 是分别在区域 $S_1^-, S_2^-, \cdots, S_p^-$ 內任意取定的点．我們把未知的調和函数表成形式：

$$u(x, y)=U(x, y)+\sum_{k=1}^{p} A_k \ln|z-z_k|, \tag{63.1}$$

其中 $U(x, y)$ 是新的未知調和函数，而 A_k 是暂时还沒有确定的实常数．在圍綫 L_0 不存在的情形下，我們規定

$$\sum_{k=1}^{p} A_k=0; \tag{63.2}$$

这个条件保証表示式 $\sum A_k \ln|z-z_k|$ 在无穷远处取値零①．

根据(60.1)：函数 $U(x, y)$ 应該适合边界条件

$$U=f(t)-\sum_{k=1}^{p} A_k \ln|t-z_k| \quad \text{在 } L \text{ 上}. \tag{63.3}$$

如果我們假定常数 A_k 是任意取定的，而要求函数 U 是一个在 S^+ 內为全純的函数的实部，并在 L_0 不存在的情形下，还要求它在无穷远处取値零，那么，問題(63.3)一般讲来是不可解的，但是，变态的 Dirichlet 問題：

$$U=f(t)-\sum_{k=1}^{p} A_k \ln|t-z_k|+a_j \quad \text{在 } L_j \text{ 上}, \; j=0, 1, \cdots, p; \; a_0=0② \tag{63.4}$$

却总是可解的．

这个問題的解給出了値 $U(x, y)$，并且也确定了常数 $a_1, a_2, \cdots, a_p$，容易看出，对于这些常数，我們得到形如

$$a_j=f_j+\sum_{k=1}^{p} \gamma_{jk} A_k \tag{63.5}$$

---

① 对于較大的 $|z|$，我們有

$$\ln|z-z_k|=\ln|z|+\ln\left|1-\frac{z_k}{z}\right|=\ln|z|+O\left(\frac{1}{|z|}\right),$$

于是，可以得出

$$\sum_{k=1}^{p} A_k \ln|z-z_k|=(\ln|z|)\cdot\sum_{k=1}^{p} A_k+O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

② 在 L_0 不存在的情形下($j=1, 2, \cdots, p$)，条件 $a_0=0$ 应消失。

的表示式，其中 γ_{jk} 是与函数 $f(t)$ 无关的完全确定的常数，而 $f_j(j=1, 2, \cdots, p)$ 也是常数，它們与 $f(t)$ 是有关的，并且当 $f(t)\equiv 0$ 时，$f_j=0(j=1, 2, \cdots, p)$.

为了保証由公式 (63.1) 所确定的函数 u 是 Dirichlet 問題的解，必須而且只須 $a_j=0(j=1, 2, \cdots, p)$，亦就是說，必須而且只須使得常数 A_k 适合綫性方程組

$$\sum_{k=1}^{p}\gamma_{jk}A_k+f_j=0, \quad j=1, 2, \cdots, p. \qquad (63.6)$$

首先討論有界区域的情形．这时候，由 γ_{jk} 所构成的行列式是不等于零的．事实上，如果这个行列式等于零，那么，当 $f(t)\equiv 0$ (这时候 $f_j=0, j=1, 2, \cdots, p$) 时，从 (63.6) 而得出的齐次方程組就会有非零解 $A_1, A_2, \cdots, A_p$．此时，我們就得出一个在 S^+ 內是調和的并且不恒等于零的，又在 L 上取值零的函数[①]

$$u=U+\sum_{k=1}^{p}A_k\ln|z-z_k|;$$

但是，这是不可能的．因此，方程組 (63.6) 总是可解的；确定了 A_k 以后，我們就得出原来問題的解．

在无界区域的情形下，对方程組 (63.6) 还应該补充上方程 (63.2)．这样所得到的方程組，一般讲来，是不相容的；这一点是明显的，因为在条件 (63.2) 下，能表成形式为 (63.1) 的函数 u 在无穷远处是取值零的，但是，Dirichlet 問題一般讲来并不会有这样的解[②]．

首先，我們設法使边界条件除了差一个常数外是适合的（这些常数在所有 L_j 上都是相同的），亦就是，把条件 $a_1=a_2=\cdots=a_p=0$

---

① 如果不是所有的 $A_k=0$，那么，在 S^+ 內和式 $U+\sum_{k=1}^{p}A_k\ln|z-z_k|$ 就不可能恒等于零；因为，否則，函数 $U+iV+\sum A_k\ln(z-z_k)$ 就会等于常数，其中 V 是 U 的共軛函数．但是后者是不可能的，因为由条件，$U+iV$ 是单值函数．

② 提醒一下，在 Dirichlet 問題的提法中，我們只要求未知函数在无穷远处是有界的．

換成要求 $a_1=A,\ a_2=A,\ \cdots,\ a_p=A$, 其中 A 为某个常数. 那么, 代替方程組(63.6), 我們得到包含 $p+1$ 个未知数 $A_1, A_2, \cdots, A_p, A$ 的 $p+1$ 个方程的方程組

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{p}\gamma_{jk}A_k-A+f_j=0\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ p),\\&\sum_{k=1}^{p}A_k=0.\end{aligned}\tag{63.7}$$

和前面完全类似地, 我們可以証明, 这个方程組的行列式异于零, 于是, 这个方程組总是可解的. 这样一来, 我們便找到了一个在无穷远取值零, 并在 L 上取值 $f(t)+A$ 的調和函数 u. 因此, 函数

$$u-A\tag{63.8}$$

就是原来問題的解.

注釋 利用别的方法可以証明: 在关于区域边界的更一般得多的假設条件下, 上面的結果(有关解的存在性, 而不是关于把它表成双层势形式的問題)仍然是成立的①. 例如, 只需假設构成边界的封閉圍綫是 Jordan 曲綫②(因此, 甚至并不要求它是可求长的)就够了.

§64. 利用变态的单层势求解变态的 Dirichlet 問題

在§61中我們利用双层势解决了变态的 Dirichlet 問題. 但是, 在一些具有实际意义的情形下, 須要把解表成一个变态的单层势的形式. 考虑到这时候还可以給出奇异积分方程理論的一个最簡单和最直接的应用, 所以, 我們現在就来討論这个問題.

在§60中已經讲到了变态的 Dirichlet 問題的提法, 現在我們取消掉在前面几节中所規定的补充条件 $a_0=0$, 从而, 假定在問

① 在这个方向上的結果可以大大地加以推广, 例如, J. Radon[1] 就做过这种工作.

② 这样的区域一定可以保角地, 并且一直連續到边界地映射到一个例如由解析曲綫所包圍的区域上(甚至可以映射到圓域上; 参考任何一本比較詳細的复变函数論教程).

題中所出現的常数 $a_0, a_1, \cdots, a_p$ 中的每一个都沒有在事先給定.

我們将找問題能够表成形式

$$u(x, y)=\mathrm{Re}\,\Phi(z) \tag{64.1}$$

的解,其中这一次

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{i\mu(t)\,dt}{t-z}, \tag{64.2}$$

并且在这里 $\mu(t)$ 是 H 类的未知实函数.

这样一来,我們把 $u(x, y)$ 写成形式(参看 § 12):

$$u(x, y)=\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{dr}{r(z, t)}, \tag{64.3}$$

其中 $r(z, t)=|z-t|$. 右端的积分是一个变态的单层势 (§ 12).

容易看出,我們的問題不可能有两个都可以表成形式(64.1),(64.2)的不同解. 事实上,如同在 § 60 中已經証明了的(参看 § 60 末尾的注釋),如果在 L_j 上 $[\mathrm{Re}\,\Phi]^+=a_j$ $(j=1, 2, \cdots, p)$,其中 a_j 皆为常数,那末,$u=$常数$=a_0=a_1=\cdots=a_p$. 但是,在我們的情形下,根据 Сохоцкий-Plemelj 公式,$[\mathrm{Re}\,\Phi]^+=[\mathrm{Re}\,\Phi]^-$. 从而可以得出,在 S^- 內也有 $\mathrm{Re}\,\Phi(z)=$常数$=a_0=a_1=\cdots=a_p$. 另外,$\Phi(\infty)=0$;于是,$a_0=a_1=\cdots=a_p=0$, $\mathrm{Re}\,\Phi(z)=0$①.

把(64.3)代入边界条件(60.2)中,并且注意到

$$\mathrm{Re}\,\Phi^+(t)=\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dr}{r(t_0, t)},$$

我們得到积分方程

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{dr}{r(t_0, t)}=f(t_0)+a(t_0), \tag{64.4}$$

其中,亦象在 § 61 中那样,$f(t_0)$ 是 H 类中已知的实函数,而在 L_j 上 $a(t_0)=a_j=$常数,当出現 L_0 时,其中 $j=0, 1, \cdots, p$, 当 L_0 不出現时,其中 $j=1, 2, \cdots, p$; 前面已經指出过,和 § 61 中不同的

① 当 L_0 不出現时,这里的討論也是对的,不过,在这种情形下,应該規定 $j=1, 2, \cdots, p$.

在于,在这里我們并沒有規定 a_0 为零.

(64.4)左端出現的表示式

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{dr}{r(t_0, t)}=\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\cos\alpha(t_0, t)}{r(t_0, t)}ds, \quad (64.5)$$

是 Cauchy 型的奇异积分算子, 其中 $\alpha(t_0, t)$是点 t 处的正切綫和向量 $\overrightarrow{t_0t}$ 之間所夹的角(第 53 頁图 9). 事实上,如果

$$\vartheta=\vartheta(t_0, t)=\arg(t-t_0),$$

那么,有

$$\ln r=\ln(t-t_0)-i\vartheta,$$

从而,把 t_0 看成常量,对 t 微分,可以得出

$$\frac{dr}{r(t_0, t)}=\frac{dt}{t-t_0}-i\,d\vartheta,$$

并因此,有

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{dr}{r(t_0, t)}=\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int_L \mu(t)\frac{\partial\vartheta}{\partial s}ds. \quad (64.6)$$

我們知道(§ 7, 3° 段),

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial s}=\frac{\sin\alpha(t_0, t)}{r}=\frac{\cos(r, n)}{r}=\frac{K_0(t_0, t)}{r^\lambda}, \quad 0\leqslant\lambda<1,$$

其中 $K_0(t_0, t)$ 适合 H 条件. 因此, (64.6) 右端的第一項就是算子的特征部分. 这样一来, 我們看出: 方程(64.4)的指标等于零, 也就是說,它是拟 Fredholm 奇异积分方程(§ 56). 这个事实大大地簡化了我們的研究①.

我們的奇异积分方程是实方程, 因此, 在研究它的时候, 我們可以仅就实函数 $\mu(t)$来討論(参看 § 54).

方程(64.4)对应的齐次方程

$$\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\mu(t)\,dt}{r(t_0, t)}=0 \quad (64.7)$$

显然有下述形式的解:

① 特别是, 可以用前一章中所讲过的任何一种方法, 把方程(64.4)归結为一个与它等价的 Fredholm 方程.

$$\left.\begin{aligned}&\mu(t)=C_j \quad \text{在 } L_j \text{ 上},\\ &\quad j=0,\ 1,\ \cdots,\ p\ (\text{当 } L_0 \text{ 出現时}),\\ &\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ p\ (\text{当 } L_0 \text{ 不出現时}),\end{aligned}\right\}\tag{64.8}$$

其中 C_j 皆为任意(实)常数. 这方程不会有其他的解. 事实上,假定 $\mu(t)$ 是方程(64.7)的任一个解,那么,$0=\operatorname{Re}\Phi^+(t)=\operatorname{Im}\Psi^+(t)$,其中

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\mu(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{i}\Phi(z),$$

因此,在 L_j 上 $\mu=C_j$ (参看 § 30, 注釋 2),而这也就証明了我們的結論①.

現在类似于 § 61 中对 Fredholm 方程那样来处理我們的奇异积分方程,亦就是,用方程

$$\frac{1}{\pi}\int_L\mu(t)\frac{dr}{r(t_0,\ t)}-\int_L k(t_0,\ t)\mu(t)\,ds=f(t_0)\tag{64.9}$$

替代我們的奇异积分方程, 其中 $k(t_0,\ t)$ 是由下式所确定的函数②:

$$k(t_0,\ t)=\begin{cases}\rho_j(t), & \text{当 } t_0 \text{ 及 } t \text{ 均在 } L_j \text{ 上时},\\ 0, & \text{对所有别的情形},\end{cases}\tag{64.10}$$

其中 $\rho_j(t)$ 表示任意取定的(实的)連續函数,对它所加的唯一条件是

$$\int_{L_j}\rho_j\,ds\neq 0,\tag{64.11}$$

当 L_0 出現时, $j=0,\ 1,\ \cdots,\ p$, 当 L_0 不出現时, $j=1,\ 2,\ \cdots,\ p$.

現在进行与 § 61 中完全类似的推导, 我們就得出結論: 对应于(64.9)的齐次方程沒有非零解. 这就意味着, 与它相联的齐次

① 顺便指出, 在我們的情形下, $\operatorname{Im}\Psi^+=\operatorname{Im}\Psi^-$, 并因此无論在 S^+ 內, 还是在 S^- 內,都有 $\operatorname{Im}\Psi(z)\equiv 0$.

② 与§61 的区别仅仅在于:当 t_0 和 t 位在 L_0 上时,我們在这里并不假定 $k(t_0,t)$ 等于零; 但是, 即使在 §61 中, 我們也可以类似地来处理,这时候将变成一个更为一般的(有着自己的优越性的)积分方程. 参看 Н. И. Мусхелишвили[3] 及 [4].

方程也沒有非零解（因为在我們的情形下，指标是等于零的）；因此，方程(64.9)一定是可解的.

解出方程(64.9)以后，我們就得到一个确定的函数 $\mu(t)$，而常数 a_j 由下式給出：

$$a_j=\int_{L_j}\rho_j\mu\,ds,\quad \begin{array}{l} j=0,\ 1,\ \cdots,\ p\ \text{（当 } L_0 \text{ 出現时）},\\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p\ \text{（当 } L_0 \text{ 不出現时）}. \end{array} \tag{64.12}$$

这样一来，問題就得到了解决. 在无界区域的情形下，解显然在无穷远处取値零. 在有界区域的情形下，我們如果想使得在圍綫 L_0 上精确地有 $u=f$，那么，只要用 $u-a_0$ 替代 u 就够了.

注釋 1 类似于 §61 末尾(注釋 2)所述，容易断定：尽管輔助核 $k(t_0,\ t)$ 的选擇会影响到积分方程的解 $\mu(t)$，但是，由于核改变而引起的 $\mu(t)$ 的变化，只是在每一条圍綫 L_j 上都保持是常数的量.

常数 a_j 和輔助核的选擇无关，这直接可以从这一节开始所証明过的唯一性定理推出.

注釋 2 进行了完全类似于 §62 的討論以后，容易看出：如果在 S^+ 內是全純的函数 $\Psi(z)$ 存在着属于 H 类的 $[\mathrm{Re}\,\Psi(t)]^+$，那么，有

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\nu(t)\,dt}{t-z}+C+iC',$$

其中 $\nu(t)$ 是属于 H 类的实函数，而 C 与 C' 都是实常数. 常数 C 是完全确定的，而函数 $\nu(t)$ 在每一条圍綫 L_j 上被确定精确到差一个常数項.

在 S^+ 是有界区域的情形下，亦即，当圍綫 L_0 出現时，在 L_0 上对 $\nu(t)$ 补充一个合适的实常数，显然，可以使得 $C'=0$，并且从而有

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\nu(t)\,dt}{t-z}+C. \tag{64.13}$$

在这个表示式中，函数 $\nu(t)$ 在 L_0 上是完全确定的，而在 L_j 上 $(j=1, 2, \cdots, p)$ 它可以确定精确到差一个常数项.

在 S^+ 是无界区域的情形下，亦即，当圍綫 L_0 不出現时，显然，我們有 $C+iC'=\Psi(\infty)$，并因此，有

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\nu(t)\,dt}{t-z}+\Psi(\infty), \tag{64.14}$$

并且 $\nu(t)$ 在 L_j 上可以确定精确到差一个常数项.

这些結果(甚至在更为一般的形式下的結果)也都可以根据 § 62 的結果，应用簡单的代换(Ψ 换成 $i\Psi$)而直接得出.

§ 65. 利用单层势求解 Dirichlet 問題. 静电学的基本問題

1°. 利用完全类似于 § 63 中的方法. 由上一节中所得到的变态的 Dirichlet 問題的解，可容易地得出經典的 Dirichlet 問題的解. 为了避免重复起見，我們在这里不再来讲它了，而用下面两种方法来直接求解 Dirichlet 問題：利用变态的单层势和利用普通的单层势. 顺便我們得出了所謂静电学基本問題的解.

为了要給出应用奇异积分方程方法的一个簡单而直观的例子，我們只討論 L 是仅由一条封閉圍綫 L_0(L_0 包圍一个有界区域 S^+) 所构成的情形.

正象上面所設那样，我們假定 L 是适合 Ляпунов 条件的.

于是，假設要求根据边界条件

$$u=f(t) \quad \text{在 } L \text{ 上}, \tag{65.1}$$

来找一个在 S^+ 內是調和的在 S^++L 上是連續的函数 $u(x, y)$，其中 $f(t)$ 是給定在 L 上的实函数；我們将仍然假定 $f(t)$ 是适合 H 条件的.

2°. 利用变态的单层势求解. 我們将要找的問題的解表成形式：

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\,\Phi(z), \quad \Phi(z) = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z}, \tag{65.2}$$

其中 $\mu(t)$ 是属于 H 类的未知实函数.

正象在上一节中那样,把(65.2)代入(65.1),我們得到积分方程:

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dr}{r(t_0, t)} \equiv \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\cos\alpha(t_0, t)}{r(t_0, t)}\,ds = f(t_0). \tag{65.3}$$

这是一个指标为零的实的奇异积分方程(参看上一节). 整个的研究我們将仅在实函数的范圍內进行(参看 § 54). 对应于(65.3)的齐次方程

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\cos\alpha(t_0, t)}{r(t_0, t)}\,ds = 0 \tag{65.4}$$

有显然的解 $\mu(t) = C$, 其中 C 是任意常数; 它不会有其他的解(参看上一节). 因此,前一个方程的相联齐次方程

$$\frac{1}{\pi}\int_L \nu(t)\frac{\cos\alpha(t, t_0)}{r(t, t_0)}\,ds = 0 \tag{65.5}$$

有一个且只有一个綫性无关的解(因为指标 $\varkappa=0$), 因此, 如果 $\nu_0(t)$ 是方程(65.5)的任一个不恒等于零的解, 那么, 公式 $\nu(t) = C\nu_0(t)$ 就給出了所有别的解,其中 C 是任意常数[①].

根据奇异积分方程的一般理論[②], 原来方程(65.3)有解的充分和必要条件是

$$\int_L \nu_0(t) f(t)\,ds = 0; \tag{65.6}$$

当适合这个条件时,方程(65.3)的一般解是

$$\mu(t) = \mu_0(t) + C, \tag{65.7}$$

其中 $\mu_0(t)$ 是任一个特解,而 C 是任意常数.

現在进一步研究条件(65.6)的性质. 根据 § 14 的結果, 方程(65.5)和下述方程是等价的:

① 这里我們只討論实的解.

② 亦可参看 § 54.

$$\frac{d}{ds_0}\int_L \nu(t)\ln r(t_0,\ t)ds=0,$$

或者还和下述方程是等价的：

$$\int_L \nu(t)\ln r(t_0,\ t)ds=\text{常数}. \qquad (65.8)$$

我們来証明

$$m_0=\int_L \nu_0(t)ds\neq 0. \qquad (65.9)$$

事实上，在相反的情形下，单层势

$$U(x,\ y)=-\int_L \nu_0(t)\ln|t-z|ds=\int_L \nu_0(t)\ln\frac{1}{r(t,z)}ds \quad (65.10)$$

是区域 S^- 内（包括无穷远点在内）的調和函数（我們想用此来説明，$U(x,\ y)$ 在无穷远处取得确定的有限值；在我們的情形下，这个值等于零①）.

再者，因为根据(65.8)，在 L 上有 $U^-=U^+=U=$常数②，因此，无論在 S^+ 内还是在 S^- 内，都会有 $U(x,\ y)=$常数. 但是，根据势論中的已知公式③，有

$$-2\pi\nu_0(t_0)=\left(\frac{dU}{dn}\right)^+-\left(\frac{dU}{dn}\right)^-, \qquad (65.11)$$

其中 n 表示 L 上点 t_0 处指向左侧的法綫. 从而，在我們所討論的情形下，在 L 上就有 $\nu_0(t)=0$，但是，这与所假設的条件是矛盾的.

由(65.9)可以推知，一定可以选取到这样的常数 a_0，使得下

---

① 对于較大的 $|z|$ 来讲，我們有

$$U(x,\ y)=-\int_L \nu_0(t)\ln|t-z|ds=-\ln|z|\int_L \nu_0(t)ds-\int_L \nu_0(t)\ln\left|1-\frac{t}{z}\right|ds=-\ln|z|\int_L \nu_0(t)ds+O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

② 在这里我們利用了单层势的众所周知的性质：当通过 L 时，单层势保持为連續的（为此，只要使得密度 $\nu_0(t)$ 是有界的和可积的就够了）.

③ 为了保証公式(65.11)成立，只要密度 $\nu_0(t)$ 是連續的就够了.

式成立：

$$\int_L (f+a_0)\nu_0 ds = \int_L f\nu_0 ds + a_0\int_L \nu_0 ds = 0, \qquad (65.12)$$

而这正是方程

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\cos\alpha(t_0,\ t)}{r(t_0,\ t)}ds = f(t_0)+a_0 \qquad (65.13)$$

的可解性条件. 如果 $\mu(t)$ 是方程(65.13)的任一个解 (所有别的解都可以根据公式 $\mu+$常数 而得出), 那么,

$$u(x,\ y) = \mathrm{Re}\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)dt}{t-z} - a_0 = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)dr}{r(z,\ t)} - a_0 \quad (65.14)$$

是原来 Dirichlet 問題的解.

3° 静电学的基本問題. 順便我們解决了对数势論中的下述問題:

找一个表示在区域 S^+ 的边界 L 上质量分布的密度函数 $\nu(t)$, 使得与它对应的势

$$U(x,\ y) = \int_L \nu(t)\ln\frac{1}{r}ds \qquad (65.15)$$

在 S^+ 内保持为常数值. 这里 $r=r(t,\ z)=|t-z|$.

这里所提出的問題是静电学中有关电荷在导体 S^+ 的边界 L 上分布的基本問題在二維空間的一个类比. 在这个情形 (二維情形) 下, 这个問題也有着它的物理意义. 它近似地对应于电荷在一个很长的柱形导体(横截面为 S^+)上的分布問題.

如果在 S^+ 内 $U=$常数, 那么, 在 L 上 $U=$常数, 反之亦然. 因此, 問題便归結为一个第一类的 Fredholm 积分方程

$$\int_L \nu(t)\ln r(t_0,\ t)ds = \text{常数},$$

由此再对 s_0 进行微分, 我們就得出齐次的奇异积分方程(65.5).

我們已經看出, 它有非零解, 并且, 如果 $\nu_0(t)$ 是一个这样的非零解, 那么, 所有别的解都可以根据公式 $\nu(t)=C\nu_0(t)$ 而得出. 对应的势由下述公式給出:

$$U(x, y)=CU_0(x, y), \tag{65.16}$$

其中

$$U_0(x, y)=\int_L \nu_0(t)\ln\frac{1}{r}ds. \tag{65.17}$$

在 $S^+ + L$ 内势 $U_0(x, y)$ 有常数值，我們用 k_0 表示这个值：

$$U_0(x, y)=k_0, \text{ 在 } S^+ + L \text{ 内}. \tag{65.18}$$

可能会遇到 $k_0=0$ 的情形，以后我們把这种情形叫做**特殊情形**.

我們看出，这个問題的一般解(65.16)中包含了一个任意常数 C. 如果附加給定了分布在 L 上的“质量”或者“电荷”的量 m:

$$m=\int_L \nu(t)ds=C\int_L \nu_0 ds=Cm_0, \tag{65.19}$$

那么，問題就成为完全确定的了. 因为根据(65.9) $m_0\neq 0$，所以，从这个关系式可以确定出 C.

代替給定 m，还可以給定在 $S^+ + L$ 上势 $U(x, y)$ 的值 k. 此时，我們将用关系式 $k=k_0C$ 来确定 C，除了 $k_0=0$ 的特殊情形外，我們都可以用这个关系式定出 C，但是，当 $k_0=0$ 时，在 $S^+ + L$ 上对所有的 C，都有 $U(x, y)=0$. 这种特殊情形与三維空間的情形(亦就是，对于 Newton 势)是并不相似的.

4°. **利用单层势求解 Dirichlet 問題.** 要求根据在 L 上的条件 $U=f(t)$ 来找单层势(65.15)，是上面所討論的問題的一个直接推广；这是一个 Dirichlet 問題，并且要求用单层势来找解. 这个問題可以归結为第一类 Fredholm 积分方程

$$-\int_L \nu(t)\ln r(t_0, t)ds=f(t_0). \tag{65.20}$$

如果我們要想使得所要找的解 $\nu(t)$ 是适合 H 条件的，那么，我們应該假定，已給的函数 $f(t_0)$ 有对 s_0 的导函数，并且此导函数是适合 H 条件的，因为，此时容易看出，(65.20)的左端是具有这个性质的.

将(65.20)两端对 s_0 微分，我們得出奇异积分方程

$$-\int_L \nu(t)\frac{\cos\alpha(t,\ t_0)}{r(t,\ t_0)}ds=\frac{df}{ds_0}. \tag{65.21}$$

这个方程是上面我們利用变态的单层势求解 Dirichlet 問題时所得出的方程(65.3)的相联方程.

方程(65.21)的相联齐次方程是方程(65.4)，但是我們知道，方程(65.4)有唯一的綫性无关解 $\mu_0(t)=1$.

因为

$$\int_L \mu_0(t)\frac{df}{ds}ds=\int_L\frac{df}{ds}ds=0, \tag{65.22}$$

所以，方程(65.21)总是适合它的可解性条件的.

因此，方程(65.21)总是可解的. 它的一般解具有形式

$$\nu(t)=\nu^*(t)+C\nu_0(t), \tag{65.23}$$

其中 $\nu^*(t)$ 是任一个特解，$\nu_0(t)$ 是对应的齐次方程(65.5)的解，而 C 是任意常数.

假設 $\nu(t)$ 表示方程(65.21)的任一个解，那么，显然，由公式(65.15)所确定的势 $U(x,\ y)$ 在 L 上适合边界条件

$$U=f(t_0)-k, \tag{65.24}$$

其中 k 是确定的常数. 这样一来，函数

$$u(x,\ y)=U(x,\ y)+k \tag{65.25}$$

解决了 Dirichlet 問題(65.1)，因此，它的解可以表成一个单层势和某个常数 k 之和的形式. 如果我們要想单純地用单层势来表示这个解，我們还应該再找一个在 L 上从而亦在 S^++L 上等于常数 k 的单层势. 正如我們已看到的，除了特殊情形(亦即，在(65.18)中 $k_0=0$ 的情形)外，这一定是可以做到的.

积分方程(65.21)是由 G. Bertrand[2] 得出的，他利用了正則化方法(§50 中所述方法的特殊形式之一)把这个方程归結为 Fredholm 积分方程. 不过，因为他沒有利用奇异积分方程的一般理論，所以尽管他进行了相当麻煩的計算，并且对圍綫 L 和已

知函数 $f(t)$ 做了很强的限制，但是，問題还是沒有能够做到某种程度上的完全解决.

注释 由 4° 段的結果可以直接得出：除了所謂的特殊情形 $(k_0=0)$ 外，对于每一个在 S^+ 內是調和的函数 $U(x, y)$，只要它在 L 上的边值具有对 s 的导函数，且此导函数适合 H 条件，那么它就可以表成形式：

$$U(x, y)=\int_L \nu(t)\ln\frac{1}{r(t, z)}ds, \qquad (65.26)$$

其中 $\nu(t)$ 是 H 类的实函数. 容易看出，这种表示式是唯一的. 事实上，如果在 S^+ 內，从而也在 L 上，$U(x, y)=0$，那么，必然有 $\nu(t)\equiv 0$.

但是，容易看出，在特殊情形下，成立表示式

$$U(x, y)=\int_L \nu(t)\ln\frac{a}{r(t, z)}ds, \qquad (65.27)$$

其中 a 是任意取定的正常数，而且它不等于1. 对于确定的 a，当給定了函数 $U(x, y)$ 时，由上面的表示式就完全确定出 $\nu(t)$.

再者，容易看出，在所有情况下，每一个适合上述条件的調和函数 $U(x, y)$，可以表成(65.27)的形式，只要把 a 理解为一个这样任意取定的正常数，使得：

$$\int_L \nu_0(t)\ln\frac{a}{r(t_0, t)}ds=m_0\ln a+k_0\neq 0, \qquad (65.28)$$

其中 m_0 和 k_0 分别由公式(65.9)和(65.18)确定①.

这样一来，可以看出，曾被我們叫做特殊情形的情形，按本质来讲，并沒有什么特别，只要簡单地改变长度的单位，就可以摆脫掉这种特殊情形.

从上面所讲过的还可以推出：如果在 S^+ 內为全純的函数 $\Psi(z)$ 的实部 $U(x, y)$ 适合上面所讲过的条件，那么，函数 $\Psi(z)$ 就可以表成下面的形式

① 这样一来，a 的选擇只依賴于区域 S^+，而并不依賴于被表示的調和函数.

$$\Psi(z)=\int_L \nu(t)\ln\frac{a}{t-z}ds+iC, \qquad (65.29)$$

其中 $\nu(t)$ 是 H 类的实函数；a 是确定的正常数，它适合条件(65.28)，而且可以一劳永逸地由給定的区域 S^+ 确定；C 是实常数(已經与被表示的函数有关)．当然，还要假定已經用合适的方法取定了对数值，但是如何取定，我們留給讀者去完成(和后面的公式(69.2)当 $m=1$ 的情形进行比較)．

在取定 a 和确定选取对数值后，函数 $\Psi(z)$ 完全由函数 $\nu(t)$ 及常数 C 确定．

II. 全純函数利用 Cauchy 型积分或其他类似的积分的各种表示法

求解有关全純函数的某些边值問題最自然的方法之一，便是把未知的全純函数用 Cauchy 型积分或其他类似的积分表出，而把这个表示式代进边界条件中便化为一个积分方程．在前面几节中，我們曾利用这样的方法求解过經典的和变态的 Dirichlet 問題．

当然，如何合理地选擇对于求解已給問題最为方便的某种未知函数的积分表示式，就显得非常重要了．

在这一部分中，我們要指出在給定区域内为全純的函数的几种簡单的表示法．它們都是由 Cauchy 型积分及其他类似的积分給出的．

§ 66. 一般性的注釋

設 S^+ 是一个連通区域，它是由光滑的圍綫 $L_0, L_1, \cdots, L_p$ 所圍成的，其中 L_0 包圍所有別的圍綫；L_0 亦可能并不存在，这时 S^+ 将是一个无界区域．我們仍然用 L 表示圍綫 $L_0, L_1, \cdots, L_p$ 的全

体，并且按照通常那样规定 L 的正方向是使 S^+ 保持在其左側的方向．我們仍然用 S^- 表示 $S^+ + L$ 对全平面的余集；S^- 是由圍綫 $L_1, L_2, \cdots, L_p$ 所圍成的有界区域 $S_1^-, S_2^-, \cdots, S_p^-$，和当 L_0 存在时，还包含由 L_0 所圍成的无界区域 S_0^- 所构成．

假定 $\Phi(z)$ 是在区域 S^+ 內为全純，并且可以連續拓展到 L 上的函数，当 S^+ 为无界区域时，还假定 $\Phi(\infty)=0$．那么，这个函数一定可以用 Cauchy 积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(t)}{t-z}\,dt \tag{66.1}$$

来表示，(66.1) 是 Cauchy 型积分的一种特殊情形．

很自然会产生这样的問題：能否用别的 Cauchy 型积分来表示这同一个函数 $\Phi(z)$，在其积分中 $\Phi^+(t)$ 已換为边界上点的任何其他函数．这个問題可以归結为下述問題：**什么是使积分**

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \text{ 和 } \Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi(t)\,dt}{t-z} \tag{66.2}$$

表示同一个在 S^+ 內为全純的函数之充分和必要条件？其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是圍綫 L 上点的連續函数．

这个問題是很容易回答的．亦就是說，根据条件，对区域 S^+ 內的所有点 z，我們都应該有

$$\int_L \frac{\varphi(t)-\psi(t)}{t-z}\,dt=0.$$

但是，这时再根据在 §29 中所讲过的結果，就应該有

$$\varphi(t)-\psi(t)=\Omega^-(t), \tag{66.3}$$

其中 $\Omega^-(t)$ 是某个在 S^- 內为全純，并且可以連續拓展到 L 上的函数 $\Omega(z)$ 之边値（当 L_0 存在时，还要求 $\Omega(z)$ 在无窮远处取値零）．显然，反之，如果 (66.3) 成立，那么，在 S^+ 內有 $\Phi(z)=\Psi(z)$．

我們不应忘記，$\Omega(z)$ 应理解为分别在 $S_1^-, S_2^-, \cdots, S_p^-$ 內为全純的函数 $\Omega_1(z), \Omega_2(z), \cdots, \Omega_p(z)$ 的全体[如果 L_0 存在，它还应

該包括一个在 S_0^- 內为全純，又在无穷远处取值零的函数 $\Omega_0(z)$]①.

如果在无界区域的情形下，$\Phi(\infty)\neq 0$，那么，代替表示式 (66.1) 我們有表示式

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(t)}{t-z}\,dt+\Phi(\infty), \qquad (66.1a)$$

因此，这样的函数可以用无穷多种方法由 Cauchy 型积分表示出(这种表示法可以精确到差一个常数項).

交換 S^+ 和 S^- 所处的位置，我們就可以得出完全类似的結果.

§67. 具有实的或者純虛的密度之 Cauchy 型积分的表示式

利用在前一节中所述函数 $\Omega(z)$ 的任意性，我們还可以給出一个对于某种目的合用的表示已給全純函数的某些形式的 Cauchy 型积分.

在 §62 及 §64 中，我們曾經遇到过利用 Cauchy 型积分表示在給定的区域內为全純的函数之最簡单的表示式. 在这一节中，我們回到討論这些表示式，其目的是为了把它們能和上一节中所讲过的結果联系起来.

我們仍然照上一节中那样来理解 L, S^+ 和 S^-，但是，除此而外，我們还假定 L 是适合 Ляпунов 条件的，亦就是說，L 的切綫与某个固定方向之間所夹的角是适合 H 条件的.

1°. 首先假定 S^+ 是有界区域，这就是說，圍綫 L_0 是存在的，又假定 $\Phi(z)$ 是給定在 S^+ 內为全純，并且可以連續拓展到 L 上的函数.

① 亦就是說，$\Omega(z)$ 在 $S_1^-, S_2^-, \cdots, S_p^-$ 上有定义，且当 $z\in S_k^-(k=1,2,\cdots,p)$ 时，$\Omega(z)=\Omega_k(z)$. 当 S_0^- 存在时，$\Omega(z)$ 还在 S_0^- 上有定义，且当 $z\in S_0^-$ 时，$\Omega(z)=\Omega_0(z)$. 而 $\Omega_k(z)$ $(k=0,1,2,\cdots,p)$ 在 S_k^- 內是全純的. ——譯者注

我們在§62中已經看到:函数$\Phi(z)$可以表成形式

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu(t)dt}{t-z}+Ci=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu(t)+Ci}{t-z}dt,\quad(67.1)$$

其中$\mu(t)$是实的連續函数,而C是实常数①.

另一方面,函数$\Phi(z)$还可表为Cauchy积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Phi^+(t)dt}{t-z}.\quad(67.2)$$

因此,根据上一节中所述,存在一个在S^-內为全純,可以連續拓展到L上,并且在无穷远处取値零的函数$\Omega(z)$,使

$$\Phi^+(t)=\mu(t)+Ci+\Omega^-(t).\quad(67.3)$$

令

$$\begin{aligned}\Phi(z)&=U(x,y)+iV(x,y),\\ \Omega(z)+Ci&=u(x,y)+iv(x,y),\end{aligned}\quad(67.4)$$

根据(67.3),我們就有

$$v^-=V^+\quad 在L上.\quad(67.5)$$

因为函数$\Phi(z)$在S^+內是已給定了的,因此,我們可以认为V^+在L上的値亦是已知的.于是,我們可以通过求解区域S_0^-,S_1^-, $\cdots$, S_p^-上的Dirichlet問題而定出$v(x, y)$在这些区域上的値.然后,我們也就可以确定函数$\Omega(z)$在这些区域上的値$\Omega_0(z)$, $\Omega_1(z)$, $\cdots$, $\Omega_p(z)$.如果注意到条件$\Omega(\infty)=0$,那么,$\Omega_0(z)$显然就是完全确定的;同样,也可以确定常数C, C显然正好就是$v(x, y)$在无穷远处的値.値$\Omega_1(z)$, $\Omega_2(z)$, $\cdots$, $\Omega_p(z)$都确定精确到差一个实的任意常数.

然后,再根据公式(67.3),由公式

$$\mu(t)=U^+-u^-\quad(67.6)$$

确定出$\mu(t)$的値.

我們再一次看到,$\mu(t)$在L_0上是完全确定的,而在L_1, L_2,

① 我們已經指出过(§62):不仅当$\Phi(z)$可以連續拓展到L上时,表示式(67.1)是成立的,而且仅当$\mathrm{Re}\,\Phi(z)$具有这个性质时,表示式(67.1)亦是成立的.

$\cdots$, L_p 上, $\mu(t)$都确定精确到差一个(实的)任意常数.

在§62中, $\mu(t)$ 的确定是与求解一个积分方程有联系的, 而这个积分方程又是与求解多連通区域$(p>0)S^+$上的 Dirichlet 問題有联系的. 但是,在这里,只需求解单連通区域 S_0^-, S_1^-, $\cdots$, S_p^- 上的 Dirichlet 問題就可以确定 $\mu(t)$. 可是在§62中, 我們对函数 $\Phi(z)$加了比这里要更一般的条件:在那里我們只要求$\Phi(z)$的实部可以連續拓展到圍綫上;而在这里我們却要求 $\Phi(z)$ 的实部以及虚部都可以連續拓展到圍綫上.

2°. 如果区域 S^+ 是无界的, 亦卽, 圍綫 L_0 不出現, 那么, 正象在§62中所証明过的那样, 每一个在 S^+ 內为全純, 并且可以連續拓展到 L 上的函数 $\Phi(z)$, 都可以表成形式

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu(t)\,dt}{t-z}+\Phi(\infty), \tag{67.7}$$

其中 $\mu(t)$是实的連續函数[①]. 与前面完全类似, $\mu(t)$的确定可以化为求解有界单連通区域 S_1^-, S_2^-, $\cdots$, S_p^- 上的 Dirichlet 問題. 在 L_1, L_2, $\cdots$, L_p 上, 函数 $\mu(t)$ 都确定精确到差一个任意常数.

3°. 将 $\Phi(z)$换成 $i\Phi(z)$, 正象在§64的注釋2中已指出过的, 对于在 S^+ 內是全純的, 并且可以連續拓展到 L 上的函数 $\Phi(z)$, 在 S^+ 是有界区域的情形下, 我們得到它的表示式为

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\nu(t)\,dt}{t-z}+C, \tag{67.8}$$

而在 S^+ 是无界区域的情形下, 我們得出它的表示式为

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\nu(t)\,dt}{t-z}+\Phi(\infty); \tag{67.9}$$

在这两个公式中, $\nu(t)$ 都是实的連續函数, 而 C 是实常数. 函数 $\nu(t)$在 L_1, L_2, $\cdots$, L_p 上确定精确到差一个任意常数, 而在 L_0 上

---

① 仅当 $\mathrm{Re}\,\Phi(z)$可以連續拓展到 L 上时, 表示式(67.7)才是成立的(§62).

$\nu(t)$是精确确定了的；常数 C 是完全确定了的[①].

我們可以完全类似于在上面的情形中确定函数 $\mu(t)$ 那样来确定 $\nu(t)$.

§68. 密度为$(a+ib)\mu$的 Cauchy 型积分的表示式

在上一节中，所讲到过的表示式是这样的表示式的特殊情形：

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{(a+ib)\mu(t)dt}{t-z}+C, \qquad (68.1)$$

其中 $a=a(t)$, $b=b(t)$ 都是給定在 L 上的实的連續函数（它們与 $\Phi(z)$ 是无关的），并且在 L 上处处都有 $a^2+b^2\neq 0$; $\mu(t)$是实的連續函数，和常数 C 同样，我們要求根据函数 $\Phi(z)$ 来确定它們. 当 $a=1, b=0$ 时，我們通过选取适当的常数 C, 就得出上一节中的表示式(67.1)及(67.7)，而当 $a=0$, $b=1$ 时，通过选取适当的常数 C, 我們则得出上一节中的表示式(67.8)及(67.9).

象上一节中那样，我們将假定 L 上的切綫与某个固定方向之間所夹的角是适合 H 条件的，并且我們还要求給定的函数 $a(t)$和 $b(t)$都是适合 H 条件的.

另外，我們还假定函数 $\Phi(z)$ 可以連續拓展到 L 上，并且 $\Phi^+(t)$ 是适合 H 条件的.

我們首先討論 S^+ 是有界区域的情形，亦就是，圍綫 L_0 存在的情形. 此时，公式(68.1)可以改写成

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{(a+ib)\mu(t)+C}{t-z}dt. \qquad (*)$$

根据§66所讲过的結果，为了得出表示式(*)，就应該根据条件

$$\Phi^+(t)=(a+ib)\mu(t)+C+\Omega^-(t) \quad 在 L 上, \qquad (68.2)$$

来找一个在 S^- 内是全純，可以連續拓展到 L 上，并且在无穷远处

① 仅 $\mathrm{Im}\,\Phi(z)$ 連續拓展到 L 上时，表示式(67.8)和(67.9)亦是成立的. 这可以根据§62的結果得出来.

取値零的函数 $\Omega(z)$.

引进記号

$$iC+i\Omega(z)=\omega(z), \tag{68.3}$$

我們就得出关系式

$$\mathrm{Re}\,\frac{\omega^-(t)}{a+ib}=\mathrm{Re}\,\frac{i\Phi^+(t)}{a+ib}$$

或者还可写为

$$\mathrm{Re}(a-ib)\omega^-(t)=\mathrm{Re}\,i(a-ib)\Phi^+(t). \tag{68.4}$$

这样一来，因为，如果函数 $\Phi(z)$ 在 S^+ 內是已知的，那么，(68.4) 的右端是給定在 L 上的函数，因此，$\omega(z)$ 的确定，从而 $\Omega(z)$ 的确定，可以归結为求解单連通区域 S_0^-, S_1^-, $\cdots$, S_p^- 上的 Riemann-Hilbert 問題.

我們从区域 S_j^- 中任意取定一个，这一个区域上的 Riemann-Hilbert 問題一定是可解的，只要它所对应的指标 $\varkappa_j$ 不是負的. 这个指标由公式

$$\varkappa_j=\frac{1}{\pi}[\arg(a-ib)]_{L_j} \tag{68.5}$$

給出(参看 §43 末尾[①]).

这样一来，如果所有的 $\varkappa_j\geqslant 0$，那么，表示式(68.1)总是可能的. 在某些 $\varkappa_j$ 为負数的情形下，只有当 $\Phi(z)$ 适合某些补充条件时，表示式(68.1)才是可能的，至于这些补充条件我們不准备再讲了.

在 S^+ 为无界区域的情形下，可以有完全类似的結果. 在这种

① 在利用公式(43.3)之前，我們首先应該把其中的 b 換成 $-b$；另外，由于在我們的情况下，当沿着 L_j 的正方向移动时，S_j^- 保持在 L_j 的右側，因此，应該把(42.3)右端的符号改成相反的符号. 于是，我們有

$$\varkappa_j=-\frac{1}{\pi}[\arg(a+ib)]_{L_j}=+\frac{1}{\pi}[\arg(a-ib)]_{L_j},$$

这亦就是在形式上和(43.3)是完全一致的公式.

情形下,一开始就可以直接确定常数 C:

$$C=\Phi(\infty). \tag{68.6}$$

对函数 $\Phi(z)-\Phi(\infty)$ 进行和上面完全类似的討論，我們便把它归結为求解有界单連通区域 $S_1^-, S_2^-, \cdots, S_p^-$ 上的 Riemann-Hilbert 問題(68.4).

当所有的 $\varkappa_j\geqslant 0$ 时，这些問題总是可解的. 在相反的情况下(亦即,当某些 $\varkappa_j$ 是負数时),只有当 $\Phi(z)$ 再滿足某些补充条件时,表示式(68.1)才是可能的.

在下一节中，我們将要詳細地討論一个形式为(68.1)的表示式.

§ 69. И. Н. Векуа 的积分表示式

在很多重要問題的边界条件中，不仅出現未知函数本身的边值,而且还出現未知函数的到某阶的导函数之边值. 因此,重要的是要有能表出一个已給的全純(或者分区全純)函数的逐次导函数的积分表示式. 在很多应用中,特别方便的这种表示法之一是由 И. Н. Векуа 給出的一种表示式(参見 И. Н. Векуа[5],[8]). 我們在这里来推导这种表示式①.

1° 首先假定 S^+ 是有界的单連通区域，它是由一条封閉的 Ляпунов 圍綫 L 所圍成的. 我們将用 S^- 表示 S^++L 对于全平面的补区域.

我們来証明下述定理(И. Н. Векуа):

定理 *假定在 S^+ 內是全純的函数 $\Phi(z)$ 之第 m 阶导函数在 L 上取 H 类的边值，那么，如果假定坐标原点位在 S^+ 內，則函数 $\Phi(z)$ 可以表成下述形式:*

当 $m=0$ 时,

① 后来 Д. И. Шерман[5],接着 Ю. М. Крикунов[1]~[3], Р. С. Исаханов[1],[2] 都給出了另一些类似的表示式.

$$\Phi(z)=\int_L \frac{\mu(t)\,ds}{1-\frac{z}{t}}+iC, \tag{69.1}$$

当 $m\geqslant 1$ 时,

$$\Phi(z)=\int_L \mu(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)ds+\int_L \mu(t)\,ds+iC, \tag{69.2}$$

其中 $\mu(t)$ 是 H 类中的实函数，而 C 是实常数；$\mu(t)$ 和 C 可以由 $\Phi(z)$ 唯一确定①.

对于給定的 t, 我們把 $\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)$ 理解为当 $z=0$ 时取值零的那一个分支；而 s 表示 t 的弧坐标.

我們从証明 $m=0$ 情形的定理开始. 注意到

$$ds=t'^{-1}dt=\overline{t'}\,dt,$$

其中

$$t'=\frac{dt}{ds}=\frac{dx}{ds}+i\,\frac{dy}{ds},\quad \overline{t'}=\frac{dx}{ds}-i\,\frac{dy}{ds}=t'^{-1}, \tag{69.3}$$

我們就可把公式(69.1)改写成

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\pi i\mu(t)t\overline{t'}}{t-z}dt+iC=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\pi i\mu t\overline{t'}+iC}{t-z}dt.$$

从而，再根据上一节所讲过的結果，可以推出，应該有

$$2\pi i t\overline{t'}\mu(t)=\Phi^+(t)-\Omega^-(t)-iC, \tag{69.4}$$

其中 $\Omega^-(t)$ 是某个在 S^- 内是全純，并且可以連續拓展到 L 上又在无穷远处取値零的函数之边値. 我們再引进記号 $\Omega_0(z)=\Omega(z)+iC$. 函数 $\Omega_0(z)$ 应該在无穷远点取純虛値，并且在 L 上适合边界条件

---

① Б. В. Хведелидзе[18] 給出这个定理对下列情形的推广：函数 $\Phi(z)$ 的 m 阶导函数在 S^+ 內可以由以 $\mathfrak{L}_p(\rho;L)$ (按照 § 27 中所指出的記号) 类的函数为密度的 Cauchy 型积分表出，其中 $p>1$，而 $\rho(t)$ 是形式为(27.3)的函数. 在这种情形下，$\mu(t)$ 亦是属于 $\mathfrak{L}_p(\rho;L)$ 类的.

$$\mathrm{Re}\frac{\Omega_0^-(t)}{tt'}=\mathrm{Re}\frac{\Phi^+(t)}{tt'}.$$

这样一来，我們得出一个对于区域 S^- 的 Riemann-Hilbert 边界問題：

$$\mathrm{Re}(a-ib)\Omega_0^-(t)=c,\tag{69.5}$$

其中

$$a-ib=a(t)-ib(t)=\frac{1}{tt'}=\frac{t'}{t},\quad c=c(t)=\mathrm{Re}\frac{\Phi^+(t)}{tt'};$$

在我們所規定的条件下，$a(t)$，$b(t)$ 及 $c(t)$ 显然都是适合 H 条件的.

容易看出，对应的指标等于零，而因此，再根据 §§ 41, 43 中的結果，問題(69.5)总是有解的，而且它的解可以表成形式：

$$\Omega_0(z)=\omega(z)+A\chi(z),$$

其中 $\omega(z)$ 是問題(69.5)的确定的特解，$\chi(z)$ 是齐次問題，亦即，是問題

$$\mathrm{Re}\frac{t'}{t}\chi^-(t)=0\tag{69.6}$$

的特解，而 A 为实常数. 要这样选取 A，使 $\mathrm{Re}\,\Omega_0(\infty)=0$，亦即，使 $\mathrm{Re}[\omega(\infty)+A\chi(\infty)]=0$. 这是一定可以做到的，因为 $\chi(\infty)$ 是异于零的实数. 事实上，因为齐次 Riemann-Hilbert 問題当其指标等于零时的解处处不为零①，因此 $\chi(\infty)\neq 0$. 剩下要証明的是 $\mathrm{Im}\,\chi(\infty)=0$. 但是，这可以直接由公式(69.6)得出，这个公式給出

$$0=\mathrm{Re}\int_L\frac{\chi^-(t)t'ds}{t}=\mathrm{Re}\int_L\frac{\chi^-(t)dt}{t}=\mathrm{Re}[2\pi i\chi(\infty)].$$

于是，常数 A 完全被确定了. 另外，又因为 $\Omega_0^-(t)$ 是适合 H 条件的②，因此，由公式(69.4)所确定的函数 $\mu(t)$ 亦是适合这个

① 实际上，就圓域的情形来讲，这可以由 § 41 的公式直接得出；又因为保角映射并不影响这个性质，因此，对于任意的区域，这个性质显然仍然是保持的.

② 参看 § 43，注釋 1.

条件的.

这样一来，在 $m=0$ 的情形下，定理已經得到了証明①. 从我們的推导过程本身显然可以看出：在(69.1)中的 $\mu(t)$ 和 C 都由函数 $\Phi(z)$ 唯一地确定；并且只要假定 $\mu(t)$ 是实的連續函数，亦很容易直接証明表示式(69.1)的唯一性(参看下面).

現在轉到在 $m\geqslant 1$ 的情形下定理的証明. 我們首先指出：只要 $\mu(t)$ 是适合 H 条件的，公式(69.2)的右端事实上就是一个在 S^+ 內为全純，并且它的 m 阶导函数之边值亦是适合 H 条件的函数. 实际上，經 m 次微分以后，我們就得出

$$\Phi^{(m)}(z)=(-1)^m(m-1)!\int_L \frac{\mu(t)\,ds}{t^{m-1}(t-z)}$$

$$=(-1)^m(m-1)!\int_L \frac{\mu(t)\,\overline{t'}\,dt}{t^{m-1}(t-z)},$$

从而，再根据 § 18 中的定理就可以得出我們的結論.

現在我們証明：如果表示式(69.2)是成立的，那么，在給定了函数 $\Phi(z)$ 以后，便可以唯一地确定函数 $\mu(t)$ 和常数 C. 这可以归結为結論：如果对于 S^+ 內所有的 z 均有

$$\int_L \mu(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)ds+\int_L \mu(t)\,ds+iC=0, \quad (69.7)$$

那么，一定有 $\mu(t)\equiv 0$(从而，显然，也有 $C=0$). 我們現在証明后一結論的正确性；在証明过程中，我們只需假定 $\mu(t)$ 是連續(实)函数就够了.

在点 $z=0$ 的邻域內，将(69.7)的左端按照 z 的幂次展开，我們容易得出

$$0=\int_L \mu(t)\,t^{-k}ds=\int_L \mu(t)\,\overline{t'}\,t^{-k}dt, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots. \quad (69.8)$$

但是，由此可以知道，Cauchy 型积分

---

① 这里推导的証明与 И. Н. Векуа 的証明是不同的；正相反，在后面所給出的 $m\geqslant 1$ 的情形的証明，确是 И. Н. Векуа[8] 的証明的重复.

$$\omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu(t)\,\overline{t'}dt}{t-z}$$

对于 S^+ 中所有的 z 均等于零；为了証实这一点，只需在点 $z=0$ 附近将 $\omega(z)$ 按 z 的冪次展开，并注意到(69.8)就够了．因此，有 $\omega^+(t)=0$，这意味着

$$\mu(t)\overline{t'}=-\omega^-(t)\text{①}. \qquad (69.9)$$

根据(69.8)当 $k=0$ 的那一个等式可以推出：在无穷远点的邻域内，成立着形式为

$$\omega(z)=\frac{a_{-2}}{z^2}+\frac{a_{-3}}{z^3}+\cdots$$

的展开式，于是，函数

$$\omega_0(z)=\int_{z_0}^{z}\omega(z)dz$$

在 S^- 内(包括 $z=\infty$ 在内)是全純的，其中 z_0 是区域 S^-+L 内任意取定的点，而积分是展布在这个区域内的任意一条路徑上的．把点 z_0 取在 L 上，从(69.9)可推出

$$\omega_0^-(t)=\int_{z_0}^{t}\omega^-(t)dt=\int_0^s\mu(t)ds$$

(我們規定弧坐标 s 是从 z_0 度量起的)；由此可以得出：在 L 上 $\operatorname{Im}\omega_0^-(t)=0$，并因此，在 S^- 內 $\omega_0(z)=$常数，在 S^- 內 $\omega(z)=\omega_0'(z)=0$，这意味着 $\mu(t)=0$，而这也就証明了表示式(69.2)的唯一性．完全同样的証明可以适用于表示式(69.1)．

在继續往下討論之前，先作如下的約定：**在整个这一节中，我們把一些(实的或复的)函数的綫性組合理解为具有实(常数)系数的綫性組合，并且与此相应地定义函数的綫性相关性和綫性无关性的概念．**

有了这样的約定之后，再根据剛才所証明过的函数 $\Phi(z)$ 能够

① 原书此式为 $\mu(t)\overline{t'}=\omega^-(t)$，在正文下面有关各式均差一符号，但这并不重要．——譯者注

表成形式(69.1)或者(69.2)的唯一性,直接地得出下列命題:

假定 $\mu_j(t)$ 是任意的連續实函数. 規定 $z \in S^+$, 并且令

$$\Phi_j(z) = \int_L \frac{\mu_j(t)}{1-\frac{z}{t}} ds \tag{69.1a}$$

或者

$$\Phi_j(z) = \int_L \mu_j(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1} \ln\left(1-\frac{z}{t}\right) ds + \int_L \mu_j(t) ds \quad (m \geqslant 1) \tag{69.2a}$$

(在下面的叙述中所指的是这两个公式中的一个).

那么,由函数 $\mu_j(t)$ $(j=1, 2, \cdots, k)$ **的綫性无关性或者綫性相关性,就可以得出函数** $\Phi_j(z)$ **的綫性无关性或者綫性相关性(反之亦然)**.

有了这些預先的注釋以后,我們便可以着手証明表示式(69.2)的可能性. 根据条件,我們假定,$\Phi(z)$是在 S^+ 内为全純的已知函数, $[\Phi^{(m)}(t)]^+$ 是存在的并且是适合 H 条件的. 如果表示式(69.2)是成立的,那末,微分 m 次以后,再让 $z \to t_0$ (z 保持在 S^+ 内)而取极限,并且簡单地用 $\Phi^{(m)}(t)$ 表示 $[\Phi^{(m)}(t)]^+$,我們得出

$$\Phi^{(m)}(t_0) = (-1)^m (m-1)!\pi i\, t_0^{1-m} \overline{t_0'} \mu(t_0) + (-1)^m (m-1)! \int_L \frac{\mu(t)}{t^{m-1}(t-t_0)} ds.$$

再在上式两端除以 $(-1)^m(m-1)!\pi i\, \overline{t_0'} t_0^{1-m}$,并且注意到 $t'\overline{t'}=1$,我們还可得出

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{t_0^{m-1} t_0' \mu(t) ds}{t^{m-1}(t-t_0)} = \frac{t_0^{m-1} t_0' \Phi^{(m)}(t_0)}{(-1)^m(m-1)!\pi i}, \tag{69.10}$$

由此比較实部,便得出

$$\mu(t_0) + \int_L \mathrm{Re}\, \frac{t_0^{m-1} t_0'}{\pi i t^{m-1}(t-t_0)} \mu(t) ds = \mathrm{Re}\, \frac{t_0^{m-1} t_0' \Phi^{(m)}(t_0)}{(-1)^m(m-1)!\pi i}. \tag{69.11}$$

容易看出，这是一个实的 Fredholm 积分方程，它的核具有形式：

$$\frac{K^*(t_0,\ t)}{|t-t_0|^{\alpha}},\quad 0\leqslant\alpha<1,\tag{*}$$

其中 $K^*(t_0,\ t)$是适合 H 条件的[1]. 这个方程的右端也是适合 H 条件的. 因此,它的每一个連續解是属于 H 类的(§51).

我們証明 Fredholm 方程(69.11)的可解性. 为此我們考虑它的相联齐次方程

$$\nu(t_0)+\int_L \mathrm{Re}\left[\frac{t^{m-1}t'}{\pi i t_0^{m-1}(t_0-t)}\right]\nu(t)\,ds=0,\tag{69.12}$$

此处及以下还假定 $\nu(t)$是实函数,則(69.12)还可以写成

$$\mathrm{Re}\left\{\nu(t_0)-\frac{t_0^{1-m}}{\pi i}\int_L\frac{t^{m-1}\nu(t)\,dt}{t-t_0}\right\}=0.\tag{69.13}$$

假定 $\nu(t)$是方程(69.12)的任一个(連續)解；那么，$\nu(t)$是适合 H 条件的. 我們考察函数

$$\Omega(z)=\frac{1}{z^{m-1}}\,\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{t^{m-1}\nu(t)\,dt}{t-z};$$

它在 S^- 内是全純的，并且在无穷远处如同 z^{-m} 那样取值零，再根据(69.13)，在 L 上有

$$\mathrm{Re}\,\Omega^-(t)=0.$$

因此,在 S^- 内 $\Omega(z)\equiv0$. 于是(§29),有

$$t^{m-1}\nu(t)=\omega^+(t)\quad \text{在 } L \text{ 上},\tag{69.14}$$

其中 $\omega(z)$是某个在 S^+ 内为全純的函数. 根据上面的公式还可以

---

[1] 我們有

$$\frac{1}{\pi i}\,\frac{t_0^{m-1}t_0'}{t^{m-1}(t-t_0)}=\frac{1}{\pi i}\,\frac{t_0^{m-1}-t^{m-1}}{t-t_0}\,\frac{t_0'}{t^{m-1}}+\frac{1}{\pi i}\,\frac{t_0'}{t-t_0}.$$

上式右端第一項显然是适合 H 条件的；而第二項可以改写成

$$\frac{1}{\pi i}\,\frac{t_0'}{t-t_0}=-\frac{1}{\pi i}\,\frac{\partial}{\partial s_0}\ln(t-t_0)=-\frac{1}{\pi i}\,\frac{\partial\ln r}{\partial s_0}-\frac{1}{\pi}\,\frac{\partial\vartheta(s_0,\ s)}{\partial s_0},$$

其中 $r=|t-t_0|$, $\vartheta(s_0,\ s)=\arg(t-t_0)$. 因此，有

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{\pi i}\,\frac{t_0'}{t-t_0}=-\frac{1}{\pi}\,\frac{\partial\vartheta(s_0,\ s)}{\partial s_0}.$$

但是，后一表示式是具有(*)的形式的(参看§7).

得出

$$\mathrm{Re}[it^{1-m}\omega^{+}(t)]=0 \quad \text{在 } L \text{ 上}.$$

因此，$\omega(z)$ 是对于 S^{+} 的齐次 Riemann-Hilbert 問題 $\mathrm{Re}(a+ib)\omega^{+}=0$（当 $a+ib=it^{1-m}$ 时）的解．这个問題的指标等于 $2m-2\geqslant 0$．因此（§§ 41 及 43），它有 $2m-1$ 个綫性无关解．于是，齐次 Fredholm 方程 (69.12) 有 $2m-1$ 个綫性无关的解，并且方程 (69.11) 对应的齐次方程亦有同样个数的綫性无关解．

尽管如此，非齐次方程 (69.11) 总是可解的．事实上，根据众所周知的 Fredholm 定理，为使方程 (69.11) 可解的充分和必要条件是它的右端适合条件

$$\int_{L}\nu(t)\,\mathrm{Re}\left[\frac{t^{m-1}t'\Phi^{(m)}(t)}{(-1)^{m}(m-1)!\pi i}\right]ds$$

$$=\mathrm{Re}\int_{L}\frac{\nu(t)t^{m-1}t'\Phi^{(m)}(t)\,ds}{(-1)^{m}(m-1)!\pi i}=0,$$

其中 $\nu(t)$ 是齐次方程 (69.12) 的任意（实）解．但是，根据 (69.14)，$\nu(t)=t^{1-m}\omega^{+}(t)$，于是，上述条件可以改写成形式：

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi i}\int_{L}\omega^{+}(t)\Phi^{(m)}(t)\,dt\right]=0.$$

因为被积函数是在 S^{+} 內为全純的函数 $\omega(z)\Phi^{(m)}(z)$ 的边值，所以，这个条件总是适合的．

这样一来，就証明了方程 (69.11) 的可解性．这个方程的一般解具有形式：

$$\mu(t)=\mu_{0}(t)+c_{1}\mu_{1}(t)+\cdots+c_{2m-1}\mu_{2m-1}(t), \tag{69.15}$$

其中 $\mu_{1}(t)$, $\mu_{2}(t)$, $\cdots$, $\mu_{2m-1}(t)$ 是方程 (69.11) 对应的齐次方程的綫性无关解的完备系，而 $\mu_{0}(t)$ 是方程 (69.11) 的一个特解，它是如此选取的：如果方程 (69.11) 的右端等于零，那么，就有 $\mu_{0}(t)=0$；而 c_{1}, c_{2}, $\cdots$, c_{2m-1} 都是任意实常数．

我們現在証明：已求出的由方程 (69.10) 分离出实部而得的方

程(69.11)的一般解也适合方程(69.10). 事实上, 令 (当$z\in S^+$时):

$$\Psi(z)=\int_L \mu(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)ds+\int_L \mu(t)\,ds+iC; \tag{69.16}$$

其中 $\mu(t)$ 由公式(69.15)确定,而 C 是实常数. 現在注意到,方程(69.11)所表示的不是别的,恰好就是条件

$$\mathrm{Re}\left[\frac{t_0^{m-1}t_0'\Psi^{(m)}(t_0)}{(-1)^m(m-1)!\pi i}\right]^+=\mathrm{Re}\left[\frac{t_0^{m-1}t_0'\Phi^{(m)}(t_0)}{(-1)^m(m-1)!\pi i}\right]^+, \tag{69.11a}$$

又假定 $\Psi(z)-\Phi(z)=X(z)$,我們看到, $X(z)$ 适合边界条件:

$$\mathrm{Re}[it_0^{m-1}t_0'X^{(m)}(t_0)]=0 \quad 在 L 上,$$

其中, 为了简单起見, 我們已經把$[X^{(m)}(t_0)]^+$写成$X^{(m)}(t_0)$. 但是, 上述条件构成一个对于 $X^{(m)}(z)$ 的齐次 Riemann-Hilbert 問題,并且这个問題的指标等于 $-2m$, 这就是說, 它的指标是負的. 从而, $X^{(m)}(z)=0$,亦就是說, $\Psi^{(m)}(z)=\Phi^{(m)}(z)$,因为方程(69.10)所表示的正好就是条件

$$[\Psi^{(m)}(t_0)]^+=[\Phi^{(m)}(t_0)]^+, \tag{69.10a}$$

于是,我們的結論就得到了証明. 我們还指出,显然

$$\Psi(z)=\Phi(z)+Q(z), \tag{69.17}$$

其中 $Q(z)$ 是次数不超过 $m-1$ 的多項式.

特别是, 由上面的結果可以推出: 作为与(69.11)对应之齐次方程的解的函数 $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\cdots$, $\mu_{2m-1}(t)$, 同时也是与(69.10)对应之齐次方程的解. 假定 $\Psi_j(z)$ 表示由公式(69.2a)联系 $\mu_j(t)$ ($j=1, 2, \cdots, 2m-1$)的函数,不过在(69.2a)中代替 $\Phi_j(z)$, 在此处应該理解为 $\Psi_j(z)$. 因为, $\mu_j(t)$ 現在表示方程(69.10)所对应的齐次方程的解, 亦即, 表示由(69.10)取 $\Phi(z)=0$ 而得的方程的解, 因此, 根据(69.17)可以看出, $\Psi_j(z)$ 是次数不超过 $m-1$ 的多項式.

把由公式(69.15)所給出的值 $\mu(t)$ 代入(69.16)中，我們就得到

$$\Psi(z)=\Psi_0(z)+iC+c_1\Psi_1(z)+\cdots+c_{2m-1}\Psi_{2m-1}(z), \quad (69.18)$$

其中 $\Psi_j(z)$ $(j=0, 1, \cdots, 2m-1)$ 由公式(69.2a)确定，在(69.2a)中代替 $\Phi_j(z)$ 現在应該理解为 $\Psi_j(z)$. 剛才我們已經看到过，当 $j\geqslant 1$ 时，$\Psi_j(z)$ 是次数不超过 $m-1$ 的多项式.

我們指出，根据公式(69.2a)，容易看出，$\Psi_j(0)$ 皆为实数.

由定义本身，函数 $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\cdots$, $\mu_{2m-1}(t)$ 是綫性无关的.

因此，根据上面所讲过的[公式(69.2a)以后的]結果，多項式 $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z)$, $\cdots$, $\Psi_{2m-1}(z)$ 亦是綫性无关的. 容易看出，多項式

$$i, \Psi_1(z), \Psi_2(z), \cdots, \Psi_{2m-1}(z) \quad (69.19)$$

亦是綫性无关的；事实上，如果 $Ci+c_1\Psi_1(z)+\cdots+c_{2m-1}\Psi_{2m-1}(z)\equiv 0$, 其中 C, c_1, c_2, $\cdots$, c_{2m-1} 都是实常数，那么，令 $z=0$, 又注意到 $\Psi_j(0)$ 是实数，则得出 $C=0$；但是，由此根据 $\Psi_1(z)$, $\Psi_2(z)$, $\cdots$, $\Psi_{2m-1}(z)$ 的綫性无关性，也有，$c_1=c_2=\cdots=c_{2m-1}=0$, 而这亦就証明了我們的結論.

从而，容易看出：次数不超过 $m-1$ 的任意多項式都是多項式(69.19)的完全确定的綫性組合[①].

現在对函数 $\Psi_0(z)$ 应用公式(69.17)，可以得出

$$\Phi(z)-\Psi_0(z)=Q_0(z),$$

其中 $Q_0(z)$ 是次数不超过 $m-1$ 的确定的多項式. 从而，如果我們要想使給定的函数 $\Phi(z)$ 等于 $\Psi(z)$, 那么，我們就应該如此选取实

---

① 事实上，設 $P(z)$ 是次数不超过 $m-1$ 的多項式. 我們来証明：它(唯一地)可以表成形式

$$P(z)=iC+c_1\Psi_1(z)+c_2\Psi_2(z)+\cdots+c_{2m-1}\Psi_{2m-1}(z),$$

其中 C, c_1, c_2, $\cdots$, c_{2m-1} 皆为实常数. 比較 z 的同次幂的系数，并分开实部和虛部，我們便得到 $2m$ 个关于 C, c_1, c_2, $\cdots$, c_{2m-1} 的实的綫性方程組. 这个方程組的行列式异于零，因为否則的話，就可以如此取到不全为零的常数 C, c_1, c_2, $\cdots$, c_{2m-1}, 使得 $P(z)\equiv 0$, 而这是不可能的，这是由于函数(69.19)是綫性无关的.

常数 C, c_1, c_2, $\cdots$, c_{2m-1}, 使得

$$Q_0(z)=iC+c_1\Psi_1(z)+c_2\Psi_2(z)+\cdots+c_{2m-1}\Psi_{2m-1}(z),$$

但是，由剛才所述可以知道，这总是可以做到的，并且是唯一的.

由此便可以得出当 $m\geqslant 1$ 时上述定理的正确性(当 $m=0$ 时，它在上面已經証明过).

2°. 保持 1° 段中的同样条件，所不同的只是用 S^+ 在这一次表示由 L 所圍成的无界区域，函数 $\Phi(z)$ 可以由一些公式表出，这些公式和(69.1)及(69.2)的区别仅在于把 z/t 换成 t/z, 另外在这一次假定坐标原点位在 S^+ 之外(也就是，原点仍然位于圍綫 L 的内部)，而且 $\ln\left(1-\frac{t}{z}\right)$ 为当 $z=\infty$ 时取值零的一个分枝. 理解 $\Phi(z)$ 为包括无穷远点在内是全純的.

或者重复前一段的討論(需要作不大的修改)，或者用代换 $z=\frac{1}{\zeta}$, $t=\frac{1}{\tau}$ 把无界区域的情形归結为有界区域的情形，都是可以得到这个結果的.

如果，除此而外，还有 $\Phi(\infty)=0$, 那末，在相应的公式中 iC 项应該去掉.

3°. 假設 S^+ 是象在 § 66 中那样形式的多連通区域；我們仍然沿用那一节中的記号. 假定 $\Phi(z)$ 是在 S^+ 内为全純，并且可以連續拓展到 L 上的函数，那么，它可以表成 Cauchy 型积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Phi^+(t)\,dt}{t-z}=\sum_{j=0}^{p}\Phi_j(z), \qquad (69.20)$$

其中

$$\Phi_j(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j}\frac{\Phi^+(t)\,dt}{t-z}, \quad j=0,\ 1,\ \cdots,\ p;$$

如果圍綫 L_0 不存在，那么，应該认为 $\Phi_0(z)\equiv 0$, 并且在(69.20)之右端要补充一项 $\Phi(\infty)$.

因此，函数 $\Phi(z)$ 为函数 $\Phi_0(z)$ 与 $\Phi_j(z)$ $(j=1, 2, \cdots, p)$ 之和，这里 $\Phi_0(z)$ 为在由圍綫 L_0 所包圍的有界单連通区域內是全純的函数，而 $\Phi_j(z)$ $(j=1, 2, \cdots, p)$ 是分別在由圍綫 L_j 所包圍的无界单連通区域內为全純的函数，并且 $\Phi_j(\infty)=0$. 如果圍綫 L_0 不存在，就应該用常数 $\Phi(\infty)$ 代替 $\Phi_0(z)$.

此外，如果边値 $[\Phi^{(m)}(t)]^+$ 在 L 上是适合 H 条件的，那么，对 $\Phi_0(z)$ 应用 1° 段中的表示式，而对 $\Phi_j(z)$ $(j\geqslant 1)$ 应用 2° 段中的表示式，我們就得出函数 $\Phi(z)$ 的一般表示式；当然，此处，每一次都应該适当地选取坐标原点.

公式(69.1)和(69.2)对多連通区域情形的推广亦可参看 И. Н. Векуа[5].

III. 广义的 Riemann-Hilbert-Poincaré 問題的求解

从能够用上述結果解决的大多数边値問題中，在这一部分里①，我們要研究一个无論从它本身，还是从应用角度来看都有着极重要价值的問題. 这个問題就是我們所謂的 Riemann-Hilbert 問題的一个推广，同时它又是著名的所謂 Poincaré 問題的推广(参看下一节).

§ 70. 几点預先的注釋

在§§ 41 及 43 中，我們曾經詳細地討論过 Riemann-Hilbert 問題. 最接近于这个問題的是 H. Poincaré[1]在研究海潮的数学理論时所遇到的問題. 这个問題称之为 Poincaré 問題，它的提法如下：要求根据区域 L 的边界条件：

① 这一部分的全部內容(§§ 71～75) 基本上来自 И. Н. Векуа 的論文[8](有时几乎是逐字逐句引用的).

$$A(s)\frac{du}{dn}+B(s)\frac{du}{ds}+c(s)u=f(s),\tag{70.1}$$

来找一个在某区域 S^+ 內是調和的函数 u, 其中 $A(s)$, $B(s)$, $c(s)$, $f(s)$ 都是給定在 L 上的实函数, s 是 L 上点的弧坐标, 而 n 是 L 的法綫.

正巧是为了解决这个問題, Poincaré 才研究了奇异积分方程,才推导了置換公式,并且給出了奇异积分方程的一个正則化方法. Poincaré 本人給出了問題在 $A(s)=1$, $c(s)=0$, 并且假定了圍綫 L 以及函数 $B(s)$, $f(s)$ 皆是解析的情形下的(不完全的)解.

不久, W. Pogorzelski[1] 給出了問題(70.1)的一个复杂的而且又是不很完全的解,在他所考虑的情形中, 他假定了 $A(s)=1$, $B(s)$, $c(s)$, $f(s)$都是解析函数,而且 L 是一条解析圍綫.

这两位著者所給出的这个問題的解之所以不完整(暂且先不考虑对圍綫以及对已知函数所加的非常强的限制),在于他們并未能闡明所得到的 Fredholm 积分方程和原来問題之間的等价性問題(这里所得到的 Fredholm 方程是由奇异积分方程經过正則化以后而得出的);因此,甚至連解的存在性問題也并未能解决.

Б. В. Хведелидзе[1],[2] 首先給出了問題(70.1)的完整的解,他所假定的条件是: 区域 S^+ 是由有限条封閉的 Ляпунов 圍綫所圍成的,而函数 $A(s)$, $B(s)$, $c(s)$, $f(s)$都是适合 H 条件的.

在后面(§74 中),我們将把 Poincaré 問題作为在下节中将要提出的求解一类非常一般的問題之特殊情形,而得出它的解.

§71. 广义的 Riemann-Hilbert-Poincaré 問題(問題 V). 归結为积分方程

假定 S^+ 是由一条簡单的封閉圍綫 L 所圍成的有界区域, 而 L 是适合 Ляпунов 条件的.

在本节标題中所提到的問題我們是指下述問題(問題 V):

要求根据边界条件

$$\operatorname{Re}\{\mathbf{L}\Phi\}=f(t_0) \quad 在 L 上, \tag{V}$$

来找一个在 S^+ 內是全純的函数 $\Phi(z)$ (Re 是指取实部)，其中 $\mathbf{L}$ 表示由公式:

$$\mathbf{L}\Phi\equiv\sum_{j=0}^{m}\left\{a_j(t_0)\Phi^{(j)}(t_0)+\int_L h_j(t_0,\ t)\Phi^{(j)}(t)\,ds\right\} \tag{71.1}$$

来确定的积分-微分算子 (s 是弧坐标)，这里 $a_0(t)$, $a_1(t)$, $\cdots$, $a_m(t)$ 都是給定在 L 上的 H 类的函数(一般是复函数); $f(t)$ 是給定的 H 类的实函数;最后, $h_j(t_0,\ t)$ 是給定在 L 上的函数,一般是复函数,它可以表成

$$h_j(t_0,\ t)=\frac{h_j^0(t_0,\ t)}{|t-t_0|^{\alpha}}, \quad 0\leqslant\alpha<1$$

的形式,而 $h_j^0(t_0,\ t)$ 对两个变量都是属于 H 类的函数.

$\Phi^{(j)}(t_0)$ 理解为函数 $\Phi(z)$ 的 j 阶导函数之边值 $[\Phi^{(j)}(t_0)]^+$; 这样一来，我們就应該假定一直到 $j=m$ 阶的导函数的边値在內都是存在的. 此外,我們还假定 $\Phi^{(m)}(t)$ 在 L 上是适合 H 条件的[从而,所有的 $\Phi^{(j)}(t)$ $(j\leqslant m)$ 亦都应該是适合 H 条件的].

特别是，如果取 $m=0$, $h_j(t_0,\ t)=0$, 那么，得出 Riemann-Hilbert 問題; Poincaré 問題也是这里所提出的問題的一种特殊情形(参看 § 74).

很多重要的边値問題，特別是那些和橢圓型偏微分方程联系的边値問題,都可以归結为問題 V(关于这一点可参看 § 76, 3° 段及 4° 段).

这种一般形式下的問題是由 И. Н. Векуа 在他的論文①[8](已提到过这篇論文)中提出②并非常灵巧地解决的(我把在 § 69 中

① 后来，Д. И. Шерман[5] 亦給出了类似的問題的其他解法，他还考慮了多連通区域的情形.

② Ф. Д. Гахов[2] 早就研究过問題 V 当所有 $h_j(t_0,\ t)$ 都等于零的特殊情形,他引用了 Hilbert 对一种特殊情形所用过的方法,将这个問題归結为一个非常复杂的奇异积分方程,在这个积分方程的核里包含了 Green 函数. 因此,用这个方法来研究解是非常困难的. 另外,他还对未知函数加了一些并非来自問題自身特性的附加限制.

所指出的全純函数的一般表示式接到这里)，下面我們亦要这样来做.

我們首先指出与問題V对应的齐次問題，也就是問題 $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\}=0$ 的下述性质：如果 $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \cdots, \Phi_k(z)$ 都是这个問題的特解，那么，它的任何綫性組合 $C_1\Phi_1(z)+C_2\Phi_2(z)+\cdots+C_k\Phi_k(z)$ (其中 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 都是实常数)亦一定都是解.

在整个这一部分中(到本章末尾为止)，我們把綫性組合都理解为实(常数)系数的綫性組合，并且相应地理解綫性相关性和綫性无关性的概念(这正象我們在 §§ 41～43 中討論 Riemann-Hilbert 問題时以及在 § 69 中所做过的那样).

为了解决这个問題，我們将要采用的方法是把問題归結为奇异积分方程(特别是，这个方程也可能是 Fredholm 方程).

我們首先討論 $m\geq 1$ 的情形. 假定坐标原点位在 S^+ 的內部，并且把未知函数表成(§ 69)的形式：

$$\Phi(z)=\int_L \mu(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)ds+\int_L \mu(t)\,ds+iC, \tag{71.2}$$

其中 $\mu(t)$ 是适合 H 条件的、实的未知函数，而 C 是实的未知常数，我們引进下列初等函数：

$$N_0(z, t)=\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)+1, \tag{71.3}$$

$$\begin{aligned}N_l(z, t)&=\frac{d^l}{dz^l}\left[\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)\right]\\&=(-1)^l\,\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-l)}{t^l}\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-l-1}\\&\quad\times\left\{\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)+\frac{1}{m-1}+\frac{1}{m-2}+\cdots+\frac{1}{m-l}\right\}\\&\qquad(l=1, 2, \cdots, m-1),\end{aligned} \tag{71.4}$$

$$N_m(z,\ t)=\frac{d^m}{dz^m}\left[\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)\right]$$
$$=\frac{(-1)^m(m-1)!}{t^{m-1}(t-z)},\tag{71.5}$$

其中 t 是 L 上的任一点，而 z 是区域 S^+ 內的点．正象在 § 69 中那样，把 $\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)$理解为在点 $z=0$ 处（对取定的 t）取値零的那一个分枝．函数 $N_l(z,\ t)$在区域 S^+ 内是 z 的全純函数．对于任意取定的 t，让 $z\to t_0$ 而取极限，其中 t_0 以及 t 都是 L 上的点，我們就得出单值确定在 L 上的函数 $N_l(t_0,t)$，它們(除了 $N_{m-1}(t_0,t)$ 及 $N_m(t_0,\ t)$ 以外)在 L 上对于两个变量都是适合 H 条件的．而在点 $t=t_0$ 处，函数 $N_{m-1}(t_0,\ t)$ 具有对数型奇点，函数 $N_m(t_0,\ t)$ 则具有 $(t-t_0)^{-1}$ 型的奇点．

現在容易看出，$\varPhi(z)$ 以及它一直到 $m-1$ 阶导函数的边值，都可以表成下述形式：

$$\begin{aligned}\varPhi(t_0)&=\int_L N_0(t_0,\ t)\mu(t)ds+iC,\\ \varPhi^{(l)}(t_0)&=\int_L N_l(t_0,\ t)\mu(t)ds\quad(l=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1).\end{aligned}\tag{71.6}$$

对于 m 阶导函数的边值，根据 Сохоцкий-Plemelj 公式，我們有

$$\varPhi^{(m)}(t_0)\doteq(-1)^m(m-1)!\pi i t_0^{1-m}\overline{t_0'}\mu(t_0)+\int_L N_m(t_0,\ t)\mu(t)ds.\tag{71.7}$$

因此，边界条件(V)具有形式：

$$\mathbf{N}\mu\equiv A(t_0)\mu(t_0)+\int_L N(t_0,\ t)\mu(t)ds=f(t_0)-C\sigma(t_0),\tag{71.8}$$

其中

$$A(t_0)=\mathrm{Re}\{(-1)^m(m-1)!\pi i t_0^{1-m}\overline{t_0'}a_m(t_0)\},\tag{71.9}$$

$$\sigma(t_0)=\mathrm{Re}\left\{i a_0(t_0)+i\int_L h_0(t_0,\ t)ds\right\},\tag{71.10}$$

$$N(t_0, t) = \sum_{l=0}^{m} \mathrm{Re}\left\{a_l(t_0) N_l(t_0, t) + \int_L h_l(t_0, t_1) N_l(t_1, t) ds_1\right\}$$
$$+ \mathrm{Re}\{(-1)^m (m-1)!\, \pi i h_m(t_0, t) t^{1-m} \overline{t'}\}. \quad (71.11)$$

这样一来，为了确定 $\mu(t)$，我們得出了一个实的奇异积分方程，并且容易看出，这个奇异积分方程的核具有以下的形式：

$$N(t_0, t) = \frac{K(t_0, t)}{t-t_0}, \quad (71.12)$$

其中 $K(t_0, t)$ 适合 H 条件．函数 $A(t_0)$ 及 $\sigma(t_0)$ 亦都是适合 H 条件的．

从推导过程本身可以看出：我們所得出的积分方程与原来問題是等价的．

我們已討論过 $m \geqslant 1$ 的情形．至于 $m=0$ 的情形，边界条件(V)采取形式：

$$\mathrm{Re}\left\{a_0(t_0) \Phi(t_0) + \int_L h_0(t_0, t) \Phi(t) dt\right\} = f(t_0); \quad (71.13)$$

在这种情形下，我們利用表示式(69.1)：

$$\Phi(z) = \int_L \frac{\mu(t) ds}{1-\dfrac{z}{t}} + iC, \quad (71.14)$$

与上面完全类似，我們可以得出一个与原来問題是等价的奇异积分方程．經过簡单的計算后表明：这个积分方程仍然由同一个公式(71.8)給出，并且 $A(t)$，$\sigma(t)$，$N(t_0, t)$ 也都分别由公式(71.9)，(71.10)，(71.11)給出，只不过此处应該取 $m=0$，$(-1)^m(m-1)!=1$；同时，$N_0(t_0, t)$ 在現在应該理解为不是由公式(71.3)給出，而是由表示式(71.5)取 $m=0$ 而得出的表示式，亦就是，在这个情形下，

$$N_0(t_0, t) = \frac{t}{t-t_0}. \quad (71.15)$$

注釋 考虑到以后的应用，我們指出所考虑的問題的下述变态．代替算子 $\mathbf{L}$ 我們考察由下述公式所确定的算子 $\mathbf{L}^*$：

$$\mathbf{L}^*\Phi \equiv \sum_{j=0}^{m}\left\{a_j(t_0)\Phi^{(j)}(t_0)+\int_0^{t_0} h_j^*(t_0,\ t)\Phi^{(j)}(t)dt\right\},\quad (71.16)$$

其中这一次函数 $h_i^*(t_0, t)$ 是适合下述条件的：$h_m^*(t_0, t)\equiv 0$[①]，而其余的 $h_j^*(t_0, t)$ 都是对 L 上所有的 t_0 和区域 $S^+ + L$ 內所有的 t 皆有定义的函数. 对 t 来讲，这些函数在 S^+ 內都是全純的，在 $S^+ + L$ 上都是連續的. 当 t_0 和 t 同时位在 L 上时，这些函数都适合 H 条件. 在公式(71.16)中的积分是展布在任意一条联接 S^+ 內的点 $t=0$ 和点 $t_0 \in L$，而不越出 S^+ 的路徑上的积分(根据所設条件可以知道，积分与路徑是无关的)；当然，代替 $t=0$ 也可以取 S^+ 內任何其他的点.

如果把在所有的积分中出現的表示式 $h_j(t_0, t)ds$ 都换成 $h_j^*(t_0, t)dt = h_j^*(t_0, t)t'ds$，而对应的积分都不是展布在 L 上的积分，而是从 0 到 t_0 的积分，那么，上面所有的公式以及下一节中的公式都仍然是有效的. 在所考虑的情形下，我們亦得出形式为(71.8)的积分方程，但是，在这次

$$\sigma(t_0) = \mathrm{Re}\left\{ia_0(t_0) + i\int_0^{t_0} h_0^*(t_0,\ t)dt\right\},\qquad (71.17)$$

$$N(t_0,\ t) = \sum_{l=0}^{m}\mathrm{Re}\left\{a_l(t_0)N_l(t_0,\ t) + \int_0^{t_0} h_l^*(t_0,\ t_1)N_l(t_1,\ t)dt_1\right\}.\qquad (71.18)$$

§ 72. 問題 V 的可解性問題之研究

我們着手研究奇异积分方程

$$\mathbf{N}\mu \equiv A(t_0)\mu(t_0) + \int_L N(t_0,\ t)\mu(t)ds = f(t_0) - C\sigma(t_0),\quad (72.1)$$

亦就是，上一节中的方程(71.8). 这是实方程. 以后我們把这个方程的解以及它的相联方程的解都理解为适合 H 条件的实解.

① 加上这个假定只是为了稍許簡化公式；它可以换成下列条件：要求 $h_m^*(t_0, t)$ 和別的 $h_j^*(t_0, t)$ 适合同样的条件.

1° 我們首先确定这个方程的指标，为此我們要分出表示式 $\mathbf{N}\mu$ 的特征部分

$$\mathbf{N}^0\mu \equiv A(t_0)\mu(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)}{t-t_0}dt.$$

在我們的情形下，$A(t_0)$是由公式(71.9)給出的，它还可以改写成

$$A(t_0)=\frac{1}{2}(-1)^m(m-1)!\pi i[t_0^{1-m}\overline{t_0'}a_m(t_0)-\overline{t_0}^{1-m}t_0'\overline{a_m(t_0)}].$$

至于系数 $B(t_0)$，显然，仅由出現在公式(71.8)的表示式 $N(t_0, t)ds$ 中的項：

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\{a_m(t_0)N_m(t_0, t)ds\}\\&=\frac{1}{2}(-1)^m(m-1)!\left\{\frac{t^{1-m}a_m(t_0)}{t-t_0}+\frac{\overline{t}^{1-m}\overline{a_m(t_0)}}{\overline{t}-\overline{t_0}}\right\}ds\end{aligned}$$

确定.

注意到

$$\frac{ds}{t-t_0}=\frac{\overline{t'}dt}{t-t_0},$$

$$\begin{aligned}\frac{ds}{\overline{t}-\overline{t_0}}&=\frac{t'\overline{dt}}{\overline{t}-\overline{t_0}}=t'd\ln(\overline{t}-\overline{t_0})=t'd\ln(t-t_0)+t'd\ln\frac{\overline{t}-\overline{t_0}}{t-t_0}\\&=\frac{t'dt}{t-t_0}+t'd\ln\frac{\overline{t}-\overline{t_0}}{t-t_0},\end{aligned}$$

而且后一項并不会影响到积分方程的特征部分，于是，我們看出，$B(t_0)$仅由 $N(t_0, t)ds$ 中的下述項确定：

$$\frac{1}{2}(-1)^m(m-1)!\left\{\frac{t^{1-m}\overline{t'}a_m(t_0)}{t-t_0}+\frac{\overline{t}^{1-m}t'\overline{a_m(t_0)}}{t-t_0}\right\}dt,$$

由此立可得出

$$B(t_0)=\frac{1}{2}(-1)^m(m-1)!\pi i[t_0^{1-m}\overline{t_0'}a_m(t_0)+\overline{t_0}^{1-m}t_0'\overline{a_m(t_0)}].$$

这样一来，

$$A(t_0)+B(t_0)=(-1)^m(m-1)!\pi i t_0^{1-m}\overline{t_0'}a_m(t_0),$$

$$A(t_0)-B(t_0)=(-1)^{m+1}(m-1)!\pi i\,\overline{t_0}^{1-m}t_0'\overline{a_m(t_0)}.$$

为了保証我們的奇异积分方程是正則型的方程(§ 44)，必须而且只需在 L 上处处都有

$$a_m(t_0)\neq 0.$$

以后我們将假定这个条件是适合的，与此相应，我們就說問題V是正則型的.

我們把方程(72.1)的指标 $\varkappa$ 也叫做問題V的指标，它是由下述公式确定的:

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{t^{m-1}t'\overline{a_m(t)}}{\overline{t^{m-1}t'}a_m(t)}\right]_L=2(m+n), \tag{72.2}$$

其中

$$n=\frac{1}{2\pi}[\arg\overline{a_m(t)}]_L. \tag{72.3}$$

为了研究积分方程(72.1)的可解性，我們应該討論(72.1)的相联齐次方程

$$\mathbf{N}'\nu\equiv A(t_0)\nu(t_0)+\int_L N(t_0,\ t)\nu(t)ds=0, \tag{72.4}$$

提醒一下(§ 53, 定理 III)，有

$$k-k'=\varkappa, \tag{72.5}$$

其中 k 和 k' 分别是相联齐次方程 $\mathbf{N}\mu=0$ 和 $\mathbf{N}'\nu=0$ 的綫性无关解的个数.

2°. 問題V对任何右端 $f(t_0)$ 都是可解的情形是有着特殊重要的意义的. 下述基本定理就是解决这个問題的.

定理 为了使得問題V对于任何右端 $f(t_0)$ 都是可解的，必須而且只需 $k'=0$, 或者 $k'=1$, 而且在 $k'=1$ 的情形下，方程 $\mathbf{N}'\nu=0$ 的解[①] $\nu(t)$ 应該适合条件

$$\int_L \nu(t)\sigma(t)ds\neq 0; \tag{72.6}$$

在这两种情形下，我們都应該有 $\varkappa\geqslant 0$, 并且齐次問題 $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\}=0$

① 因为 $k'=1$, 因此，这个解可以确定精确到差一个常数因子.

恰好有 $\varkappa+1$ 个綫性无关解.

我們首先証明上述定理中条件的充分性以及定理中有关齐次問題 $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\}=0$ 解的个数之結論.

如果 $k'=0$, 那么, 根据§53中的定理I, 方程(72.1)对任何右端, 亦就是对任意的函数 $f(t)$ 和任意的常数 C, 都是可解的. 但是, 根据(72.5), 齐次方程 $\mathbf{N}\mu=0$ 有 $k=\varkappa$ 个綫性无关解; 因为 $k\geqslant 0$, 因此, $\varkappa\geqslant 0$. 从而, 对任意的 C, 方程(72.1)的一般解具有形式:

$$\mu(t)=\mu^*(t)+C\mu_0(t)+C_1\mu_1(t)+\cdots+C_\varkappa\mu_\varkappa(t), \quad (72.7)$$

其中 C, C_1, $C_2,\cdots$, $C_\varkappa$ 都是任意实常数, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t),\cdots$, $\mu_\varkappa(t)$ 是齐次方程 $\mathbf{N}\mu=0$ 的綫性无关解, 而 $\mu^*(t)$ 和 $\mu_0(t)$ 则分别是方程 $\mathbf{N}\mu=f(t_0)$ 和 $\mathbf{N}\mu=-\sigma(t_0)$ 的任意特解.

把(72.7)代入(71.2), 或者当 $m=0$ 时, 把它代入(71.14), 我們就得出原来問題V的一般解:

$$\Phi(z)=\Phi^*(z)+C[i+\Phi_0(z)]+C_1\Phi_1(z)+\cdots+C_\varkappa\Phi_\varkappa(z), \quad (72.8)$$

其中 C, C_1, $C_2,\cdots$, $C_\varkappa$ 都是实的任意常数; 此处用 $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$, $\cdots$, $\Phi_\varkappa(z)$ 表示由 $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$, $\cdots$, $\mu_\varkappa(t)$ 通过公式(69.2a)或者(69.1a)而确定的在 S^+ 內是全純的函数, 而 $\Phi^*(z)$ 是用同样的方法由 $\mu^*(t)$ 确定的在 S^+ 內是全純的函数.

由于函数 $\mu_j(t)$ $(j=1, 2,\cdots,\varkappa)$ 的綫性无关性, 与它們对应的函数 $\Phi_j(z)$ 也是綫性无关的. 另外, 又因为 $\Phi_j(0)$ $(j=0, 1, \cdots,\varkappa)$ 都是实数, 因此, 由此容易得出函数 $i+\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$, $\cdots$, $\Phi_\varkappa(z)$ 的綫性无关性(和第311頁中部作比較).

与上述的对应, 齐次問題 $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\}=0$ 恰好有 $\varkappa+1$ 个綫性无关解.

現在假定 $k'=1$, 并且适合条件(72.6). 方程(72.1)在条件

$$\int_L \nu(t)[f(t)-C\sigma(t)]ds=0$$

适合时是可解的;因为,根据假定成立着条件(72.6),因此,通过上述条件就单值地确定出常数 C.

取定上面的值 C 以后,我們就得出方程(72.1)的解

$$\mu(t)=\mu^*(t)+C_1\mu_1(t)+C_2\mu_2(t)+\cdots+C_{\varkappa+1}\mu_{\varkappa+1}(t), \quad (72.9)$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_{\varkappa+1}$ 都是实的任意常数,而 $\mu_1(t), \mu_2(t), \cdots, \mu_{\varkappa+1}(t)$ 是齐次方程 $\mathbf{N}\mu=0$ 的綫性无关解;根据(72.5),这样的解有 $\varkappa+1$ 个. 因为 $\varkappa+1\geqslant 0$, 而且 $\varkappa$ 是偶数,因此,必然有 $\varkappa\geqslant 0$.

与此相应,原来問題 V 的一般解可以表成形式:

$$\Phi(z)=\Phi^*(z)+C_1\Phi_1(z)+C_2\Phi_2(z)+\cdots +C_{\varkappa+1}\Phi_{\varkappa+1}(z), \quad (72.10)$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_{\varkappa+1}$ 都是实的任意常数, $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \cdots, \Phi_{\varkappa+1}(z)$ 是在 S^+ 内为綫性无关的全純函数. 此外,由上面所讲过的,显然,齐次問題 $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\}=0$ 恰好有 $\varkappa+1$ 个綫性无关解.

現在轉到証明上述定理中所提到的条件之**必要性**. 假定 $\nu_j(t)\ (j=1, 2, \cdots, k')$ 是方程 $\mathbf{N}'\nu=0$ 的綫性无关解的完备系,我們假定它們是就范正交的,因此,有

$$\int_L \nu_i\nu_j ds=\delta_{ij} \quad (\delta_{ij}=1, \text{如果 } i=j;\ \text{而 } \delta_{ij}=0, \text{如果 } i\neq j). \quad (72.11)$$

我們假定問題 V 对任何右端 $f(t_0)$ 都是可解的. 那么,对任意的函数 $f(t_0)$ 和适当取定的 C, 积分方程(72.1)亦应該是可解的. 因此,无論 $f(t)$ 是怎样的函数,只要适当地取定常数 C, 就应該有

$$\int_L \nu_j(t)[f(t)-C\sigma(t)]ds=0,\ j=1, 2, \cdots, k'. \quad (72.12)$$

我們应該証明的是: 此时必然有 $k'=0$ 或者 $k'=1$, 并且当 $k'=1$ 时,还必須成立(72.6).

我們分別討論两种可能情形:

a) 所有数

$$\int_L \sigma(t)\nu_j(t)ds=0,\quad j=1,2,\cdots,k'; \tag{72.13}$$

b) 它們之中至少有一个是不等于零的，例如：

$$\int_L \sigma(t)\nu_1(t)ds\neq 0. \tag{72.14}$$

当 $k'\geqslant 1$ 时，第一种情形是不可能出现的，因为，此时条件(72.12)不可能对任意选定的 $f(t)$ 都是成立的．在第二种情形下，当 $k'\geqslant 2$ 时，如果特别取 $\nu_2(t)$ 当作 $f(t)$，那么，由(72.12)我們可以知道，当 $j=1,2$ 时，有

$$C=0,\quad \int_L[\nu_2(t)]^2ds=0,$$

而后一个等式是不可能成立的．因此，必然有 $k'\leqslant 1$，并且当 $k'=1$ 时，应該成立不等式(72.6)．

这样一来，我們的定理便得到了証明．我們还要指出特别明显的一个推論：

推論　如果 $\sigma(t)\equiv 0$，那么，問題 V 当且仅当 $k'=0$ 时，才对任何右端 $f(t_0)$ 都是可解的；在这种情形下，齐次問題 $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\}=0$ 恰好有 $\varkappa+1$ 个綫性无关解．

3° 現在轉到討論剛才所証明的定理中所提到的条件并不适合的情形(例如，当 $\varkappa<0$ 时，总可能出現这一种情形)．在这种情形下，問題 V 并不是对任意的右端 $f(t_0)$ 都是可解的：当且仅当适当选定的 C 适合条件(72.12)时，才会有解存在．

在此处我們亦考虑上面所提到的两种可能的情形 a)和 b)．

对于情形 a)，亦就是，适合条件(72.13)的情形．非齐次問題 V 当且仅当

$$\int_L \nu_j(t)f(t)dt=0,\quad j=1,2,\cdots,k' \tag{72.15}$$

时才是可解的，而根据(72.13)，齐次問題 $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\}=0$ 对应的积分方程 $\mathbf{N}\mu=-C\sigma(t_0)$ 对任意的 C 都是可解的．这个积分方程的

一般解是

$$\mu(t)=C\mu_0(t)+C_1\mu_1(t)+C_2\mu_2(t)+\cdots+C_k\mu_k(t),$$

其中，仍然象过去那样，$\mu_0(t)$ 是方程 $\mathbf{N}\mu=-\sigma(t_0)$ 的特解，而 $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, …, $\mu_k(t)$ 是齐次方程 $\mathbf{N}\mu=0$ 的綫性无关解．与此相应，齐次問題恰好有 $k+1=\varkappa+k'+1$ 个綫性无关解．

对于情形 b)，我們应該假定 $k'>1$，因为如果 $k'\leqslant 1$，就适合上面所証过的定理的条件．由关系式(72.12)中的第一个便可以单值地确定 C：

$$C=\frac{\int_L \nu_1(t)f(t)ds}{\int_L \nu_1(t)\sigma(t)ds}.$$

把 C 的这个值代入(72.12)的其余各个等式中，我們就得出非齐次問題 V 的可解性条件：

$$\int_L \nu_j^*(t)f(t)ds=0, \tag{72.16}$$

其中

$$\nu_j^*(t)=\nu_{j+1}(t)-\nu_1(t)\frac{\int_L \sigma\nu_{j+1}ds}{\int_L \sigma\nu_1 ds},\quad j=1,2,\cdots,k'-1. \tag{72.17}$$

与此相应，在齐次問題 $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\}=0$ 的情形下，我們应該取定 $C=0$．因此，在所考慮的情形下，齐次問題 $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\}=0$ 恰好有 $k=\varkappa+k'$ 个綫性无关的解．

特别是，根据上面所讲过的可以推出：只有在情形 b)，且仅当 $k=\varkappa+k'=0$ 时，齐次問題 $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\}=0$ 才沒有非零解．

§73. 問題 V 的可解性准則

正如我們在上一节中已經見到的，齐次方程 $\mathbf{N}'\nu=0$ 的綫性无关解的个数 k'，对問題 V 的可解性問題起着很重要的作用．因

此，不通过实际求解这个方程，而如何能确定出数 k' 来，便显得重要了．И. Н. Векуа 在已引証过的他的工作中也得到了在这个方向上的一些非常有趣的結果．

我們考察函数

$$\Omega^*(t_0, z)=\sum_{j=0}^{m}\left\{a_j(t_0)N_j(t_0, z)+\int_L h_j(t_0, t)N_j(t, z)ds\right\}, \tag{73.1}$$

其中 $N_j(t_0, z)$ 是在 §71 中所引入的初等函数，它們由公式(71.3)～(71.5)确定；只不过在此处第一个变量 t_0 是 L 上的点，而第二个变量 z 是平面上的任意点．以后，我們仅对 $z\in S^-$ 来討論函数 $\Omega^*(t_0, z)$．在这种情形下，在 $N_j(t_0, z)$ 的表示式中所出現的 $\ln\left(1-\frac{t_0}{z}\right)$，我們把它理解为在 S^- 內为全純的，并且在 $z=\infty$ 处取值零的那一个分枝．在这种条件下，函数 $\Omega^*(t_0,z)$ 在区域 S^- 內(包括无穷远点在內)是 z 的全純函数，并且容易看出，

$$\Omega^*(t_0, \infty)=a_0(t_0)+\int_L h_0(t_0, t)ds. \tag{73.2}$$

容易驗証，利用函数 $\Omega^*(t_0, z)$，方程 $\mathbf{N}'\nu=0$ 可以表成形式

$$\operatorname{Re}\Psi^-(t_0)=0, \tag{73.3}$$

其中已令

$$\Psi(z)=\int_L \nu(t)\Omega^*(t, z)ds. \tag{73.4}$$

根据(73.3)可以得出：当 $z\in S^-$ 时，有

$$\Psi(z)=iC, \tag{73.5}$$

其中 C 是实常数，由公式

$$C=\int_L \nu(t)\operatorname{Im}\Omega^*(t, \infty)ds \tag{73.6}$$

确定．

現在我們引进函数

$$\Omega(t_0, z)=\Omega^*(t_0, z)-i\operatorname{Im}\Omega^*(t_0, \infty). \tag{73.7}$$

那么，根据(73.4)，(73.6)及(73.5)直接可以看出：方程 $\mathbf{N}'\nu=0$ 等价于泛函方程

$$\int_L \nu(t)\Omega(t, z)ds=0 \quad 对所有\ z\in S^-, \tag{A}$$

换句話說，要求函数 $\nu(t)$ 对于任何的 $z\in S^-$ 都与給定的函数 $\Omega(t, z)$ 是正交的；有时我們把函数 $\Omega(t, z)$ 亦叫做"核"。

利用著名的解析函数的唯一性定理，我們可以用很多种方法把方程(A)换成对某些具体应用来說是很方便的等价关系式. 我們来討論由 И. Н. Векуа 指出的与方程(A)等价的下列关系式：

$$\int_L \nu(t)\,\omega_j(t)ds=0, \tag{B}$$

其中 $\omega_j(t)$ $(j=0, 1, 2, \cdots)$ 可以理解为下列函数組中的任何一組：

I. $$\omega_j(t)=\Omega(t, z_j), \quad j=0, 1, 2, \cdots, \tag{B$_1$}$$

其中 $z_0, z_1, \cdots$，是区域 S^- 內任意的点列，它在 S^- 內至少有一个极限点，特别是，$z=\infty$ 可以是这个极限点.

II. $$\omega_j(t)=\Omega_j(t, z_0)=\left[\frac{d^j\Omega(t, z)}{dz^j}\right]_{z=z_0}, \quad j=0,1,2,\cdots, \tag{B$_2$}$$

其中 z_0 是区域 S^- 內的任意定点.

III. $$\omega_j(t)=\chi_j(t), \quad j=0, 1, 2, \cdots, \tag{B$_3$}$$

其中

$$\chi_0(t)=\mathrm{Re}\left\{a_0(t_0)+\int_L h_0(t_0, t)ds\right\},$$

$$\chi_k(t_0)=\mathbf{L}\psi, \quad \psi=t^k, \quad k=1, 2, \cdots,$$

而 $\mathbf{L}$ 仍然表示由公式

$$\mathbf{L}\psi\equiv\sum_{j=0}^{m}\left\{a_j(t_0)\psi^{(j)}(t_0)+\int_L h_j(t_0, t)\psi^{(j)}(t)ds\right\}$$

所确定的算子.

函数 $\chi_j(t)$ 与函数 $\Omega(t, z)$ 在 $z=\infty$ 邻域內按 z 的降冪排列的展开式中的系数，仅差一个异于零的常数因子. 根据公式(73.7)，

(73.1)以及公式(71.3)～(71.5)，这个結論是容易驗証的.

关系式(B)表明：函数 $\nu(t)$ 与函数列 $\{\omega_j(t)\}$ 中所有的元素都是正交的.

如果不存在异于零的函数 $\nu(t)$ ①，使得它对所有 $z\in S^-$ 都与核 $\Omega(t, z)$ 是正交的，那么，我們就說核 $\Omega(t, z)$ 是完备的；如果只存在有限个綫性无关的函数 $\nu(t)$ 与 $\Omega(t, z)$ 是正交的，那么，我們就說核 $\Omega(t, z)$ 是几乎完备的.

类似地，如果不存在异于零的函数 $\nu(t)$，使得它与函数列 $\{\omega_j(t)\}$ 的所有元素都是正交的，那么，我們就說这个函数列是完备的；如果只存在有限个綫性无关的函数 $\nu(t)$ 与这个函数列中所有的元素都是正交的，那么，我們就說函数列 $\{\omega_j(t)\}$ 是几乎完备的.

假設 k' 是与核 $\Omega(t, z)$ 或者函数列 $\{\omega_j(t)\}$ 中所有元素都成正交的綫性无关的(实)函数 $\nu_j(t)$ $(j=1, 2, \cdots, k')$ 之最大个数，那么，我們就說数 k' 是核 $\Omega(t, z)$ 或者函数列 $\{\omega_j(t)\}$ 的亏数. 显然：如果对函数列 $\{\omega_j(t)\}$ 我們再补充上函数 $\nu_1(t), \nu_2(t), \cdots, \nu_{k'}(t)$，那么，我們就得出一个完备的函数列. 因此，函数列 $\{\omega_j(t)\}$ 的亏数可以定义为与所有 $\omega_j(t)$ 都是正交的綫性无关函数 $\nu_j(t)$ 的个数，并且把这些函数 $\nu_j(t)$ 补充到函数列 $\{\omega_j(t)\}$ 中去，便可以得出一个完备的函数列.

在現在的情形下，与核 $\Omega(t, z)$ 或者函数列 $\{\omega_j(t)\}$ 的元素都正交的綫性无关函数 $\nu(t)$ 的个数是个有限数[这里的 $\omega_j(t)$ 是理解为或者 (B_1) 或者 (B_2) 或者 (B_3)]：它等于齐次积分方程 $\mathbf{N}'\nu=0$ 綫性无关解的个数 k'. 因此，在我們的情形下，核 $\Omega(t, z)$ 及函数列 $\{\omega_j(t)\}$ 都是几乎完备的.

利用这里的术語，把上一节中已經証明过的命题可以叙述成：

---

① $\nu(t)$ 总应理解为 H 类的实函数.

为了保証問題 V 对任意的右端 $f(t)$ 都是可解的,必須而且只需函数列 $\{\omega_j(t)\}$ [或者核 $\Omega(t,z)$] 的亏数等于 0 或者 1, 并且在亏数等于 1 的情形下,与函数列 $\{\omega_j(t)\}$ 的所有元素 [或者与核 $\Omega(t,z)$] 都正交的函数 $\nu(t)$, 不应当再与 $\sigma(t)$ 正交.

§ 74. Poincaré 問題(問題 P)

回到討論 Poincaré 問題(§ 70), 我們現在仍然照 § 71 中那样理解 S^+ 与 L.

問題的边界条件是

$$A(s)\frac{du}{dn}+B(s)\frac{du}{ds}+c(s)u=f(s), \tag{74.1}$$

其中 $A(s)$, $B(s)$, $c(s)$, $f(s)$ 都是給定在 L 上的实函数, u 是在 S^+ 内为調和的未知函数, n 是 L 上弧坐标为 s 的点处的法綫,它指向 L 之左側. 边界条件(74.1)可以表为稍为不同的形式. 利用下列关系式:

$$\frac{du}{ds}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta;\quad \frac{du}{dn}=-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta, \tag{74.2}$$

其中 θ 是 L 的正向切綫与 Ox 軸之間的夹角,那末,条件(74.1)采取形式:

$$a(t)\frac{\partial u}{\partial x}+b(t)\frac{\partial u}{\partial y}+c(t)u=f(t),\ t\in L, \tag{74.3}$$

其中 $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $f(t)$ 均为給定在 L 上的实函数. 以后, 我們将假定这些函数都是属于 H 类的;此外,我們还假定 $a(t)$, $b(t)$ 不同时为零,于是,在 L 上处处都有

$$a(t)+ib(t)\neq 0. \tag{74.4}$$

对于未知函数 $u(x,y)$, 我們要求它的偏导函数 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ 在 L 上所取得的边值是适合 H 条件的(此时函数 u 本身当然更是适合 H 条件的).

为了简单起見，我們就把問題(74.3)叫做問題 P. 条件(74.3)还可以写成(現在把 t 改写成 t_0)：

$$\mathrm{Re}\{(a+ib)\Phi'(t_0)+c\Phi(t_0)\}=f(t_0),\quad t_0\in L,\tag{P}$$

正象上面那样，为了簡单起見，此处我們把 $\Phi^+(t_0)$，$\Phi'^+(t_0)$ 改写成了 $\Phi(t_0)$，$\Phi'(t_0)$，并且其中

$$\Phi(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)\tag{74.5}$$

表示在 S^+ 内为全純的函数，且 $\mathrm{Re}\,\Phi(z)=u(x,\ y)$.

条件(P)是条件(V)的当

$$m=1,\quad h_0=h_1=0,\quad a_1(t)=a(t)+ib(t),\quad a_0(t)=c(t)$$

的特殊情形.

对問題 P 应用前面几节中所述方法，我們把未知函数 $\Phi(z)$ 按公式(71.2)(取 $m=1$)表为：

$$\Phi(z)=\int_L \mu(t)\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)ds+\int_L \mu(t)\,ds+iC,\tag{74.6}$$

其中 $\mu(t)$ 是适合 H 条件的未知实函数，而 C 是实常数.

在我們所討論的情形下，由公式(71.10)所定义的函数 $\sigma(t)$ 恒等于零，并且积分方程(71.8)具有形式：

$$\begin{aligned}\mathbf{N}\mu\equiv\mathrm{Re}\{-\pi i\overline{t_0'}[a(t_0)+ib(t_0)]\}\mu(t_0)&\\ +\int_L \mu(t)\,\mathrm{Re}\left\{c(t_0)\ln e\left(1-\frac{t_0}{t}\right)\right.&\\ \left.-\frac{a(t_0)+ib(t_0)}{t-t_0}\right\}ds\equiv f(t_0).&\end{aligned}\tag{74.7}$$

由公式(72.2)可以定出这个方程的指标

$$\varkappa=2(n+1),\quad n=\frac{1}{2\pi}[\arg(a-ib)]_L.\tag{74.8}$$

(74.7)的相联齐次方程为

$$\mathbf{N}'\nu\equiv\mathrm{Re}\{-\pi i\overline{t_0'}[a(t_0)+ib(t_0)]\}\nu(t_0)$$

$$+\int_L \nu(t)\,\mathrm{Re}\left\{c(t)\ln e\left(1-\frac{t}{t_0}\right)+\frac{a(t)+ib(t)}{t-t_0}\right\}ds=0.\tag{74.9}$$

它等价于泛函方程(参看上一节)

$$\int_L \nu(t)\Omega(t, z)ds=0 \quad 对所有的 z\in S^-, \tag{A}$$

其中在現在的情形下

$$\Omega(t, z)=\frac{a(t)+ib(t)}{t-z}+c(t)\ln e\left(1-\frac{t}{z}\right). \tag{74.10}$$

在讲解直接由此导出的基本結果之前,我們先指出下列事实:如果 $\Phi(z)$ 是問題 P 的任一解,那么,$\Phi(z)+iC$ 显然亦是問題 P 的解,其中 C 是实常数;与此相应,在(P)中取 $f(t)\equiv0$ 而得出的齐次問題具有显然解 Ci. 因为对 $\Phi(z)$ 补充一个項 Ci 并不影响函数 $u(x, y)$,而只改变函数 $\Phi(z)$ 的虛部 $v(x, y)$,而 $v(x, y)$ 不在原来所提的問題中出現,因此,我們約定:如果問題 P 的两个解仅相差一个常数項 Ci,那么我們并不把它們看成是不同的解. 換句話說,問題 P 的两个解 $\Phi_1(z)$ 和 $\Phi_2(z)$ 只有当它們的实部 $u_1(x, y)$ 和 $u_2(x, y)$ 不相同时,我們才认为它們是不同的.

現在我們提醒一下,在我們的情形下,有 $\sigma(t)\equiv0$,再利用 §72 中(見第 324 頁)所讲到过的定理之推論,我們就推导出下述基本結果(И. Н. Векуа, 見前面引証之处):

定理 为了保証問題 P 对任意的右端 $f(t)$ 都是可解的,必須而且只需使方程(74.9)沒有非零解,或者完全一样地,必須而且只需使核 $\Omega(t, z)$ 是完备的. 在适合这些条件时,問題 P 对应的齐次問題恰好有 $\varkappa$ 个綫性无关解(剛才提到过的显然解 Ci 我們不算在內).

現在我們假定方程(74.9)或者完全一样的泛函方程(A)有 k' 个綫性无关的(实)解 $\nu_j(t)$ $(j=1, 2, \cdots, k')$. 那么,如果适合下列的充分和必要条件:

$$\int_L \nu_j(t)f(t)ds=0, \quad j=1, 2, \cdots, k', \tag{74.11}$$

则問題 P 是可解的,但是,此时問題 P 对应的齐次問題恰好有

$k=\varkappa+k'$ 个綫性无关解(不认为 iC 为解). 特别当 $\varkappa+k'=0$ 时, 如果适合条件(74.11),那么,問題P有一个且只有一个解.

正象在上一节中所說过的那样,方程(A)等价于条件

$$\int_L \nu(t)\omega_j(t)ds=0, \quad j=0, 1, \cdots, \tag{B}$$

其中 $\omega_j(t)$ 理解为下列函数組中的任何一組:

I. $$\omega_j(t)=\Omega(t, z_j)=\frac{a(t)+ib(t)}{t-z_j}+c(t)\ln e\left(1-\frac{t}{z_j}\right), \quad j=0, 1, \cdots, \tag{B$_1$}$$

其中 $z_0, z_1, \cdots$ 是区域 S^- 内的任意点列, 它在 S^- 内至少有一个极限点.

II. $$\omega_j(t)=\Omega_j(t, z_0), \quad j=0, 1, \cdots,$$

其中

$$\Omega_0(t, z_0)=\Omega(t, z_0)=\frac{a(t)+ib(t)}{t-z_0}+c(t)\ln e\left(1-\frac{t}{z_0}\right),$$

$$\Omega_k(t, z_0)=\left[\frac{d^k\Omega(t, z)}{dz^k}\right]_{z=z_0}=k!\frac{a(t)+ib(t)}{(t-z_0)^{k+1}} - (k-1)!c(t)\left\{\frac{1}{(t-z_0)^k}+\frac{(-1)^{k-1}}{z_0^k}\right\}, \tag{B$_2$}$$

$k=1, 2, \cdots$, 而 z_0 为 S^- 内任一个确定的点.

III. $$\omega_j(t)=\chi_j(t)=j[a(t)+ib(t)]t^{j-1}+c(t)t^j, \quad j=0, 1, \cdots. \tag{B$_3$}$$

我們提醒一下: 函数組 I~III 中的每一組的完备性都是問題P对于任意右端 $f(t)$ 都是可解的充分和必要条件.

最后, 我們指出上面所得出的結果的一个直接推論. 如果問題P对应的齐次問題沒有非零解, 又若指标 $\varkappa=0$, 那么, 問題P对任意的右端都是单值可解的. 事实上, 正如我們已看到的, 齐次問題解的个数为 $k=\varkappa+k'$; 因此, 当 $k=\varkappa=0$ 时, 就有 $k'=0$, 由此便得出我們的結論.

常常亦容易直接地断定，齐次問題沒有异于零的解. Б. В. Хведелидзе[1],[2] 曾指出过一种这样的情形.

假定边界条件給定为(74.1)的形式，又假定 $A(s)=1$. 另外，我們还假定 $B(s)$ 具有可积分的导函数，而 $c(s)\neq 0$, 并且

$$\frac{1}{2}\frac{dB(s)}{ds}-c(s)\geqslant 0. \tag{74.12}$$

那么，齐次問題

$$\frac{du}{dn}+B(s)\frac{du}{ds}+c(s)u=0 \tag{*}$$

就沒有非零解.

事实上，把由(*)而得出的值 $\frac{du}{dn}$ 代入已知公式

$$\iint_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=-\int_L u\frac{du}{dn}ds,$$

再經过簡单的变换(利用分部积分法)后，我們就得出

$$\iint_S\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=-\int_L\left[\frac{1}{2}\frac{dB(s)}{ds}-c(s)\right]u^2ds$$
$$\leqslant 0,$$

由此可以得出，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$, 也就是說 $u=$ 常数. 但是，此时，根据(*)和 $c(s)\neq 0$, 立刻就得到 $u=0$.

显然，判断齐次問題沒有非零解的这种方法，对于有界的多連通区域的情形仍然是有效的.

注釋 如果問題P的边界条件給定为形式(74.1)，那么，我們可以用公式

$$\varkappa=\frac{1}{\pi}[\arg(A+iB)]_L \tag{74.13}$$

来計算指标；这可以根据公式(74.8)得出，因为容易看出，根据公式(74.2)，

$$A+iB=i(a-ib)e^{i\theta}.$$

§75. 例 題

为了闡明在§§71～74中所讲到过的結果[①]，我們現在引进几个簡单的例題．我們指出：問題V（或者特别地，問題P）和函数列$\{\omega_j(t)\}$之間的关系，可以从以下两方面加以利用：如果能够直接解决了这些函数列的完备性問題，那么，我們就能够回答問題V的可解性問題；反之，我們能够用任一种方法来解决問題V的可解性問題，那么，这就有可能断定函数列$\{\omega_j(t)\}$是否是完备的．

1° Dirichlet 問題

$$u=f \quad 在L上 \tag{75.1}$$

是問題V当$m=0$, $a_0(t)=1$, $h_0(t_0, t)=0$时的特殊情形．根据公式(72.2)，和它对应的积分方程(72.1)的指标$\varkappa$等于零；函数$\sigma(t)\equiv 0$．此时，函数組$\{\chi_j(t)\}$就变成了(§73[②]，公式(B_3))：

$$1, t, t^2, \cdots, \tag{75.2}$$

我們由上面的結果知道，Dirichlet問題对任意的右端都是可解的．从而我們可以断言，函数組(75.2)是完备的．亦就是說，如果

$$\int_L t^k\nu(t)\,ds=0, \quad k=0, 1, 2, \cdots, \tag{75.3}$$

则$\nu(t)=0$；正象通常那样，把$\nu(t)$理解为H类的实函数[③]．

令$t=re^{i\varphi}$，又分开它的实部和虚部，我們就得出有关在L上給定的实函数組

$$1, r\cos\varphi, r\sin\varphi, r^2\cos 2\varphi, r^2\sin 2\varphi, \cdots \tag{75.4}$$

是完备的結論，其中$r=|t|$，$\varphi=\arg t\,(t\in L)$．

如果L是以O为中心的圓周，那么，我們得出有关函数組

---

① 我們提醒一下，在这些节中，S^+表示有界的单連通区域，并且点$z=0$位于S^+的内部．

② 在我們的情形下，$\mathbf{L}\psi=\psi$．

③ 容易看出，如果只要求$\nu(t)$是連續函数，那么有关函数列(75.2)是完备的結論仍然是成立的．

$$1,\ \cos\varphi,\ \sin\varphi,\ \cos 2\varphi,\ \sin 2\varphi,\ \cdots \tag{75.5}$$

是完备的,这是众所周知的結論.

2° Neumann 問題

$$\frac{du}{dn}=f \quad 在\ L\ 上, \tag{75.6}$$

其中 n 是法綫，我們規定它的方向指向 L 的左側，亦卽，指向 S^+ 的內部,这个問題亦是上一节中問題 P 当

$$\begin{aligned} &a(t)=\cos(n,\ x)=-\sin\theta, \\ &b(t)=\sin(n,\ x)=\cos\theta, \quad c(t)=0 \end{aligned} \tag{75.7}$$

时的特殊情形，其中 θ 是 L 的切綫与 Ox 軸之間的夹角；这样一来,我們有

$$a+ib=ie^{i\theta}=it',\ a-ib=-ie^{-i\theta}=-i\overline{t'}; \tag{75.8}$$

根据公式(74.8)：与这个問題对应的积分方程 $\mathbf{N}\mu=f(t_0)$ 之指标等于零(此外,还容易判断,这个方程在我們的情况下是 Fredholm 方程). 根据公式(74.10),在我們的情形下,有

$$\Omega(t,\ z)=\frac{it'}{t-z}. \tag{75.9}$$

这个核是不完备的,因为 § 74 中的泛函方程(A)

$$\int_L \nu(t)\Omega(t,\ z)ds\equiv i\int_L \frac{\nu(t)t'}{t-z}ds\equiv i\int_L \frac{\nu(t)dt}{t-z}=0,\ z\in S^-$$

具有异于零的实解 $\nu(t)\equiv 1$；此外，这个泛函方程沒有别的(与 $\nu(t)=1$ 是綫性无关的)解(§ 30),于是,核的亏数等于 1.

从而,当且仅当

$$\int_L \nu(t)f(t)ds=0, \quad 亦卽, \quad \int_L f(t)ds=0$$

时,問題(75.6)才是可解的,这个結論是众所周知的結果.

在我們的情形下，根据 § 73 或者 § 74 中的公式(B_3)①，函数組 $\{\chi_k(t)\}$ 为:

---

① 在我們的情形下，$\mathbf{L}\psi\equiv(a+ib)\psi'\equiv ie^{i\theta}\psi'=it_0'\psi'(t_0)$.

$$\chi_k(t)=kit't^{k-1}, \quad k=1, 2, \cdots, \tag{75.10}$$

由上所述，这組函数是不完备的，它的亏数等于1. 但是，如果对这組函数补充上函数 $\nu(t)\equiv 1$，我們便得出一个完备系(已丢掉了因子 ik)

$$1, t', t't, t't^2, \cdots.$$

3° 我們討論更一般的問題

$$\frac{du}{dn}+c(t)u=f(t), \tag{75.11}$$

这个問題是由問題P中用公式(75.8)确定 a 和 b 而得出的. 与它相对应的积分方程 $\mathbf{N}\mu=f$ 的指标等于零. 在我們的情形下，根据§73或者§74中的公式(B_3)[①]，我們有

$$\chi_k(t)=it't^{k-1}+c(t)t^k, \quad k=0, 1, \cdots. \tag{75.12}$$

如果函数組$\{\chi_k\}$是完备的，那么，問題(75.11)对任意的右端f都是可解的，反之亦然.

我們考虑当L是中心在原点半徑为1的圓周的情形，假定$c(t)=c$是常数. 那么，$t'=it$且

$$\chi_k(t)=(c-k)t^k, \quad k=0, 1, \cdots, \tag{75.13}$$

或者，令 $t=e^{i\varphi}$，就有

$$\chi_k(t)=(c-k)(\cos k\varphi+i\sin k\varphi). \tag{75.13a}$$

如果 c 不是正整数亦不是零，那么，上面的函数組显然是完备的，并且問題显然对任意的右端 f 都有一个而且只有一个解.

現在假定 $c=m$，其中 m 为非負整数. 那么，函数組(75.13a)是不完备的. 当 $m=0$ 时，如果对它再补充上一个函数 $\nu(t)=1$，那么它就是完备的；而当 $m\geqslant 1$ 时，对它必須补充上两个綫性无关的函数 $\nu_1(t)=\cos mt$, $\nu_2(t)=\sin mt$ 后，它才能成为完备的. 因此，当 $m=0$ 时，亏数等于1. 而当 $m\geqslant 1$ 时，亏数等于2. 于是，問題(75.11)对应的齐次問題有一个(当 $m=0$ 时)或者两个(当

---

① 在我們的情形下，$\mathbf{L}\psi=it_0'\psi'(t_0)+c(t_0)\psi(t_0)$.

$m\geqslant 1$ 时)解;而非齐次問題当且仅当

$$\int_0^{2\pi} f(t)d\varphi=0 \quad \text{如果 } m=0, \tag{75.14}$$

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos m\varphi\, d\varphi=0, \quad \int_0^{2\pi} f(t)\sin m\varphi\, d\varphi=0 \tag{75.15}$$

$$\text{如果 } m\geqslant 1$$

时才可解.

4° 斜导函数問題

最后,我們討論問題 P 当 $c(t)=0$ 时的特殊情形,此时边界条件为形式

$$a(t)\frac{\partial u}{\partial x}+b(t)\frac{\partial u}{\partial y}=f(t) \quad \text{在 } L \text{ 上}. \tag{75.16}$$

要求根据上述边界条件确定調和函数 $u(x, y)$ 的問題,有时叫做"斜导函数問題",这是由于边界条件(75.16)可以改写成下述形式:

$$\sqrt{a^2+b^2}\frac{du}{dl}=f(t) \quad \text{在 } L \text{ 上}, \tag{75.17}$$

其中 l 是向量 (a,b) 的方向,一般讲来,它和法綫或切綫是斜交的. 特别是,在不久以前,A. Liénard[1] 和 C. Jacob[1] 所发表的論文,就正是致力于这个問題的. 本来可以用上一节中所讲的方法来解决这个問題;但是在我們的叙述系統中,把它直接归結为 Riemann-Hilbert 問題,会更自然些,而且也可以非常簡单地做到这一点.

亦就是說,如同在上一节中那样,我們令 $u(x, y)=\operatorname{Re}\Phi(z)$,此外,我們再引进一个在 S^+ 内为全純的函数

$$U+iV=\Psi(z)=\Phi'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

那么,(75.16)可以写成

$$a(t)U-b(t)V=f(t),$$

或者

$$\operatorname{Re}(a+ib)\Psi^{+}(t)=f(t),$$

因此，問題便已經直接归結为 Riemann-Hilbert 問題了，它在单連通区域的情形下在 §§ 41～43 中已經是解决了的[1].

§ 76. 若干推广和应用

在前面几节中所讲过的方法和結果，可以有效地用来求解一系列的重要問題. 我們在这里仅簡单地介紹一些推广和应用[2].

1° 多連通区域上的問題P的解法是由 Б. В. Хведелидзе 在他的論文[2]中給出的，在这一篇論文中，亦和他的論文[1]中对单連通区域所作的研究那样，按照 Poincaré 的想法，将未知函数表成一个单层势的形式. 以后，Б. В. Хведелидзе 在他的另一篇論文[3]中应用了 И. Н. Векуа 的表示式(参看后面 3° 段)給出了更一般的問題的解.

2° 多連通区域上的 Riemann-Hilbert 問題的解（在 §§ 41～43 中我們解决了单連通区域上的这一个問題）是可以得到的，只要把它看成問題 V 的特例，并且将 §§ 71～73 中的方法經过适当地推广后，再应用到多連通区域的情形，問題便可以解决.

3° 椭圓型方程的 Poincaré 問題. 这个問題前面叫做問題 P (Poincaré 問題)，它的产生是与研究海潮的数学理論有关的，但是，它并不是这个理論所独有的問題.

海潮理論可以直接归結为求椭圓型微分方程

$$\Delta u+X(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+Y(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+Z(x, y)u=F(x, y) \tag{76.1}$$

在某个区域 S 内的正規解的問題，或者甚至在更一般的假設条件下，可以归結为求形如

---

[1] 关于多連通区域的情形的求解参看下一节中 2° 段.

[2] 在第五章及第六章将分别讲到，对問題在間断系数和若干个未知函数情形所作的推广.

$$\Delta u+X(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x}+Y(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y}+Z(x,\ y)u$$

$$+\iint\limits_{S}K(x,\ y;\ \xi,\ \eta)u(\xi,\ \eta)d\xi\,d\eta=F(x,\ y) \qquad (76.2)$$

的积分-微分方程在区域 S 的边界 L 上适合边界条件

$$A(s)\frac{du}{dn}+B(s)\frac{du}{ds}+c(s)u=f(s) \qquad (76.3)$$

(n 是法綫, s 是弧坐标) 的解的問題, 其中 Δ 是 Laplace 算子, $X(x,\ y)$, $Y(x,\ y)$, $Z(x,\ y)$, $F(x,\ y)$ 及 $K(x,\ y;\ \xi,\ \eta)$ 都是給定在区域 S 內的函数,而 $A(s)$, $B(s)$, $c(s)$, $f(s)$ 都是給定在区域 S 的边界 L 上的函数, 它們适合众知的正規性条件, 在这里我們不准备再讲这些条件了.

H. Poincaré 本人[1] 研究了方程(76.1)的情形, 他假定了在边界条件中 $A(s)=1$, $c(s)=0$; 在 G. Bertrand 的冗长的論文[3]中曾經研究了方程(76.2), 亦假定了 $A(s)=1$, $c(s)=0$; W. Pogorzelski[1] 曾經研究了方程 (76.2), 假定了 $A(s)=1$. 所有这些著者都假定了区域 S 的边界 L 是一条封閉的解析圍綫, 还都假定了在边界条件中出現的已知函数皆为解析函数.

这些著者为了找出对应于形式为(76.3)的边界条件的 Green 函数, 用到了一个叫做問題 P 的問題, 那一个問題与此处是同样的, 不过是对方程(76.1)或者(76.2)变成最簡单的形式 $\Delta u=0$ 后的情形而提出的边值問題①; 为了求解原来問題, 他們利用了这个 Green 函数和一个大家所熟知的方法, 造出了 Fredholm 积分方程.

但是, 我們早就部分地指出过, 在这些著者之中, 誰都沒有能把这个中間过程(問題 P 的解)研究到应有的完整程度, 因为对他們所得到的 Fredholm 方程(它是由奇异积分方程正則化而得出

① 亦卽, 他們找出了方程 $\Delta u=0$ 对应于边界条件(76.3)的 Green 函数. ——譯者注

的)的等价性問題并沒有解决(事实上,一般讲来,这种等价性并不成立). 更不用說,他們最后(通过所作出的 Green 函数)所得出的 Fredholm 积分方程(积分区域为 S)还是非常复杂的.

对于相当广泛而且很重要的一类形式为(76.1)的方程,我們所討論的問題可以直接归結为上面(§§71, 72)已經解决过的問題.

这就是,我們討論齐次椭圓型方程

$$\Delta u + X(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + Y(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + Z(x, y)u = 0, \quad (76.4)$$

其中 $X(x, y)$, $Y(x, y)$, $Z(x, y)$ 都是其自变量的整解析函数[①],而且当 x, y 取实值时,它們都是实函数(我們只限于討論齐次方程,但是,这实际上并不影响一般性,参看后面).

为了簡单起見,我們假定 S 是某个单連通区域. 我們要找的是方程(76.4)在 S 内的(实)正規解(也就是,在 S 内具有二阶連續导函数的解).

И. Н. Векуа 証明了[②]:每一个这样的解都可以表成形式(假定点 $z=0$ 在 S 内):

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\left\{\alpha(z, \bar{z})\varphi(z) + \int_0^z \beta(z, \bar{z}; \zeta)\varphi(\zeta)d\zeta\right\}, \quad (76.5)$$

其中 $\alpha(z, \bar{z})$ 和 $\beta(z, \bar{z}; \zeta)$ 都是完全确定的,且仅与方程(76.4)的系数有关,其自变量的整解析函数, $\alpha(z, \bar{z})$ 可初等地(用积分)从它計算出来,而 $\beta(z, \bar{z}; \zeta)$ 则可以用(处处收斂的)逐次逼近法得出[③]. 此处用 $\varphi(z)$ 表示某个在 S 内为全純的函数;无論 $\varphi(z)$ 是怎样的全純函数,根据公式(76.5)与它对应的函数 $u(x, y)$ 都是方程

---

① 如果假定函数 X, Y, Z 仅在某个有限区域 S_0 内都是正規解析函数,那么,这个条件可以大大地簡化. 但是,此时,一般讲来,需要对区域 S 加上一些补充条件;当然,S 包含在 S_0 之中.

② 参看 И. Н. Векуа 的著作[10].

③ 在脚注①所提到的情形下,这些函数在某个包含 S 的区域内都是变量 x 与 y 的正規解析函数.

(76.4)的正規解;反之,只要規定 $\operatorname{Im}\varphi(0)=0$,对应于每一个正規解就可以完全确定出全純函数 $\varphi(z)$.

如果我們不考慮齐次方程 (76.4),而考慮非齐次方程(亦就是,形式为(76.1)的方程),那么,对公式(76.5)的右端,还应該再补充上一个仅与自由項 $F(x, y)$和方程系数有关的項;这一項对解决問題的方法并不发生重要的影响.

正如剛才所指出过的那样,函数 $\alpha(z, \bar{z})$可以用初等方法算出来. 在某些重要的情形下, 函数 $\beta(z, \bar{z}; \zeta)$亦具有非常簡单的形式. 例如,对方程

$$\Delta u+\lambda^2 u=0$$

来讲, 便是这样, 此处 λ^2 是实常数(当 $\lambda^2>0$ 时, 上面的方程就是薄膜振动方程),此时,有 $\alpha(z, \bar{z})=1$, 而

$$\beta(z, \bar{z}; \zeta)=-\frac{\partial}{\partial \zeta}[J_0(\lambda\sqrt{\bar{z}(z-\zeta)})],$$

其中 $J_0(z)$ 是零阶 Bessel 函数.

轉到討論对于方程(76.4)所提出的边值問題. 如果把表示式(76.5)代入边界条件(76.3)中,那么,經过簡单的計算以后,就可以看出,这个边界条件采取形式

$$\operatorname{Re}\left\{a_1(t_0)\varphi'(t_0)+a_0(t_0)\varphi(t_0)\right.$$
$$\left.+\int_0^{t_0} h_0^*(t_0, t)\varphi(t)dt\right\}=f(t_0) \quad \text{在 } L \text{ 上},$$

其中 $a_1(t_0)$, $a_0(t_0)$, $h_0^*(t_0, t)$, $f(t_0)$都是已知函数, 在对边界条件中的系数的正規性加了某些假定下,它們具有在 § 71 以及 § 71 注釋中所指出过的性质(在現在情形下 $m=1$). 因此,我們就可以利用 § 72 中所讲过的方法. Б. В. Хведелидзе[3] 实质上就是用这个方法解决問題的,他还把这个方法推广到了多連通区域的情形①.

① 为此, 他利用了形式为(76.5)的表示式对多連通区域情形的推广, 这个推广亦是由 И. Н. Векуа 給出的;参考 И. Н. Векуа[10].

后来，Б. В. Хведелидзе[18] 把自己的結果，对关系式(76.3)的自由項和系数以及未知函数所加的条件，作了重要的推广，而对于方程(76.4)的系数的条件則仍然保持不变.

4°. 在 И. Н. Векуа 的論文[12]中，不論是在关于边界条件(76.3)的系数和自由项的非常一般的假定下，还是在关于方程(76.1)的系数和自由項的非常一般的假定下，都給出了 Poincaré 問題的解，他在他的著作[13]中对此都作了詳細的叙述，并且作了重要的补充.

5°. 与椭圓型方程有联系的一些边值問題. 在 3° 段中所提到的方法，亦可以推广到某些其他类型的椭圓型偏微分方程上去(它們之中亦包括了高于 2 阶的方程). 和 3° 段中所讲过的类似，只要有类似于(76.5)的表示式存在，在大多数情形下，通常所討論的(綫性)边值問題都可以归結为問題 V.

在 И. Н. Векуа 的著作[10]中讲到了，在这个方向上，由 И. Н. Векуа 和别的一些著者所得出的一系列重要結果.

我們还提到，在上述著作出版以后又发表了 А. И. Каландия 的論文[1]，[2].

第四章

一般情形下的联結問題．某些应用

在这一章內，我們求解一般情形下的联結問題，并且要給出所得出的解的一些应用①．

在这里我們是在下述意义下才应用"一般情形"这个术語的：边界曲綫 L 可以是任意一条逐段光滑曲綫（按照在§1中給出的定义），而 L 上的已知和未知函数都可以具有一定类型的間断点（关于这一点在后面会讲到的）．

在§81中我們将对很多著者有关求解联結問題的工作（在第二章并未介紹过的）作一些簡单的介紹．

① 在著者的书[9]以及本书的第五章中，可以找到在平面彈性静力学中的一些应用．但是，在这里我們指出，在下列各书中，讀者还可以找到复变函数边値問題以及奇异积分方程理論在一系列理論問題以及实际問題中的某些其他的应用：И. Н. Векуа [10]，[13]，Л. И. Седов[1]，А. В. Бицадзе[6]，C. Jacob[2]．还应該指出下列論文，它們之中的大多数在上述各书中都沒有提到：А. В. Бицадзе [2]～[5]，Б. В. Боярский[1]，И. Н. Векуа[9]，Н. П. Векуа 及 Р. С. Исаханов[1]，Ф. Д. Гахов 及 Л. И. Чибрикова[2]，А. Л. Гольденвейзер [1]，А. И. Каландия [1]，[2]，Л. Г. Магнарадзе [1]，С. Г. Михлин [8]，В. С. Рогожин [1]，М. М. Смирнов [1]，Я. Н. Фельд [1]，М. М. Фридман [1]，[2]，И. Х. Хайруллин [1]，Л. И. Чибрикова [3]，Д. И. Шерман [8]，[10]，L. Dragos [1]，S. Gellerstedt [1]，G. M. L. Gladwell [1]，[2]，P. Leehey [1]，R. C. MacCamy [1]，W. Piechocki 及 H. Zorski[1]，H. Schmidt[1]，K. Schröder[2]，H. Söhngen[3]，G. W. Veltkamp [1]，H. Zorski [1]～[4]．

I. 一般情形下的联結問題

§77. 一些术語和記号

在整个这一章中，我們将要用到下列术語和記号，它們之中的大多数在前面已經引进过．

1°. 曲綫 L 我們应該理解为（在§1中給出的定义之意义下的）一条逐段光滑曲綫．我們将假定（§1, 5°段）L 是由一些光滑的敞开弧 L_k, $k=1, 2, \cdots, p$ 所构成的，这些弧除了端点外沒有公共点．我們用 c_k, $k=1, 2, \cdots, n$ 或者簡单地用 c 表示曲綫 L 的結点（亦包括它的端点在內）．我們仍然把曲綫 L 上异于結点的点叫做普通点．

我們用 S 表示已沿着 L 而割开的平面；曲綫 L 上的点不属于 S．

在这一章以及以后各章中，我們常常要研究从应用的观点来看是很重要的下述特殊情形：曲綫 L 是由一些沒有公共点（包括端点在內）的光滑的敞开弧 $L_k=a_kb_k$, $k=1, 2, \cdots, p$ 所构成的．我們把这样的曲綫有时叫做断續的光滑曲綫．在这种情形下，S 是一个（連通）区域（有裂隙的平面）．

2°. 按照在§10中引用过的术語，如果函数 $\Phi(z)$ 在 S 內（点 $z=\infty$ 可能除外）是全純的，又可以从左側和右側連續拓展到曲綫 L 的所有普通点上，而在結点 c 附近它适合不等式

$$|\Phi(z)|<\frac{\text{常数}}{|z-c|^{\alpha}},\quad 0\leqslant\alpha=\text{常数}<1, \tag{77.1}$$

那我們就称 $\Phi(z)$ 是具有跳跃曲綫或者边界曲綫 L 的分区全純函数．

我們提醒一下，如果在 $\Phi(z)$ 在无穷远点的邻域內按 z 的冪級展开的展开式中，只包含有限多个 z 的正冪項，亦就是，当 $|z|$ 很

大时，我們有

$$\Phi(z)=A_k z^k+A_{k-1}z^{k-1}+\cdots,\quad A_k\neq 0,$$

那么，依据定义，$\Phi(z)$ 在无穷远处有有限阶，并且阶数等于 k；当 $k>0$ 时，点 $z=\infty$ 是 k 阶极点，而当 $k<0$ 时，点 $z=\infty$ 是 $-k$ 阶零点。

3°. 以后我們常常会遇到 S 中点 z 的具有这样性质的函数 $\Phi(z)$，对任何正常数 ε，当 $z\to c$ 时，均有 $|z-c|^{\varepsilon}\Phi(z)\to 0$，其中 c 为已知的結点. 我們把这样的函数叫做在結点 c 附近是**几乎有界的函数**. $\ln(z-c)$ 可以作为在点 c 附近是几乎有界的函数之实例.

4°. 以后我們經常要用到 H 类，H_0 类，H^* 类以及 H_ε^* 类的概念；可以参看 §8，我們在这里不再重述这些概念.

5°. 今后各处，当讲到在 L 上适合某种边界条件时，我們通常（如果不作相反的說明）**不把結点包括在 L 内**.

§78. 一般情形下的齐次联結問題

1°. 假定 L 表示任意一条逐段光滑曲綫（§1）. 我們这样来提出在一般情形下的**齐次联結問題**.

要求根据在 L 上的边界条件

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t),\tag{78.1}$$

找一个具有边界曲綫 L 的分区全純函数 $\Phi(z)$，它在无穷远处有有限阶，其中 $G(t)$ 是給定在 L 上的 H_0 类的函数，并且 $G(t)$ 在 L 上处处都不取值零.

我們仍然把函数 $G(t)$ 叫做联結問題(78.1)的系数.

我們再提醒一下，按照上面所采用的条件（§77, 5°段），等式(78.1) 应該对曲綫 L 上所有的普通点都是适合的. 应該按照在 §8, 3° 段中所闡明的那样，来理解 $G(t)$ 在 L 上处处都不取值零的条件.

我們指出，上面所引进的問題的提法包括了下述情形：系数 $G(t)$ 在曲綫 L 的各个光滑部分上可以具有有限个第一类的間断点，这是由于間断点可以包括在結点之中(我們通常都这样做)．

2°．正象在光滑的封閉圍綫的情形(§35)那样，典則解的概念在我們所考慮的情形下亦具有很重要的意义，我們現在用下法来定义典則解．

如果齐次联結問題(78.1)的解 $X(z)$ 不仅它本身是分区全純函数，而且函数 $\frac{1}{X(z)}$ 亦是分区全純函数，我們就說 $X(z)$ 是齐次联結問題(78.1)的典則解．

我們提醒一下，依据分区全純函数的定义本身，在所有結点 c 附近，我們应該有

$$|X(z)|<\frac{\text{常数}}{|z-c|^{\alpha}},\quad \alpha=\text{常数}<1, \tag{78.2}$$

$$\frac{1}{|X(z)|}<\frac{\text{常数}}{|z-c|^{\alpha}},\quad \alpha=\text{常数}<1. \tag{78.3}$$

这样一来，典則解由下列条件表征着：它在 S 内，可能除了无穷远点外，处处都不取値零；它在边界曲綫 L 上的所有普通点处的右边値及左边値亦不等于零①；但是，在結点 c 附近它适合条件(78.3)，如象适合条件(78.2)那样，根据定义，每一个分区全純函数都应当适合条件(78.2)．

我們現在就会看到，在所加的假定下，典則解总是存在的．

3°．我們轉到作出典則解，我們把 $\ln G(t)$ 理解为在弧 L_1, L_2, …, L_p 的每一条上都是連續变化的任意确定的値．因为依据条件，$G(t)$ 是属于 H_0 类的，并且它在 L 上处处都不取値零，因此，$\ln G(t)$ 亦是属于 H_0 类的．

我們用 c_1, c_2, …, c_n 表示曲綫 L 的所有結点．当 t 沿着一条

---

① 如果不适合上述条件，那么，函数 $\frac{1}{X(z)}$ 便不是分区全純的．

以点 c_k 为端点的弧 L_j 而趋于結点 c_k 时，函数 $\ln G(t)$ 趋于确定的极限，我們把这个极限用 $\ln G_j(c_k)$ 表示，因此，由定义当 t 沿着 L_j 趋于 c_k 时，

$$\ln G_j(c_k) = \lim \ln G(t). \tag{78.4}$$

現在我們討論函数

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(t)\,dt}{t-z}. \tag{78.5}$$

根据 Сохоцкий–Plemelj 公式，容易直接驗証，函数 $e^{\gamma(z)}$ 在普通点处适合边界条件(78.1)．剩下要說明的是它在結点附近的性质．

根据在§26, 3°段中所得出的結果，在結点 c_k, $k=1, 2, \cdots, n$ 附近，我們有

$$\gamma(z) = (\alpha_k + i\beta_k)\ln(z-c_k) + \gamma_0(z),$$

其中函数 $\gamma_0(z)$ 在由点 c_k 的邻域用曲綫 L 分割而得出的扇形的每一个內都是全純的，并且当 z 沿着任意一条不越出已知扇形的路徑而趋于 c_k 时，$\gamma_0(z)$ 趋于确定的极限，而

$$\alpha_k + i\beta_k = \sum_j \frac{\mp \ln G_j(c_k)}{2\pi i}, \tag{78.6}$$

其中和式对所有这样的标号 j 来取：与 j 对应的弧 L_j 集中在 c_k 处，并且对应于引出的弧取上面的符号，而对应于进入的弧則取下面的符号．

这样一来，在結点 c_k 附近，

$$e^{\gamma(z)} = (z-c_k)^{\alpha_k + i\beta_k}\Omega(z), \tag{78.7}$$

其中 $\Omega(z)$ 是在 c_k 附近在上述的每个扇形內为全純的函数，并且当 z 沿着任何一条不越出已知扇形的路徑而趋于 c_k 时，它趋于确定的异于零的极限．

現在假定用 $\Pi(z)$ 表示由公式

$$\Pi(z) = \prod_{k=1}^{n}(z-c_k)^{\lambda_k} \tag{78.8}$$

所确定的有理函数，其中 λ_k 表示适合条件

$$-1<\alpha_k+\lambda_k<1, \quad k=1, 2, \cdots, n \tag{78.9}$$

的整数．

現在容易看出，函数

$$X(z)=\Pi(z)e^{\gamma(z)}=e^{\gamma(z)}\prod_{k=1}^{n}(z-c_k)^{\lambda_k} \tag{78.10}$$

是典則解，或者更确切地說，它是典則解之一．实际上，显然，$X(z)$ 在 S 內处处都不取值零，并且由于不等式 (78.9)，它适合条件 (78.2)，(78.3)；又显然，边值 $X^+(t)$，$X^-(t)$ [它們的表示式在后面将要給出] 在曲綫 L 的普通点处都不等于零．

一般讲来，由条件(78.9) 还不能完全确定解 $X(z)$．亦就是，显然，只有在 α_k 是一个整数的情形下，和結点 c_k 对应的数 λ_k 才能唯一地确定；在这种情形下 $\lambda_k=-\alpha_k$．

我們把 α_k 是整数的結点 c_k 叫做特殊結点，而把其余的結点叫做普通結点．

对于普通結点，数 λ_k 可以被确定精确到仅差一个项 ±1，亦就是說，我們可以选取 λ_k，或者使得 $\alpha_k+\lambda_k<0$，或者使得 $\alpha_k+\lambda_k>0$．

由上所述，我們允許問題 (78.1) 的解在結点附近是无界的．但是，有时可以适当地要求使所要找的解在某些事先給定的普通結点[①] $c_1, c_2, \cdots, c_q$ 处都是有界的．

适合这个条件的解 $\Phi(z)$，我們将称它是 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的解．我們用 $h(0)$ 或者 h_0 表示对应于 $q=0$ 的解类．如果 m 是所有普通結点的个数，而用 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 表示所有这些結点，那么，我們有时用 h_m 表示 $h(c_1, c_2, \cdots, c_m)$ 类．h_0 类包含所有别的类，而 h_m 类則包含在所有别的类之中．

与此相应，我們商定好：对于每一解类，典則解可以精确确定

---

① 下面我們会見到，所有的解在特殊結点附近必然是有界的。

到差一个常数因子.

亦就是，我們把由公式 (78.10) 所确定的解 $X(z)$ 叫做 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$类的典則解，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_q$ 是已知的普通結点，在 (78.10) 中的整数 λ_k 这样选取：对于結点 $c_1, c_2, \cdots, c_q$，有 $\alpha_k+\lambda_k>0$，而对于所有别的普通結点有 $\alpha_k+\lambda_k<0$①，或者把每一个与 $X(z)$ 相差一个(不等于零的)常数因子的解叫做 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的典則解.

我們把由公式

$$\varkappa=-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \tag{78.11}$$

所确定的整数 $\varkappa$ 叫做已給的 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的指标.

容易驗証：只要所选定的函数值 $\ln G(t)$ 在构成 L 的各条弧 L_k 上是連續变化的，数 $\varkappa$ 便与函数 $\ln G(t)$ 之值的选擇无关②.

由 (78.10) 可以知道，$X(z)$ 在无穷远处有 $-\varkappa$ 阶，亦就是說，当 $\varkappa>0$ 时，它在那里具有 $\varkappa$ 阶的零点，或者当 $\varkappa<0$ 时，它在那里具有 $-\varkappa$ 阶的极点；而当 $\varkappa=0$ 时，則有 $X(\infty)=1$. 在所有各个情形下，都有

$$\lim_{z\to\infty} z^{\varkappa}X(z)=1. \tag{78.12}$$

4°. 我們来求典則解 $X(z)$ 的边值. 把 Сохоцкий-Plemelj 公式应用到积分 (78.5) 上，我們便得出

$$X^{+}(t_0)=e^{\frac{1}{2}\ln G(t_0)}\Pi(t_0)e^{\gamma(t_0)},\quad X^{-}(t_0)=e^{-\frac{1}{2}\ln G(t_0)}\Pi(t_0)e^{\gamma(t_0)}$$

或者

$$X^{+}(t_0)=\sqrt{G(t_0)}\,X(t_0),\quad X^{-}(t_0)=\frac{X(t_0)}{\sqrt{G(t_0)}}, \tag{78.13}$$

---

① 我們提醒一下，对于特殊結点，有 $\alpha_k+\lambda_k=0$.

② 如果把函数 $\ln G(t)$ 在构成 L 的任一条弧 L_j 上的值换成值 $\ln G(t)+2l\pi i$，其中 l 是整数，那么，正象公式 (78.6) 所說明的那样，应該把 $(-l)$ 加到对应于从那里引出 L_j 的結点之值 α_k 上，而把 $(+l)$ 加到对应于 L_j 在那里进入的結点之值 α_k 上. 其結果是在和式 (78.11) 的各个数 λ_k 中的一个换成了 λ_k+l，而另一个换成了 λ_k-l，于是这个和式保持不变.

其中

$$X(t_0)=\Pi(t_0)e^{\gamma(t_0)},\tag{78.14}$$

而出現在公式(78.13)中的根式的分枝是由公式

$$\sqrt{G(t_0)}=e^{\frac{1}{2}\ln G(t_0)}\tag{78.15}$$

确定的．根据公式(26.14)容易看出，

$$X(t_0)=\omega(t_0)\prod_{k=1}^{n}(t_0-c_k)^{\gamma_k},\tag{78.16}$$

其中 $\omega(t_0)$ 是 H_0 类中的函数，它在 L 上处处都不取值零，而

$$\gamma_k=\alpha_k+\lambda_k+i\beta_k.\tag{78.17}$$

这样一来，函数 $X(t_0)$ 在 L 上是属于 H^* 类的；它在結点 c_1, c_2, …, c_q 的邻域內是属于 H 类的，并且在这些結点处取值零．最后，在特殊結点的邻域內，它是属于 H_s^* 类的，并且保持有界．对于 $X^+(t_0)$, $X^-(t_0)$，亦显然有同样的結果．

5°. 假定 $X(z)$ 是已給的 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的典則解．显然，函数

$$\Phi(z)=X(z)P(z)\tag{78.18}$$

(其中 $P(z)$ 为任意的多項式)亦是已給类的解[①]．

反之，我們現在証明：已給类的每一个解，都由公式(78.18)通过选取适当的多項式 $P(z)$ 給出．

事实上，从关系式

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t),\quad X^+(t)=G(t)X^-(t)$$

可以知道，在 L 上

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}.$$

这个等式表明：如果让函数 $\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$ 在曲綫 L 上的普通点处取适当

① 我們指出，由已給类的解的定义，解 $\Phi(z)$ 属于 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 并不排斥这同一个解属于結点更多的 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q, c_{q+1}, \cdots)$ 类，对于已給类的典則解，这正相反：由定义本身，$h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的典則解在异于 $c_1, c_2, \cdots, c_q$ 的普通結点 c_{q+1}, …附近必然是无界的．

的值，那么，这个函数在全平面上，可能除了結点和无穷远点外，都是全純的．在結点附近，它可以变成是阶数小于 1 的无穷大，所以，結点是可去奇点．此外，又因为由所假定的条件，$\Phi(z)$ 在无穷远处有有限阶，因此，$\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$ 是多项式，于是，我們的結論得到了証明．

6°. 我們指出从 (78.18) 导出的一系列直接推論．首先，显然，因为从公式(78.7)，(78.10)以及条件 $\alpha_k+\lambda_k=0$ 导出，$X(z)$在所有的特殊結点附近是保持有界的，因此，齐次問題(78.1)的所有解 $\Phi(z)$ 在所有的特殊結点附近亦是保持有界的．

再者，如果解在已給的普通結点附近是保持有界的，那么，它在这个結点处必然取值零；解在普通結点处取值零应該理解为，当 z 沿着任意一条路徑趋近于結点时，它趋于零．事实上，如果 c 是确定典則解 $X(z)$ 的类的一个普通結点，那么，按照函数 $X(z)$ 本身的构造，它在 $z=c$ 处取值零．但是，如果 c 是别的普通結点，那么，为了保証 $\Phi(z)$在 c 附近的有界性，显然必須使多项式 $P(z)$ 含有因子$(z-c)$，由此显然，当 $z=c$ 时，$\Phi(z)=0$.

从(78.18)还可以知道，$\Phi(z)$ 在无穷远处的阶数等于 $-\varkappa+k$，其中 $\varkappa$ 是所考虑的类的指标，而 k 为多项式 $P(z)$ 的次数．因此，令 $P(z)=C=$常数$\neq 0$，我們就得出已給类的在无穷远处具有可能的最低阶的解．于是，已給类的解在无穷远处最低的可能阶数等于 $-\varkappa$；已給类所有具有这个阶数的解都由公式：

$$\Phi(z)=CX(z)$$

确定，亦就是說，所有这些解都是已給类的典則解．

从而，已給类的典則解亦可以定义为（在已給类中）在无穷远处阶数为最低的解．

由上述还可直接推出，已給的 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的典則解可以定义为这样的解：除了結点 $c_1, c_2, \cdots, c_q$，以及可能除了点 $z=\infty$ 外，它处处都不取值零，而在这些結点处它变为零，其阶数小于 1．

仍然假定所有普通結点的个数为 m，而 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 便是所有这些結点．前面我們曾經用 h_0 表示最一般的解类(亦就是，在所有普通結点处都不加任何补充条件的解类)；我們用 $X_0(z)$ 表示对应的典則解．我們得到在所有的普通端点处都取 $\alpha_k+\lambda_k<0$ 的函数 $X_0(z)$．这个函数 $X_0(z)$ 在平面的有限部分(包括結点在內)內处处都不取值零．

h_0 类的指标 $\varkappa_0$ 显然大于所有其他类的指标．

又显然，每一类 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 的典則解 $X(z)$ 和指标 $\varkappa$ 与 $X_0(z)$ 和 $\varkappa_0$ 由关系式

$$X(z)=C(z-c_1)(z-c_2)\cdots(z-c_q)X_0(z),\quad C=\text{常数}\neq 0,\quad \varkappa=\varkappa_0-q \tag{78.19}$$

联系．

$h(c_1, c_2, \cdots, c_m)$ 类是所有别的类的子类，如同上面一样，我們用 h_m 表示它；我們将用 $X_m(z)$ 和 $\varkappa_m$ 表示相应的典則解和指标．由上述結果，显然

$$X_m(z)=C(z-c_1)(z-c_2)\cdots(z-c_m)X_0(z),\quad C=\text{常数}\neq 0,\quad \varkappa_m=\varkappa_0-m. \tag{78.20}$$

注釋 容易算出所有类的总数；我們有一个 h_0 类，m 个 $h(c_j)$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ 类，$\frac{m(m-1)}{2!}$ 个 $h(c_j, c_k)$ 类等等，总共有

$$1+\frac{m}{1!}+\frac{m(m-1)}{2!}+\cdots+\frac{m}{1!}+1=2^m$$

个类．

§79．相联的齐次联結問題．相联的类

在討論上一节中的問題(78.1)的同时，我們討論問題

$$\Psi^+(t)=[G(t)]^{-1}\Psi^-(t)\quad \text{在 } L \text{ 上}, \tag{79.1}$$

我們把这个問題叫做問題(78.1)的相联問題．相联的問題的解之間存在着紧密的联系．如果引进**相联的解类**的概念，这种联系便

具有非常簡单的形式.

容易看出,由特殊結点和普通結点的定义本身,已給問題的特殊結点(普通結点)亦是相联問題的特殊結点(普通結点).

仍然假定 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 是(这两个相联的問題的)普通結点.我們把类

$$h=h(c_1, c_2, \cdots, c_q) \quad 与 \quad h'=h(c_{q+1}, c_{q+2}, \cdots, c_m)$$

叫做相联的类①.

根据已給类的指标和典則解的定义本身,容易看出,相联的問題在相联的类中的典則解 $X(z)$ 和 $X'(z)$ 之間由关系式

$$X'(z)=C[X(z)]^{-1} \tag{79.2}$$

相互联系着,而 h 类和 h' 类的指标 $\varkappa$ 和 $\varkappa'$ 之間由关系式

$$\varkappa'=-\varkappa \tag{79.3}$$

联系;C 表示异于零的任意常数,总可以认为它等于1.

§80. 一般情形下的非齐次联結問題

1°. 把 L 理解为任意一条逐段光滑曲綫,我們提出这个問題如下.

要求根据边界条件②:

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t) \quad 在 L 上, \tag{80.1}$$

找一个具有边界曲綫 L 的,并且在无穷远处有有限阶的分区全純函数,其中 $G(t)$ 和 $g(t)$ 都是給定在 L 上的 H_0 类的函数,并且在 L 上处处有 $G(t)\neq 0$.

我們仍然把函数 $G(t)$ 和 $g(t)$ 分别叫做这个問題的系数和自由項.

我們把齐次問題(78.1)对应的特殊結点和普通結点叫做特殊

① 用 $c_1, c_2, \cdots, c_q$ 表示某些普通結点,而用 $c_{q+1}, c_{q+2}, \cdots, c_m$ 表示所有别的普通結点.

② 不言而喻,在曲綫 L 的所有普通点处,都应該适合这个条件.

結点和普通結点．正如在上一节中所做的那样，我們把問題(80.1)的所有可能的解分成$h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$类，归进$h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$类的解在普通結点$c_1, c_2, \cdots, c_q$附近是有界的，而在其他普通結点和特殊結点附近，其性质不受任何限制(当然，在分区全純函数定义中所加的条件不在此列)．

我們現在找出非齐次問題(80.1)在已給的类$h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$中的解．假定$X(z)$是齐次問題(78.1)在这一类的典則解．我們把这个函数叫做問題(80.1)在已給类中的典則函数．注意到

$$G(t)=\frac{X^+(t)}{X^-(t)},$$

条件(80.1)可以改写成形式

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}-\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}=\frac{g(t)}{X^+(t)}. \qquad (80.2)$$

因为由所假定的条件，函数$\Phi(z)$在这些結点$c_1, c_2, \cdots, c_q$附近都保持是有界的，又在这些結点处$X(z)$取値于零，因此，在这些結点附近，我們有

$$\left|\frac{\Phi(z)}{X(z)}\right|<\frac{\text{常数}}{|z-c_j|^\alpha}, \quad \alpha<1;$$

又知道函数$\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$是分区全純函数，此外，它在无穷远处有有限阶．

于是，根据§31中的結果，我們得出，

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L\frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)}+X(z)P(z), \qquad (80.3)$$

其中$P(z)$是任意的多項式．它亦是非齐次問題(80.1)在已給类中的一般解．(80.3)中的第二項是对应的齐次問題在已給类中的一般解，而第一項則是原来非齐次問題的某个特解．

由§26, 3°段中所述結果可以知道，解(80.3)在結点$c_1, c_2, \cdots, c_q$附近确实是有界的．

根据§26中同样的結果又容易看出，解在特殊結点附近(在

(78.6)中数 β_k 等于零的結点可能除外)亦是保持有界的；在数 β_k 等于零的結点附近，解可能是无界的，但是它一定是几乎有界的(对数型的)①.

我們还指出，在現在的情形下，和齐次問題的情形下不同，在任一些普通結点附近是有界的解，一般讲来，它在那些結点处并不取值零.

2°. 从应用的观点来看，非常重要的是要找出非齐次問題(80.1)的在无穷远处取値零的解.

注意到，函数 $X(z)$ 在无穷远处的阶数恰好等于 $-\varkappa$，亦就是說，它恰好和 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的指标差一符号，根据 (80.3) 就容易得出下述結論：

当 $\varkappa \geqslant 0$ 时，已給类的在无穷远处取値零的解，由公式

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)}+X(z)P_{\varkappa-1}(z) \qquad (80.4)$$

給出，其中 $P_{\varkappa-1}(z)$ 为次数不超过 $\varkappa-1$ 的任意多项式(当 $\varkappa=0$ 时，$P_{\varkappa-1}(z)=0$).

当 $\varkappa<0$ 时，当且仅当适合条件：

$$\int_L \frac{t^j g(t)}{X^+(t)}\,dt=0, \quad j=0, 1, \cdots, -\varkappa-1 \qquad (80.5)$$

时，在已給类中才会有在无穷远处取値零的解. 条件 (80.5) 表明 $\Phi(\infty)=0$. 当适合条件(80.5)时，(唯一)解由同一个公式(80.4)給出，但是在(80.4)中 $P_{\varkappa-1}(z)=0$.

3°. 从 (80.4) 可以得出，当 $\varkappa>0$ 时，对应于問題 (80.1) 的齐次問題，亦就是，在問題(80.1)中取 $g(t)=0$ 而得出的問題，在已給的 h 类中恰好有 $\varkappa$ 个在无穷远处取値零的綫性无关解

$$X(z),\ zX(z),\ \cdots,\ z^{\varkappa-1}X(z); \qquad (80.6)$$

① 当 α_k 是整数(这表明是特殊結点)及 $\beta_k=0$ 时，函数 $X^+(t)$ 在 c_k 的邻域內是属于 H_0 类的。

当 $\varkappa\leqslant 0$ 时，这个問題在已給类中沒有在无穷远处取值零的非零解．

正象在第二章中那样，如果与两个联結問題对应的齐次問題是相联的，我們就說这两个联結問題是相联的．

依据上面以及在 § 79 中所述結果，和已給問題(80.1)相联的齐次問題，当 $\varkappa<0$ 时恰好有 $-\varkappa$ 个 h' 类(h 类的相联类)在无穷远处取值零的綫性无关解

$$\frac{1}{X(z)},\ \frac{z}{X(z)},\ \cdots,\ \frac{z^{-\varkappa-1}}{X(z)}. \tag{80.7}$$

把这些表示式和公式(80.5)作一比較，公式(80.5)便可以用下述条件来替代：

$$\int_L \psi_k^+(t)g(t)\,dt=0,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa, \tag{80.8}$$

其中 $\psi_k^+(t)$ 表示函数 $\psi_k(z)$ 的(从左侧而取的)边值($k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa$)，而这些函数 $\psi_k(z)$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa$ 构成已給問題(80.1)的相联齐次問題在 h' 类的綫性无关解(并且在无穷远处取值零)的完备系．

4°. 已給的 $h(c_1,\ c_2,\ \cdots,c_q)$ 类的一般解可以用与(80.3)略有不同的公式給出．假定 $X_1(z)$ 是 $h(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_q)$ 类中的任意一个子类 $h(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_q,\ c_{q+1},\ \cdots,\ c_r)$ 的典則函数．那么，函数

$$\Phi_1(z)=\frac{X_1(z)}{2\pi i}\int_L\frac{g(t)\,dt}{X_1^+(t)\,(t-z)}$$

是 $h(c_1,c_2,\cdots,c_q,c_{q+1},\cdots,c_r)$ 类的特解，同时又是 $h(c_1,c_2,\cdots,c_q)$ 类的特解．另一方面，显然，非齐次問題在 $h(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_q)$ 类中的一般解 $\Phi(z)$ 可以表成

$$\Phi(z)=\Phi_1(z)+\Psi(z)$$

的形式，其中 $\Phi_1(z)$ 是非齐次問題在这个类中的任一个特解，而 $\Psi(z)$ 是齐次問題在这个类中的一般解．因此，非齐次問題在 $h(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_q)$ 类中的一般解可以表成形式

$$\Phi(z)=\frac{X_1(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)\,dt}{X_1^+(t)(t-z)}+X(z)P(z), \quad (80.3a)$$

其中 $P(z)$ 是任意多項式，$X(z)$ 是齐次問題在 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中的典則解，而 $X_1(z)$ 是同一齐次問題在任意一个类 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q, c_{q+1}, \cdots, c_r)$[亦即，$h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的子类] 中的典則解. 特別是，总可以把 $h(c_1, c_2, \cdots, c_m)$ 类中的典則解 $X_m(z)$ 当作 $X_1(z)$.

5°. 在非齐次联結問題的提法中，我們仅允許函数 $G(t)$ 和 $g(t)$ 在結点处是間断的[①]这一事实并不失去一般性，因为我們可以把这些函数的間断点归并到結点之中，类似于在齐次問題的情形下一样.

但是，如果函数 $g(t)$ 在函数 $G(t)$ 不間断的点处有間断，那么，只要适当地把函数 $G(t)$ 的間断点归并到結点之中. 事实上，如果函数 $G(t)$ 在曲綫 L 的光滑部分之"結点"处是保持連續的，那么，这种"結点"对典則函数不发生任何影响. 同时問題的解的一些重要性质正好由典則函数确定，而典則函数本身由曲綫 L 及問題的系数 $G(t)$ 确定[②].

因此，在 $g(t)$ 的間断点旣不与曲綫本身形状所确定的結点重合，又不与函数 $G(t)$ 的間断点重合的情形下比較好，此时所进行的推导正好和 $g(t)$ 沒有这样的間断点的情形相仿. 其結果我們所得出的解正好是由上面同样的公式給出的. 区别仅在于在函数 $g(t)$ 的間断点 (这些点不与結点重合) 附近，解是 H_s^* 类的无界函数，亦就是，正好例如由公式 (80.3) 所表明的，解在那里是对数型的无界函数.

§81. 和联結問題有关的一些工作

1°. 在前面几节中所导出的齐次問題和非齐次問題的解法，

① 通常所讲的是第一类的間断点.

② 下列事实与此有关：在大多数可化为联結問題的数学物理問題中，曲綫 L 的形状及函数 $G(t)$ 与問題的类型有关，而函数 $g(t)$ 与这种或那种具体的特殊問題有关.

是著者在論文[6]中給出的，并且是在 Н. И. Мусхелишвили 及 Д. А. Квеселава 的論文[1]中作了重要补充后的解法不作任何原則性的修改而重复地写出的．在这两篇論文中，仅考慮了曲綫 L 是由一些光滑的不具有公共点的敞开弧所构成的情形(参看§83，1°段)，但是，这些論文中的推导和結果几乎可以逐字逐句移植到我們所討論的情形①，在上面几节中便是这样做的。

在上述第二篇論文所作的重要补充中，包括了解的 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的概念以及相联的类 h 和 h' 的概念的引进，这些概念在应用到奇异积分方程理論中会起着非常重要的作用(参看下一章)．

在著者的論文[6]中所用的方法是 T. Carlema[1] 用来研究一种特殊情形的方法之推广．亦就是，T. Carleman 在他那一篇論文中所考慮的情形是曲綫 L 为实軸上的一个綫段；此外，他亦仅仅考慮了对应的值(用現在的記号表示的) $\varkappa_0=1$ 的特例．不言而喻，T. Carleman 并沒有引进指标的概念以及解的类的概念．

Ф. Д. Гахов[3] 用了其他的方法，亦就是，利用了把函数 $G(t)$ 及 $g(t)$ 在 L 上具有第一类間断点的情形(参看§83，2°段)归結为 $G(t)$ 及 $g(t)$ 为連續函数的情形的方法，得出了联結問題在当 L 是一条簡单的光滑封閉圍綫，而函数 $G(t)$ 及 $g(t)$ 在 L 上具有第一类間断点的情形下的解②．Ф. Д. Гахов 在得出他原来的解时，并沒有参考 Н. И. Мусхелишвили 的論文[6]以及 Н. И. Мусхелишвили 和 Д. А. Квеселава 的論文[1]，而且在他原来的解法中并

① 唯一的、在一定程度上又是重要的区别在于：在此处我們利用了在§26中得出的有关 Cauchy 型积分在結点附近的性质的更一般結果，以代替在§22中得出的有关 Cauchy 型积分在端点附近的性质的結果．

② Ф. Д. Гахов 所用过的将問題归結为 $G(t)$ 及 $g(t)$ 是連續的情形的方法是 D. Hilbert 对齐次問題所指出过的方法的簡化(D. Hilbert[2]，第93頁)．J. Plemelj[2] 曾把类似的方法应用到若干个函数的齐次联結問題(其系数是分段常数的情形)上；亦参看第六章．

不包含在此处所指出的意义下的分类方法和相联的类的概念，后来，他利用了上述第二篇論文得到了补充.

Н. И. Мусхелишвили 的論文 [6] 以及 Н. И. Мусхелишвили 和 Д. А. Квеселава 的論文 [1] 中所得出的結果，后来在 W. J. Trjitzinsky（这一位著者仅熟悉上述第一篇論文）的論文 [1] 中以及在 Д. А. Квеселава 的論文[7] 中推广到了下述情形：L 是由一些光滑的封閉弧和光滑的敞开弧所构成的，并且这些弧彼此可以相交于有限个点的情形. 但是，这些著者的結果（特别是，第一位著者是用了非常煩瑣的方法才得出的）比之上述結果，要欠一般些而且更繁一些.

在 Ф. Д. Гахов 和 Л. И. Чибрикова 的論文[1] 中，对 Д. А. Квеселава 的上述結果作了一些簡化.

在 Т. Г. Гегелия 的論文[2] 中，用了和上述稍許不同的方法，討論了圍綫（不一定要求是光滑的）是相交的情形，在这一位著者所討論的情形中，交点的全体可以构成一个可列集合.

2°. 在 W. Pogorzelski 新近发表的論文[4] 和 [5] 中，亦考虑了和这里的提法大致相同的联結問題. 在这两篇論文中亦給出了解，但是，从已知的方面来看，解的性质比之我們这里要更明确些①.

在扩大边界条件中的自由項 $g(t)$ 以及所要找的解 $\Phi(z)$ 所容許的函数类的意义下，Б. В. Хведелидзе [6]~[8], [12]~[14], [18] 得出了更一般的結果. 虽然，这一位著者实际上仅討論了 L 是由一些沒有公共点的封閉的或者敞开的 Ляпунов 弧所构成的情形，但是，可以看出，不难把其結果推广到任意一条逐段光滑曲綫的情形（在要求构成 L 的各条光滑弧适合 Ляпунов 条件的前提下）. Б. В. Хведелидзе 所得出的主要結果如下所述：假定 (80.1) 中的系数

① 参照 § 26（那一节起首的脚注）. 应該指出，在 W. Pogorzelski 的論文中，还討論了某些要一般得多的非綫性的联結問題.

$G(t)$ 适合以前的条件，而自由項 $g(t)$ 是属于 $\mathfrak{L}_p(\rho; L)$ 类的①，此处 $p>1$，而 $\rho(t)$ 是形式为(27.3)的某个函数．此外，又假定要求未知函数 $\Phi(z)$ 可以用展布在曲綫 L 上的、而密度是属于 $\mathfrak{L}_p(\rho; L)$ 类的 Cauchy 型积分表出．在这些条件下，联結問題(在无穷远处有有限阶)的所有解，都由公式(80.3)給出．由此可以直接导出如次之結論：如果在联結問題 (80.1) 中，函数 $G(t)$ 和 $g(t)$ 都是属于 H_0 类的，那么，这个問題的所有可以用展布在 L 上、而密度是属于 $\mathfrak{L}_p(\rho; L)$ 类的 Cauchy 型积分表出的解，都是分区全純函数．

3° 在最近几年所发表的一系列論文中，在对边界条件中的系数 $G(t)$ 加了較少的限制下，給出了联結問題解的推广．也在这个方向上，Ф. Д. Гахов 在他早期的論文 [1]，[2] 中討論了系数 $G(t)$ 在有限个点处取值零或者在有限个点附近是幂次型的无穷大量的情形．后来，Л. А. Чикин[1]，Б. В. Хведелидзе[18]和 И. М. Мельник[1]~[3] 用了各不相同的方法对这种情形作了更进一步的研究．在 Б. В. Хведелидзе 和 И. М. Мельник 的論文中，还都討論了 $G(t)$ 具有对数型无穷大量的情形． 还要早一些时候 (但在 Ф. Д. Гахов 之后)，Н. П. Векуа[18] 研究了 $G(t)$ 可以取值零，又可以具有阶数小于 1 的无穷大的情形．

在 В. В. Иванов 的論文[4] 中，И. Б. Симоненко 的論文[1] 中，Г. Ф. Манджавидзе 及 Б. В. Хведелидзе 的論文[1] 中以及在 Б. В. Хведелидзе 的論文[19]中，都把函数 $G(t)$ 适合 H 条件的要求换成了要求它仅是連續的条件．

4° 利用更一般的边界条件亦可以把联結問題加以推广．例如，在边界条件中不仅可以包含分区全純函数的边值，并且还可以包含这个函数的导函数的边值．在目前已經有人研究了这种形式的下列边值問題：

要求根据边界条件

① 参看 § 27．

$$\sum_{k=0}^{m}\left[A_k(t_0)\Phi^{(k)+}(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L R_k(t_0,\ t)\Phi^{(k)+}(t)dt\right]$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\left[B_k(t_0)\Phi^{(k)-}(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L S_k(t_0,\ t)\Phi^{(k)-}(t)dt\right]=g(t_0)$$

$$\text{在}\ L\ \text{上},\qquad (81.1)$$

找一个在无穷远处有有限阶的分区全純函数$\Phi(z)$，其中L是簡单的、封閉的光滑圍綫，$A_k(t)$，$B_k(t)$，$g(t)$都是适合H条件的已給函数，$S_k(t_0,\ t)$，$R_k(t_0,\ t)$是下列形式的已知函数：

$$S_k(t_0,\ t)=\frac{S_k^0(t_0,\ t)}{|t-t_0|^\alpha},\quad R_k(t_0,\ t)=\frac{R_k^0(t_0,\ t)}{|t-t_0|^\alpha},\quad 0\leqslant\alpha=\text{常数}<1,$$

并且$S_k^0(t_0,\ t)$和$R_k^0(t_0,\ t)$都适合H条件.用$\Phi^{(k)+}(t_0)$以及$\Phi^{(k)-}(t_0)$表示未知函数$\Phi(z)$的k阶导函数的边值.

Л. Г. Магнарадзе[2]首先研究了这个問題在$R_k(t_0,t)=S_k(t_0,t)=0$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$的情形.

后来，Ю. М. Крикунов[1]~[3]，接着Р. С. Исаханов[1],[2]都指出了：利用И. Н. Векуа用来求解問題V的方法(在本书第三章中已叙述过)的推广，可以研究問題(81.1).

还要提到Н. П. Векуа的論文[29]，在这一篇論文中，研究了問題(81.1)当圍綫都是敞开的，且$R_k(t_0,\ t)=S_k(t_0,\ t)=0$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ p$的情形.

5°. 在另一个方向上的推广是：在問題的边界条件中，未知的分区全純函数(在更一般的情形下，也有它的导函数)的边值不是在同一个边界点上而是在两个不同的边界点(它們之間由确定的关系式联系)上联結. 关于这样的推广，参看书末的附录四.

6°. 亦可以討論联結問題在$G(t)$和$g(t)$是属于某些代数函数域内的多值函数的情形(А. В. Месис[1]，[2])以及所要找的解是自守函数的情形(Ф. Д. Гахов 和 Л. И. Чибрикова[2]，Л. И. Чибрикова[2]).

§ 82．給定在 L 上的函数的 h 类的概念．某些推广

1°．在前面几节中，我們曾經对联結問題的解 $\Phi(z)$ 引进了 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的概念．对于給定在 L 上的函数 $\varphi(t)$ 来讲，我們亦可以引进在今后非常重要的类似的概念．

仍然假定 $c_1, c_2, \cdots, c_m (m\leqslant n)$ 表示已給的联結問題[亦就是指問題(78.1)或者(80.1)]所对应的全部普通結点；这些結点完全由 L 上的已知函数 $G(t)$ 来确定．

假定 $\varphi(t)$ 是一个給定在 L 上并且属于 H^* 类的函数．当函数 $\varphi(t)$ 在結点 $c_1, c_2, \cdots, c_q (q\leqslant m)$ 的邻域內是属于 H_0 类的，而在其余的結点（特殊結点或者普通結点）处对 $\varphi(t)$ 不作任何补充条件时，我們就說 $\varphi(t)$ 是属于 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的函数．

我們把 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类和 $h(c_{q+1}, c_{q+2}, \cdots, c_m)$ 类叫做是相联的类．我們用 h_0 表示对应于 $q=0$ 的类，而用 h_m 則表示 $h(c_1, c_2, \cdots, c_m)$ 类．

这样一来，我們可以把同一个記号应用到不同形式的函数上：作为联結問題的解的分区全純函数 $\Phi(z)$ 和在 L 上的 H^* 类的函数 $\varphi(t)$．但是，这并不致于引起混淆．

2°．我們已經看到过，齐次联結問題包含所有各类解的最一般的解，可以写成

$$\Phi(z)=X_0(z)P(z) \tag{82.1}$$

的形式，其中 $X_0(z)$ 是 h_0 类的典則解，而 $P(z)$ 是多項式．由此直接可以导出：齐次問題的每一个在任一結点 c 附近是几乎有界的解（§ 77, 3° 段），在这个結点附近必然是有界的；如果結点 c 是普通結点，那么，在 c 附近是几乎有界的解必然在 c 处取值零．

再者，根据在 § 80, 4° 段中所述，非齐次联結問題的每一个解都可以写成下述形式：

$$\Phi(z)=\frac{X_m(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)\,dt}{X_m^+(t)(t-z)}+X_0(z)P(z), \quad (82.2)$$

此处,正象通常那样,$X_m(z)$ 是 $h(c_1, c_2, \cdots, c_m)$ 类的典則函数,而 $X_0(z)$ 是 h_0 类的典則函数.

由 § 26 中的結果可以知道,第一項在所有的普通結点附近都是有界的.因此,容易得出結論:非齐次問題的每一个在任意普通結点 c 处是几乎有界的解,必然在这一个結点附近是有界的[①].

这样一来,在定义联結問題解的 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类时,我們可以把解在結点 $c_1, c_2, \cdots, c_q$ 附近的有界性要求,换成解在那些結点附近是几乎有界的要求,而結果并不因此受到影响.这个注釋对于我們是有用的,因为它能保証一系列叙述的統一性.

3°. 直到現在为止,我們都假定了,在非齐次問題的边界条件(80.1)中的自由項 $g(t)$ 是属于 H_0 类的.我們現在假定函数 $g(t)$ 是属于 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的,其中 $c_1, c_2, \cdots, c_q$ 是已給的普通結点(参看本节 1° 段).容易看出,問題(80.1)的属于同一个 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的解,都由当 $g(t)$ 属于 H_0 类时的同一个公式給出;亦就是一般解由公式(80.3)給出,在无穷远处取値零的解由公式(80.4)給出,存在 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的在无穷远处取値零的解的充分和必要条件由同一个公式(80.5)給出.

我們指出,解在特殊結点附近現在可以是阶数小于1的任意阶的无穷大量,这个阶数与函数 $g(t)$ 在这些結点附近的性质是有关的;而特别是,如果 $g(t)$ 在已給的特殊結点附近是属于 H_s^* 类的,那么,解在这个結点附近是几乎有界的.

§ 83. 重要的特殊情形.边界是无穷长直綫的情形

在实际应用中,最經常遇到的是下列特殊情形:曲綫 L 是由一

① 事实上,如果 c 是这一个結点,又若解在 c 附近是几乎有界的,那么,必然有 $P(c)=0$,从而,$P(z)$ 包含因式 $(z-c)$.

些沒有公共点(包括端点在內)的光滑敞开弧所构成的，亦就是，L 是一条断續的光滑曲綫的情形和 L 是由一些沒有公共点的、簡单的封閉圍綫所构成的情形． 当然，在前面几节中所导出的一般性公式可以直接应用到这一些情形．在这里我們对典則函数的作法作一些补充的注釋，并且重新来推导某些公式．

1°. 断續的光滑曲綫的情形．

假定 $L=L_1+L_2+\cdots+L_p$ 是由一些沒有公共点(包括端点在內)的簡单的、光滑敞开弧 $L_k=a_kb_k$, $k=1, 2, \cdots, p$ 所构成，我們曾經把这样的曲綫叫做断續的光滑曲綫(§ 77)．

我們假定函数 $G(t)$ 及 $g(t)$ 在 L 上都是属于 H 类的，亦就是說，它們在这些(閉的)弧 L_k 的每一条上都是适合 H 条件的．

由已給的函数 $G(t)$ (亦象在一般情形下那样)可以确定特殊結点和普通結点(在目前的情形下，它們都是端点)．在我們的情形下，給出数 $\alpha_k+i\beta_k$ 的公式是公式(78.6)的特殊情形：

$$\alpha_k+i\beta_k=\frac{\mp\ln G(c_k)}{2\pi i}, \quad k=1, 2, \cdots, 2p, \tag{83.1}$$

其中对点 $c_k=a_j$ 取上面的符号，对点 $c_k=b_j$ 取下面的符号．

如果 α_k 是整数(或者是零)，亦就是，如果 $G(c_k)$ 是实的正数，那么，端点 c_k 就是特殊結点；在相反的情形下，这个端点是普通結点．

假定 $c_1, c_2, \cdots, c_m (m\leqslant 2p)$ 是所有的普通端点． 那么，$h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的典則函数 $X(z)$ 由公式

$$X(z)=e^{\gamma(z)}\prod_{k=1}^{2p}(z-c_k)^{\lambda_k} \tag{83.2}$$

給出，其中 λ_k 是这样的整数，使

$$\left.\begin{array}{ll}0<\alpha_k+\lambda_k<1, & \text{当 } k=1, 2, \cdots, q \text{ 时}, \\ -1<\alpha_k+\lambda_k<0, & \text{当 } k=q+1, \cdots, m \text{ 时}, \\ \alpha_k+\lambda_k=0, & \text{对特殊結点},\end{array}\right\} \tag{83.3}$$

而由公式(78.5)可以定出 $\gamma(z)$ 为

$$\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(t)}{t-z}\,dt. \tag{83.4}$$

由公式

$$\varkappa=-\sum_{k=1}^{2p}\lambda_k \tag{83.5}$$

給出 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的指标 $\varkappa$,其中 λ_k 由公式(83.3)确定.

容易看出,在函数 $G(t)$ 在每一条弧 L_k 上(包括角点在内)是属于 H 类的条件下,已导出的公式不作任何变更,便可以应用于当弧 $L_k=a_kb_k$ 都是簡单的、逐段光滑的敞开弧的情形(亦可参看2° 段末尾的注釋).

2°. 簡单的封閉圍綫的情形①.

現在假定 L 是一条簡单的、封閉的逐段光滑圍綫(参看图 18).曲綫 L 的"結点"是它的角点以及函数 $G(t)$ 在曲綫 L 的光滑部分上的(有限个第一类的)間断点(因为我們不允許有别的間断点). 此外,为了方便起見,我們还可以把任何别的点(共有有限个)归入結点.

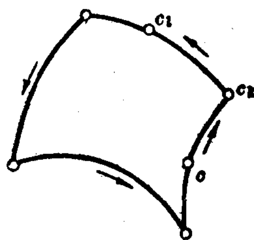


图 18

正象在一般情形(§§78 及 80)那样,我們可以假定函数 $G(t)$ 及 $g(t)$ 在 L 上都是属于 H_0 类的.

L 上的正方向可以这样来选取,使得由曲綫 L 分割平面而得出的两个区域中的每一个总是保持在 L 的同一側(左側或者右側).

假定 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是所有的結点,按任意的次序标上号碼.

根据公式(78.6),在我們的情形下,有

$$\begin{aligned}\alpha_k+i\beta_k&=\frac{1}{2\pi i}[\ln G(c_k-0)-\ln G(c_k+0)]\\&=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)},\end{aligned} \tag{83.6}$$

① 推广到几条封閉圍綫的情形并沒有什么困难.

其中用 $G(c_k-0)$ 及 $G(c_k+0)$ 有条件地表示，当 t 在 L 上从正方向及負方向趋于 c_k 时，$G(t)$ 分别取得的极限，或者有

$$\alpha_k=\frac{1}{2\pi}\arg\frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)},\quad \beta_k=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|G(c_k-0)|}{|G(c_k+0)|};\tag{83.7}$$

我們規定

$$\arg\frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)}=\arg G_k(c_k-0)-\arg G_k(c_k+0),$$

并且把 $\arg G(t)$ 理解为 $\ln G(t)$ 选定的值之虚部．

在我們的情形下，对于特殊結点（亦就是，α_k 是整数的結点），比值

$$\frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)}\tag{83.8}$$

是实的正数．

特别是，函数 $G(t)$ 是連續的所有結点（亦包括角点在内），亦就是 $G(c_k+0)=G(c_k-0)$ 的結点，都是特殊結点；对于后一种結点另外还可以有 $\beta_k=0$．

假定 $c_1, c_2, \cdots, c_m (m\leqslant n)$ 是所有的普通結点．通过适当地选取数 λ_k，由公式(78.10)給出 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类 $(q\leqslant m)$ 的典則函数 $X(z)$．在我們的情形下，通过适当地选取函数 $\ln G(t)$ 在曲綫 L 的各段上的值，可以大大地簡化这个公式；亦就是，为了实現这一点，可以让所有的数 λ_k 除了一个外都等于零．

事实上，假定 c 是曲綫 L 上的任一点，函数 $G(t)$ 在那一点处是連續的（如果在結点之中有几个这样的点，那么，就可以选取其中的一个点当作 c）．我們把点 c 算作曲綫 L 的結点．

选定任一个确定的值当作 $\ln G(c+0)$ 以后，我們可以从点 c 出发沿着正方向移动点 t，同时連續地改变 $\ln G(t)$ 的值，一直到还未达到第一个結点 c_k 为止；在这种情形下我們得出 $\ln G(c_k-0)$

完全确定的值①. 而在經过点 c_k 时,我們根据下列規律来选定 $\ln G(c_k+0)$ 的值:

$$\left.\begin{aligned} 0<\alpha_k=\frac{1}{2\pi}\arg\frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)}<1 \quad &\text{对 } k=1,\ 2,\ \cdots,\ q,\\ -1<\alpha_k=\frac{1}{2\pi}\arg\frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)}<0 \quad &\text{对其余的普通結点},\\ \alpha_k=\frac{1}{2\pi}\arg\frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)}=0 \quad &\text{对特殊結点}. \end{aligned}\right\} \tag{83.9}$$

如果 t 在 L 上沿着正方向再继續移动,又若 t 在經过所遇到的結点时,按照剛才所提到的規律选定 $\ln G(t)$ 的值,那么,当返回到起始点 c 时,在曲綫 L 的所有各段(它們是由 L 用点 c_k 和 c 分成的)上,我們都得出这个函数完全确定的值.

最后,我們令

$$\begin{aligned} \varkappa &= \frac{1}{2\pi}\left[\ln G(c-0)-\ln G(c+0)\right]=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln G(t)\right]_L \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\arg G(t)\right]_L, \end{aligned} \tag{83.10}$$

其中記号$[\quad]_L$ 表示括号內的表示式繞着整个圍綫沿着正方向一周的增量[并且遵守上面所指出的規律(83.9)]. 显然, $\varkappa$ 是整数.

为了得出 $h(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_q)$ 类的典則函数 $X(z)$, 我們利用公式(78.10),就我們的情形来讲,公式(78.10)可以改写成

$$X(z)=(z-c)^{\lambda}(z-c_1)^{\lambda_1}\cdots(z-c_n)^{\lambda_n}e^{\gamma(z)},$$

这是因为我們曾把点 c 归入結点; 正象数 λ_k 对应于結点 c_k 那样,用 λ 表示对应于結点 c 的整数.

其次, 显然, 由于已根据 (83.9) 选定了数 α_k, 我們应該令 $\lambda_k=0,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$. 对应于結点 c 的数 α(正象数 α_k 对应于結点 c_k 那样)由公式

$$\alpha=\frac{1}{2\pi}\left[\arg G(c-0)-\arg G(c+0)\right]$$

① 当 t 从 c 沿着正方向而趋于 c_k 时, $\ln G(t)$ 之极限定义为 $\ln G(c_k-0)$. ——譯者注

給出；因此，$\lambda=-\varkappa$.

于是，对于 $X(z)$，我們有下述簡单的公式：

$$X(z)=(z-c)^{-\varkappa}e^{\gamma(z)}, \tag{83.11}$$

这里根据公式(78.5)，有

$$\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(t)}{t-z}\,dt, \tag{83.12}$$

幷且 $\ln G(t)$ 的值是根据上述规律选取的.

上面所引进的整数 $\varkappa$，显然就是已給的 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的指标.

特别是，如果函数 $G(t)$ 是在 L 上属于 H 类(而不仅是属于 L 上的 H_0 类)的，那么，所有的"結点"(亦包括角点在内)都是特殊結点. 在这种情形下，$\ln G(t)$ 应該理解为在整个圍綫 L(点 c 应从 L 上除去)上是連續的任意一个值.

在§35(注釋2)中，我們已經就 L 是一条簡单的光滑圍綫，而函数 $G(t)$ 在 L 上是适合 H 条件的情形推导了公式(35.19)；这个公式正好与公式(83.11)是一致的，幷且这样一来，我們看出，角点的存在幷不变更結果.

公式(35.19)等价于公式(35.6A)或者(35.6B)是与在 L 上所选定的正方向有关的.

容易看出，公式(83.11)可以用与公式(35.6A)或者(35.6B)完全类似的公式替代，而这是与在 L 上所选定的正方向有关的. 亦就是説，如果，正如在§35，2°段中那样，我們用 S^+ 及 S^- 表示平面的下列两部分：当在 L 上沿着正方向移动时，这两部分 S^+ 与 S^- 分别保持在 L 的左侧及右侧，幷且我們把区域 S^+ 是有界的情形叫做情形 A，而把区域 S^+ 是无界的情形叫做情形 B，那么，对于已給类 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 的典則函数 $X(z)$，我們有表示式：

$$X(z)=\begin{cases} e^{\Gamma(z)}, & \text{当 } z\in S^+ \\ (z-a)^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)} & \text{当 } z\in S^- \end{cases} \text{在情形 A}, \tag{83.13A}$$

$$X(z)=\begin{cases}(z-a)^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)} & \text{当 } z\in S^+\\ e^{\Gamma(z)} & \text{当 } z\in S^-\end{cases}\text{在情形 B,}\qquad (83.13\text{B})$$

其中 a 是在圍綫 L 内部任意选取的定点,而

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln G_0(t)dt}{t-z},\qquad (83.14)$$

并且

$$\begin{aligned}G_0(t)&=(t-a)^{-\varkappa}G(t)\ \text{在情形 A,}\\ G_0(t)&=(t-a)^{\varkappa}G(t)\ \ \text{在情形 B.}\end{aligned}\qquad (83.15)$$

这些公式正好和在 § 35, 2° 段中导出的公式有同样的形式. 只需对 $\ln G_0(t)$ 的値的选法作一些重要的补充. 这就是說, 在我們的情形下,我們应該規定

$$\ln G_0(t)=\mp\varkappa\ln(t-a)+\ln G(t),\qquad (83.16)$$

其中 $\ln G(t)$ 应当根据前面引出的規律(由公式(83.9)表出的)确定,并且在事先可以选取曲綫 L 上的任意一个普通点当作点 c,又其中的 $\ln(t-a)$ 我們理解为在圍綫 L(L 上的点 c 除外)上是連續变化的任意一个値; 对应于情形 A 取上面的符号, 对应于情形 B 取下面的符号.

正好象我們在 § 35(注釋 2)中从公式(35.6A), (35.6B)轉到公式 (35.19) 上那样, 把从已导出的那些公式轉到公式 (83.11) 上, 我們便可以确信这些公式的正确性. 利用在 § 35, 2° 段所讲过的方法(經过明显的补充,这个补充留給讀者来做[①]),我們亦可以直接导出公式(83.13A), (83.13B).

注釋 1 在联結問題

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t)\qquad (*)$$

的提法中, 我們放弃了下述要求: 在結点处亦适合上述边界条件; 这样的要求在一般情形下甚至是无意义的, 因为在 c 是一般形式的結点的情形下, 从左側及从右側而取得的边値 $\Phi^+(c)$ 及 $\Phi^-(c)$

① 在本书第一版 (§ 85) 中曾經給出过这样的推导. 但是, 在这里我們从推导公式(83.11)入手,这只是为了說明,它直接可以从一般情形下的公式导出.

的概念是无意义的．

但是，如果給定的結点是角点，亦就是説，在这一个結点处仅集中了两条光滑弧的端点，那么，正象在光滑曲綫的情形下那样，在这一个結点处从左側及从右側而取得的边值当然是完全确定的；只要这样来規定在給定的点处有公共端点的弧的正方向：这些弧中有一条是从那一个点引出的，而另一条則是进入那一个点的．

在这种情形下，与 Сохоцкий-Plemelj 公式类似的公式是成立的；这些公式将在本书末尾附录二中給出．利用这些公式容易証明：如果函数 $G(t)$ 和 $g(t)$ 在角点的邻域內是属于 H 类的，又若象通常那样，$G(t)\neq 0$，那么，前面我們所作出的齐次和非齐次联結問題的解在角点处亦是适合边界条件(*)的．

在这里我們不再讲到它的（非常簡单的）証明，因为在以后我們幷不利用上述的命題．

3°. 把上面所得出的結果移植到边界曲綫是无穷长直綫 D 的情形，幷沒有什么困难．最簡单的方法是象在 § 38 中那样，我們把这种情形归結为边界曲綫是圓周 L 的情形；我們在这里仍然沿用那一节中的記号．

除了利用变换 $(z+i)=-(\zeta+i)^{-1}$ 可以直接移植到我們的情形的那些定义外，我們幷不需要再給出任何新的定义．特别是，如果我們把直綫 D 上的无穷远点当作結点，那么，我們在結点附近对分区全純函数 $\Phi(z)$ 的性质所加的条件，成为在无穷远結点处的条件：对很大的 $|z|$，有

$$|\Phi(z)|<\text{常数}\cdot|z|^{\alpha},\quad \alpha=\text{常数}<1. \tag{83.17}$$

把特殊結点和普通結点（現在可以把无穷远点算作其中的一种点）的概念，定义在边界曲綫上的函数类的概念（§ 82）移植到我們的情形，这是非常显然的，我們不需再停留在这里．

我們还指出，在此处利用公式(38.11)时，我們将把它写成这个公式第一行的形式，亦就是写成形式：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)d\tau}{\tau-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{z+i}{t+i}\,\frac{f(t)dt}{t-z}$$

$$=\frac{z+i}{2\pi i}\int_D \frac{f(t)}{t+i}\,\frac{dt}{t-z}, \qquad (83.18)$$

因为在我們的情形下，我們可能遇到函数 $f(t)$ 在 $t=\pm\infty$ 处具有間断性的情形，因此公式(38.11)第二行的积分(甚至在主値意义下)可能会失去意义.

由于和 § 38 中及本节前一段中所讲过的几乎完全类似，我們仅对最后公式的推导作某些注釋.

我們假定，对于結点 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ (无穷远点可以是这些結点之一)，函数 $G(t)$ 及 $g(t)$ 在 D 上都是属于 H_0 类的，又假定 $G(t)$ 在 D 上处处都不取值于零.

假定 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 是所有的普通結点. 在直綫 D 上取定任一个异于結点的点当作起始点 c，并且从 c 出发沿着 D 到 $+\infty$，再从 $-\infty$ 出发沿着 D 到 c，根据公式 (83.9)，我們就可以选定 $\ln G(t)$ 的値①. 如果无穷远点算作結点，那么，对于这一点，$G(c_k-0)$ 及 $G(c_k+0)$ 应該分別理解为 $G(+\infty)$ 及 $G(-\infty)$. $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的指标由公式

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_D \qquad (83.19)$$

确定，其中 $[\ln G(t)]_D$ 应該理解为 $\ln G(t)$ 在直綫 D 上沿着上述繞法的增量②.

在这些条件下，$h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中的典則函数由下述公式确定到差一个异于零的任意因子:

$$X(z)=\begin{cases} e^{\Gamma(z)} & \text{当 } z\in S^+, \\ \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^{\varkappa} e^{\Gamma(z)} & \text{当 } z\in S^-, \end{cases} \qquad (83.20)$$

---

① 参看本节末尾的注釋.

② 参看本节末尾的注釋.

其中

$$\Gamma(z)=\frac{z+i}{2\pi i}\int_{D}\frac{\ln G_{0}(t)\,dt}{(t+i)(t-z)},$$
$$G_{0}(t)=\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa}G(t),\tag{83.21}$$

并且把

$$\ln G_{0}(t)=\varkappa\ln\frac{t+i}{t-i}+\ln G(t)$$

应該理解为我們用下法得出的值：根据上面所述規律确定 $\ln G(t)$，而把 $\ln\frac{t+i}{t-i}$ 理解为在 D 上（包括无穷远点在内）除了点 c 外都是連續变化的任意一个分枝．

联結問題的 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的一般解，由公式

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{D}\frac{z+i}{t+i}\,\frac{g(t)\,dt}{X^{+}(t)(t-z)}+X(z)Q(z)\tag{83.22}$$

給出，其中 $Q(z)$ 是形式为

$$Q(z)=C_{0}+C_{1}\frac{z-i}{z+i}+\cdots+C_{l}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{l}\tag{83.23}$$

的多項式，$C_1, C_2, \cdots, C_l$ 表示一些任意常数．

当 $\varkappa\geqslant-1$ 时，总存在可能除了結点 $c_{q+1}, \cdots, c_m$ 以及特殊結点[①]的邻域外处处都是有界的解；当 $l=\varkappa$ 时，这些解由公式(83.22)給出；如果 $\varkappa=-1$，那么，应該規定 $Q(z)=0$．

当 $\varkappa<-1$ 时，仅当适合条件

$$\int_{D}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{k}\frac{g(t)\,dt}{X^{+}(t)(t+i)^{2}}=0,\quad k=0, 1, \cdots, -\varkappa-2\tag{83.24}$$

时，才有这样的解存在；当适合这些条件时，由公式 (83.22) 取 $Q(z)=0$ 就可以給出（唯一）解．

注釋 2 如果无穷远点不是間断点，亦就是說，假若 $G(-\infty)=G(+\infty)$，$g(-\infty)=g(+\infty)$，那么，上述公式在外表形式上和連續系数的情形（§ 38）是相同的．

---

① 在特殊結点的邻域内，每一个解都是几乎有界的．

事实上，如果无穷远点不是結点，那么，我們可以把它取作起始点 c，并且从 $t=-\infty$ 沿着直綫 D 移动到 $t=+\infty$. 此时，我們有

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_{-\infty}^{+\infty}, \tag{83.19a}$$

这时 $\ln G(t)$ 的值应該根据上述的規律选取.

再者，函数 $\ln G_0(t)$ 在无穷远点的邻域内是适合 H 条件的，因此，我們可以写出

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{\ln G_0(t)\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{\ln G_0(t)\,dt}{t+i},$$

这是因为后面两个积分(在 Cauchy 主值意义下)都是存在的. 如果把后一个(常数)项丢去，我們在公式(83.20)中就可以規定

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{\ln G_0(t)}{t-z}\,dt; \tag{83.21a}$$

这仅使 $X(z)$ 改变一个异于零的常数因子.

这样一来，我們得出形式上和公式(38.2)，(38.12)及(38.13)完全相同的一些公式.

类似地，在我們的情形下，公式(83.22)可以写成和公式(38.14)同样的形式.

如果函数 $g(t)$ 在无穷远处有間断，亦就是說，假若 $g(-\infty)\neq g(+\infty)$，那么，上面所讲过的，除了后一段所讲的外，显然仍然都是有效的.

§84. 便于构造典則函数的一个方法

1°. 利用下列事实①有时可以大大地簡化典則函数的計算，在§35中我們曾經把这个事实应用于 L 由一些光滑的封閉圍綫构成的特殊情形.

亦就是說，假定我們已把逐段光滑曲綫 L 分成一些彼此沒有

① 参照 W. J. Trjitzinsky [1].

公共結点（函数 $G(t)$ 所有的間断点亦算作結点）的也是逐段光滑的曲綫 $L_1, L_2, \cdots, L_p$，又假定 $X_k(z)$ 是确定的类的典則函数，并且它是在边界曲綫仅由 L_k 构成的假定下作出的．那么，容易看出（和 §35，4° 段作比較），函数

$$X(z)=X_1(z)X_2(z)\cdots X_p(z), \tag{84.1}$$

在边界曲綫为 L 时，是确定的类的典則函数．

亦显然，为了得出已給类的典則函数 $X(z)$，我們应該适当地选擇典則函数 $X_1(z)$，$X_2(z)$，$\cdots$，$X_p(z)$ 的类．

利用上面所指出的事实，例如，再利用在上一节 2° 段中所給出的在 L 为一条簡单的逐段光滑圍綫情形下的解，我們便容易得出当 L 由一些（有限条）沒有公共点的簡单的、封閉的逐段光滑圍綫构成的情形下的典則函数．

用同样的方法我們亦容易作出当 L 由有限条沒有公共点的封閉圍綫以及敞开弧构成的情形下的典則函数．为此只需要利用在上一节 1°，2° 两段中所給出的公式就够了．

2°．如果，与所采用的条件正相反，我們把曲綫 L 分成若干有某些公共結点的逐段光滑部分 $L_1, L_2, \cdots, L_p$，那么，可以看出，由公式 (84.1) 所确定的函数 $X(z)$ 在某些結点 $c_1, c_2, \cdots, c_l$ 的邻域内并不适合条件 (78.2)，(78.3)，因此，这个函数并不是典則函数．但是，显然总可以选取整数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l$，使得函数

$$(z-c_1)^{\lambda_1}(z-c_2)^{\lambda_2}\cdots(z-c_l)^{\lambda_l}X(z)$$

是典則函数．

这样一来，在曲綫 $L_1, L_2, \cdots, L_p$ 具有某些公共結点的情形下，我們仍然可以利用上面所讲过的方法．

II. 一般情形下的 Cauchy 型积分的反演問題

在这一部分中，我們給出 Cauchy 型积分反演問題在一般情

形下，亦就是，在积分路徑为任意一条逐段光滑曲綫的情形下的解，以作为前面所得出結果的最簡单的一种应用．另一方面，后面所得出的結果是当积分路徑为实軸上一个綫段时的 Cauchy 型积分反演問題已知結果的推广，亦就是說，它是和求解积分方程

$$\int_{-a}^{a} \frac{\varphi(x)\,dx}{x-x_0} = f(x_0)$$

有关的結果的推广，其中 $f(x)$ 是实变量 x 的已知函数，而 $\varphi(x)$ 是实变量 x 的未知函数．

这个方程是最簡单的一个奇异方程，它在薄机翼面理論中起着重要的作用，并且由于这个緣故，很多著者曾經研究过它①．

在著者的論文[6]中給出了当积分曲綫不是仅由一个直綫段构成的②，而是由（有限条）光滑的敞开弧构成的更一般情形的解，亦就是，給出了积分路徑是一条断續的光滑曲綫的情形的解；这个解将在 §§ 86～88 中导出．

后来，在 W. J. Trjitzinsky 的論文[1]中，給出了对于积分路徑自身可以相交并且有角点的情形的推广，可是，这位著者所給出的結果既是很复杂的，又不能认为是完整的；但是，如果利用上一部分所讲过的結果，那么，几乎沒有任何困难，我們就可以得出既是完整的，又是特别簡单的解来（参看 § 90）．

正如我們曾經看到过的那样，找反演問題的解可以归結为找一个最簡单的联結問題的解，我們将从研究后一个問題来入手研究．为了更明显起見，我們先討論积分路徑为断續的光滑曲綫的

① 例如参考 K. Schröder [1], H. Söhngen [1], [2], J. Weissinger [1], F. Tricomi [3], K. Nickel [2], J. Elliott [1].

② H. Söhngen（用了非常复杂的方法）还給出了在积分路徑由实軸上两个綫段所构成的情形下的解．在 K. Nickel 的論文[2]中，給出了积分路徑是由实軸上有限条綫段所构成的情形下的另一个解．

在 Н. И. Ахиезер 的論文[1]中，从很一般的角度討論了：在积分路徑是由有限条或者可列条直綫所构成的情形下，Cauchy 型积分的反演問題．在 С. А. Фрейдкин 的論文[1]中亦討論了可列条直綫段的情形．

情形,再由这种情形过渡到一般情形.

§ 85. 在断續的光滑边界曲綫情形下問題 $\Phi^+ + \Phi^- = g$ 的解

1°. 剛才所讲到的問題的解提供了我們立刻解决 Cauchy 型积分反演問題的可能性，它是联結問題当系数 $G(t) = -1$ 时的特殊情形.

这样一来,我們的問題在于:要求根据边界条件

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = g(t) \quad \text{在 } L \text{ 上}, \tag{85.1}$$

确定一个在无穷远处有有限阶的分区全純函数 $\Phi(z)$，其中 $g(t)$ 是給定在 L 上的函数. 在此处以及在以后各节中（直到 § 88 为止）；我們将假定：L 是一条光滑的断續曲綫，亦就是說，L 是由一些沒有公共点的光滑的敞开弧 $L_k = a_k b_k (k = 1, 2, \cdots, p)$ 构成的；正象通常那样，我們将认为在 L_k 上的正方向是由 a_k 到 b_k 所指的方向.

今后，我們将用 $c_1, c_2, \cdots, c_{2p}$ 表示端点 a_k, b_k 按任一种次序排列的結果.

我們用 S 表示沿着 L 而割开的平面.

根据 § 78 或者 § 83，1° 段中的一般性公式，我們立可得出已給类的典則函数，亦就是，可以得出齐次联結問題：

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = 0 \quad \text{在 } L \text{ 上} \tag{85.2}$$

已給类的典則解；有关的計算（是非常簡单的）建議讀者自己来完成（这种計算在 § 89 中对于一般情形将要进行），我們指出，通过直接驗算可以証明，下述公式給出 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的典則函数：

$$X(z) = C\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}} = C\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}, \tag{85.3}$$

其中 C 是任意取定的异于零的常数，

$$R_1(z) = \prod_{k=1}^{q}(z - c_k), \quad R_2(z) = \prod_{k=q+1}^{2p}(z - c_k), \tag{85.4}$$

而根式

$$\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}} \tag{*}$$

应該理解为在 S 內(亦就是，在沿着 L 而割开的平面上)是全純的任一个分枝.

因为，我們常常会遇到这样的根式，因此，我們一劳永逸地作如下的規定：**我們把上述的根式总是理解为在 S 內为全純的一个分枝，它在无穷远点的邻域內按 z 的降冪排列的展开式具有形式**

$$\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}=z^{q-p}+A_1z^{q-p-1}+A_2z^{q-p-2}+\cdots. \tag{85.5}$$

根式$\sqrt{R_1(z)}$和$\sqrt{R_2(z)}$我們仅在比值

$$\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}},\quad \frac{\sqrt{R_2(z)}}{\sqrt{R_1(z)}} \tag{**}$$

中才遇到它們. 这些比值中的第一个我們总是理解为和根式 (*) 是相同的，而第二个比值則理解为根式(*)的倒数. 最后，我們将簡单地用

$$\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}\ \text{或者}\ \frac{\sqrt{R_1(t)}}{\sqrt{R_2(t)}}$$

表示根式(*)从 L 的左側而取得的边值，于是，根据定义有

$$\left[\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}\right]^+=\left[\frac{\sqrt{R_1(t)}}{\sqrt{R_2(t)}}\right]^+=\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}=\frac{\sqrt{R_1(t)}}{\sqrt{R_2(t)}}; \tag{85.6}$$

再者，显然

$$\left[\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}\right]^-=-\left[\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}\right]^+=-\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}. \tag{85.7}$$

从 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的典則解的表示式 (85.3)，可以知道，这个类的指标

$$\varkappa=p-q, \tag{85.8}$$

这是由于 $X(z)$ 在无穷远处的阶数等于 $q-p$. 又显然，**所有結点**(在我們的情形下，它們皆为端点)**都是普通結点**.

最大的类 h_0 的典則函数显然是($q=0$)

$$X_0(z)=\frac{C}{\sqrt{R(z)}}, \tag{85.9}$$

其中 C 是常数，而

$$R(z)=\prod_{k=1}^{2p}(z-c_k)=\prod_{j=1}^{p}(z-a_j)(z-b_j); \tag{85.10}$$

h_0 类的指标

$$\varkappa_0=p. \tag{85.11}$$

最小的类 $h_{2p}=h(c_1, c_2, \cdots, c_{2p})$ 的典则函数 $X_{2p}(z)$ 是

$$X_{2p}(z)=C\sqrt{R(z)}, \tag{85.12}$$

而对应的指标

$$\varkappa_{2p}=-p. \tag{85.13}$$

如果 $q=p$，那么，与这个 q 对应的类之指标等于零．$h(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ 类的解

$$X_a(z)=C\frac{\sqrt{R_a(z)}}{\sqrt{R_b(z)}}, \tag{85.14}$$

是指标为零的典则函数之实例，其中 C 是常数，而

$$R_a(z)=\prod_{k=1}^{p}(z-a_k),\qquad R_b(z)=\prod_{k=1}^{p}(z-b_k). \tag{85.15}$$

2°. 按照前面所述，再根据§80中的結果，非齐次問題(85.1)的在无穷远处有有限阶的 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的一般解，由公式

$$\Phi(z)=\frac{\sqrt{R_1(z)}}{2\pi i\sqrt{R_2(z)}}\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}\,g(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-z)}+\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}Q(z) \tag{85.16}$$

給出，其中 $Q(z)$ 是任意多項式．

但是，对 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的在无穷远处取值零的解，我們可以得出下述結果：

当 $\varkappa=p-q\geqslant 0$ 时，$h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的在无穷远处取值零的解总是存在的，并且由公式

$$\Phi(z)=\frac{\sqrt{R_1(z)}}{2\pi i\sqrt{R_2(z)}}\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}\,g(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-z)}+\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}\,Q_{p-q-1}(z) \tag{85.17}$$

給出，其中 $Q_{p-q-1}(z)$ 是次数不超过 $p-q-1$ 的任意多項式(当 $p=q$ 时，$Q_{p-q-1}(z)=0$).

当 $\varkappa=p-q<0$ 时，当且仅当 $g(t)$ 适合条件

$$\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}\,t^k g(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}}=0,\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ q-p-1 \tag{85.18}$$

时，在 $h(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_q)$ 类中才存在在无穷远处取值零的解；并且解唯一地由公式 (85.17) 取 $Q_{p-q-1}(z)=0$ 而給出.

注釋 1 依据 § 80, 4° 段，已給类的一般解可以用与 (85.16) 略为不同的公式給出．例如，h_0 类的在无穷远处取值零的一般解显然可以表成如下的形式：

$$\Phi(z)=\frac{\sqrt{R_1(z)}}{2\pi i\sqrt{R_2(z)}}\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}\,g(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-z)}+\frac{Q_{p-1}(z)}{\sqrt{R(z)}}, \tag{85.19}$$

其中 $R_1(z)$, $R_2(z)$ 及 $R(z)$ 与在公式 (85.4), (85.10) 中所表示的一样，并且現在为了保証适合条件 $\Phi(\infty)=0$ 起見，应該假定 $q\leqslant p$.

注釋 2 容易看出(与 §83, 2° 段末尾的注釋 2 作一比較)，如果构成 L 的各条弧 $L_k=a_kb_k$ 具有有限多个角点，亦就是說，它們是一些沒有公共点(包括端点在内)的、簡单的、光滑的敞开弧，那么，上面所有的結果和公式都仍然是有效的.

注釋 3 容易看出(参看 § 82)，当已知函数 $g(t)$ 是属于 $h(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_q)$类时，已得出的結果都仍然是有效的.

§86. 在光滑的断續的积分路徑情形下 Cauchy 型积分的反演公式

1°. 我們給自己提出的任务是求解奇异积分方程

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0) \quad 在\ L\ 上, \tag{86.1}$$

其中 $L=L_1+L_2+\cdots+L_p$ 是一些沒有公共点的光滑敞开弧的全体，正如在 §85 中那样，$f(t)$ 是 L 上点 t 的已知函数，而 $\varphi(t)$ 是 L 上点 t 的未知函数．我們将假定 $f(t)$ 是属于 H 类的，而未知函数 $\varphi(t)$ 則是属于 H^* 类的．

我們假定，条件 (86.1) 应該对 L 上所有的点 t_0 (端点可能除外)都是适合的．

方程(86.1)是在下面第五章中我們将要仔細地研究的一类奇异积分方程的特殊情形．在这里我們单独地討論它，是因为它本身意义重大(参看这一部分的引言)，而且它的理論比之一般情形要簡单得多．

我們討論在无穷远处取值零的分区全純函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \tag{86.2}$$

那么

$$\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{86.3}$$

从而，方程(86.1)与問題

$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=f(t) \quad 在\ L\ 上 \tag{86.4}$$

在补充条件 $\Phi(\infty)=0$ 下是等价的．

在找出 $\Phi(z)$ 之后，我們又可以根据公式

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t) \tag{86.5}$$

来确定 $\varphi(t)$．

在上一节中我們已經解决了問題 (86.4)，它在无穷远处取值

零的最一般的解(亦就是，h_0 类的解)，可以写成下述形式(参看§85，注釋1)：

$$\Phi(z)=\frac{\sqrt{R_1(z)}}{2\pi i\sqrt{R_2(z)}}\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}f(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-z)}+\frac{Q_{p-1}(z)}{\sqrt{R(z)}},\tag{86.6}$$

其中

$$R_1(z)=\prod_{k=1}^{q}(z-c_k),\quad R_2(z)=\prod_{k=q+1}^{2p}(z-c_k),$$
$$R(z)=\prod_{k=1}^{p}(z-a_k)(z-b_k)=R_1(z)R_2(z),\tag{86.7}$$

并且 $q\leqslant p$.

但是，根据公式(86.5)，我們得出原来积分方程的一般解 $\varphi(t)$. 回想起公式(85.7)，并且应用 Сохоцкий–Plemelj 公式(16.4)，我們就得出

$$\varphi(t_0)=\frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\pi i\sqrt{R_2(t_0)}}\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}f(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-t_0)}+\frac{P_{p-1}(t_0)}{\sqrt{R(t_0)}}.\tag{86.8}$$

从上面这些公式可以得出方程(86.1)的解的下列性质：**如果积分方程(86.1)的任一个(H^*类的)解在任何端点 c_j 的邻域內是保持有界的，那么，它在那一个端点处必然取値零，并且在那一个端点的邻域內是属于 H 类的.**

实际上，常常可以认为 $z-c_j$ 是 $R_1(z)$ 中的一个因式. 但是，此时根据§22中所得出的結果，右端第一項在 c_j 的邻域內是属于 H 类的，并且它在 $t_0=c_j$ 处取値零[①]. 再者，因为，由所設的条件，函数 $\varphi(t_0)$ 在 c_j 附近是有界的，因此，多項式 $P_{p-1}(t_0)$ 必然为 (t_0-c_j) 所除尽；作了这些分析以后，我們的結論便变成显然的了.

仿照我們把联結問題的解分成类那样，我們可以把方程(86.1)的解亦分成类，在端点 $c_1, c_2, \cdots, c_q$ 附近保持有界的所有解归进

① 这是从公式(22.8)取 $\gamma=\frac{1}{2}$ 而导出的.

$h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$类；我們已經看到，类$h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$的解在这些端点的邻域內一定是属于H类的(并且在这些端点处取值零)；因此，現在的$h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$类的定义与§82中的定义是一致的.

我們的目的是要找出方程(86.1)在已給类$h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$中的所有解. 从前述显然，由这个类的每一个解$\varphi(t)$，根据公式(86.2)，对应于联結問題(86.4)在同一类中的解$\Phi(z)$；反之，由联結問題在$h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$类中的每一个解$\Phi(z)$，根据公式(86.5)，可以对应地得出方程(86.1)在同一类中的解.

現在根据§85中的結果，我們容易得出下述結論：

当$\varkappa=p-q\geqslant 0$时，方程(86.1)总存在$h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$类的解，并且这种解由公式

$$\varphi(t_0)=\frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\pi i\sqrt{R_2(t_0)}}\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}f(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-t_0)}+\frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\sqrt{R_2(t_0)}}P_{p-q-1}(t_0) \tag{86.9}$$

給出，其中$P_{p-q-1}(t_0)$是次数不超过$p-q-1$的任意多項式(当$p=q$时，这个多項式等于零).

当$\varkappa=p-q<0$时，当且仅当$f(t)$适合条件

$$\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}\,t^kf(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}}=0,\quad k=0,1,\cdots,q-p-1 \tag{86.10}$$

时，才存在$h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$类的(唯一的)解；如果适合这些条件，則解由同一个公式(86.9)取定$P_{p-q-1}(t_0)=0$而給出.

所得出的結果(86.9)可以叫做是出現在(86.1)左端的**积分的反演公式.**

我們特別要注意对应于$h(a_1, a_2, \cdots, a_p)$类的反演公式；在这种情形下，利用§85中的記号[公式(85.15)]，我們有

$$\varphi(t_0)=\frac{\sqrt{R_a(t_0)}}{\pi i\sqrt{R_b(t_0)}}\int_L\frac{\sqrt{R_b(t)}\,f(t)\,dt}{\sqrt{R_a(t)}\,(t-t_0)}. \tag{86.11}$$

容易看出，如果假定函数$f(t)$不屬于H类，而是屬于$h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$类的，那么，上面的所有結果都仍然是有效的，而解要在同一类中来找(与 § 82, 3° 段作一比較).

补充一点，在不久以前发表的 W. Pogorzelski 的論文 [3] 中，在稍为一般的假定下，証明了上面推导出的公式的正确性.

2°. 在最近发表的一系列論文中：K. Nickel [2], F. Tricomi [3], H. Söhngen [2]，以及在某些較早以前发表的論文中，在有关曲綫 L 的各种特殊假定下，在可积函数类的某些子类中得出了公式(86.8). 在这个方向上，最近在 Б. В. Хведелидзе 的論文[11], [18]中，在 L 是断續的 Ляпунов 曲綫的情形下，得出了更一般的結果. 从这位著者的結果直接可以导出，如果方程(86.1)的右端$f(t)$是屬于 H^* 类的，那么，这个方程的每一个解在 L 上每一个不包含端点的閉的部分上都是連續的，而在整个曲綫 L 上是 $p(p>1)$ 次可积的，又是屬于 H^* 类的.

§ 87. 在断續的光滑的积分路徑情形下反演問題的某些变形①

我們已經看到，一般地讲来，方程(86.1)在所有的端点附近都保持有界的解是不存在的. 但是，不难証明，方程

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0)+P(t_0) \quad 在 L 上 \tag{87.1}$$

总有且仅有一个处处都是有界的解，其中$f(t_0)$是 H 类的已知函数，而$P(t_0)$是事先并未給定的，次数不超过 $p-1$ 的多項式；同时多項式 $P(t_0)$ 亦是完全确定的.

我們提醒一下，依据上一节中所述結果，处处都是有界的解必然是屬于 H 类的.

---

① 在 Б. В. Хведелидзе 的論文[18]中，給出了这一节中的結果对更广的函数类的推广.

我們首先証明：如果解存在，那么，它必然是唯一的．这个命題可以归結为下述命題：如果

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=P(t_0), \tag{87.2}$$

其中 $\varphi(t)$ 是 H 类中的函数，而 $P(t)$ 是次数不超过 $p-1$ 的多項式，那么，必然有 $\varphi(t)=0,\ P(t)=0$.

我們来証明后面一个命題．如果方程(87.2)存在 H 类的解，那么，例如，它应該由公式(86.11)

$$\varphi(t_0)=\frac{\sqrt{R_a(t_0)}}{\pi i\sqrt{R_b(t_0)}}\int_L \frac{\sqrt{R_b(t)}\,P(t)\,dt}{\sqrt{R_a(t)}\,(t-t_0)} \tag{87.3}$$

給出，因为这个公式不仅給出 H 类的所有解，而且亦給出 H^* 类的在端点 a_j 处为有界的解．容易算出下列积分的有限形式：

$$J(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\sqrt{R_b(t)}}{\sqrt{R_a(t)}}\,\frac{P(t)\,dt}{t-t_0}.$$

事实上，我們令

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\sqrt{R_b(t)}\,P(t)\,dt}{\sqrt{R_a(t)}\,(t-z)},$$

其中 z 表示不位在 L 上的点．那么，显然 $J(t_0)=\Omega^+(t_0)+\Omega^-(t_0)$.

另一方面，明显地，

$$\Omega(z)=\frac{1}{4\pi i}\int_\Lambda \frac{\sqrt{R_b(t)}\,P(t)\,dt}{\sqrt{R_a(t)}\,(t-z)},$$

其中 Λ 表示 p 条簡单的封閉圍綫 Λ_k 的全体，Λ_k 包圍着弧 L_k，Λ_k 的正方向是逆时針方向，并且把 Λ_k 取得和 L_k 如此接近，以致使点 z 位在每一条圍綫 Λ_k 之外(参看图 19).

应用 Cauchy 留数定理[①]，我們立可得出

---

① 我們用到由 Cauchy 留数定理直接导出的下述簡单公式：如果函数 $f(z)$ 在由平面上圍綫 Λ_k 外的点所构成的区域內是全純的，并且可以連續拓展到这些圍綫上，又若当 $|z|$ 很大时，$f(z)=P(z)+O(z^{-1})$，其中 $P(z)$ 是多項式，那么，当 z 位在圍綫 Λ_k 外面时，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda \frac{f(t)\,dt}{t-z}=f(z)-P(z).$$

$$\Omega(z)=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R_b(z)}}{\sqrt{R_a(z)}}P(z)+\frac{1}{2}P^*(z),$$

其中 $P^*(z)$ 是某个 $p-1$ 次的多項式[①]，

于是，最后可以得出

$$J(t_0)=\Omega^+(t_0)+\Omega^-(t_0)=P^*(t_0),$$

再依据公式(87.3)，得出

$$\varphi(t_0)=\frac{\sqrt{R_a(t_0)}}{\sqrt{R_b(t_0)}}P^*(t_0).$$

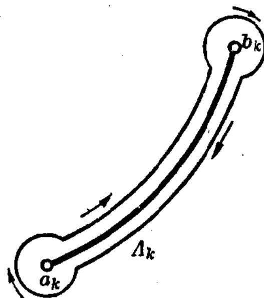


图 19

但是，因为由假定的条件，函数 $\varphi(t)$ 在端点 b_k 处亦应該是有界的，因此，$P^*(b_k)=0$, $k=1, 2, \cdots, p$, 由此可以得出，$P^*(t_0)=0$，而因此 $\varphi(t_0)=0$.

現在通过直接在公式(87.1)中进行代换容易驗証，問題(87.1)属于 H 类的(唯一)解由公式

$$\varphi(t_0)=\frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi i}\int_L\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}\,(t-t_0)} \tag{87.4}$$

給出，其中和过去同样地有

$$R(z)=\prod_{j=1}^{p}(z-a_j)(z-b_j),\quad \sqrt{R(t)}=[\sqrt{R(t)}]^+;$$

同时我們要找出多項式 $P(t)$ 确定的表示式.

为此目的，令

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \tag{87.5}$$

其中我們把 $\varphi(t)$ 理解为由公式 (87.4) 确定的表示式；那么，通过适当的驗証，公式(87.1)具有形式：

$$\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0)=f(t_0)+P(t_0), \tag{87.6}$$

其中 $P(t_0)$ 为次数不超过 $p-1$ 的某个多項式.

为了要計算 $\Phi(z)$，我們再令

---

① 对很大的 $|z|$，这个多項式由下述条件确定：

$$\frac{\sqrt{R_b(z)}}{\sqrt{R_a(z)}}P(z)+P^*(z)=O\left(\frac{1}{z}\right).$$

$$\Psi(z)=\frac{\sqrt{R(z)}}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}(t-z)}. \tag{87.7}$$

显然，根据公式(87.7)及(87.4)，我們有

$$\varphi(t)=\Psi^+(t)-\Psi^-(t),$$

并且由此容易看出，

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda\frac{\Psi(t)\,dt}{t-z},$$

其中 Λ 所表示的和前面一样．用由(87.7)而得出的值来替代 $\Psi(t)$，我們有

$$\begin{aligned}\Phi(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda\frac{\sqrt{R(t)}\,dt}{t-z}\,\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t_1)\,dt_1}{\sqrt{R(t_1)}\,(t_1-t)}\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t_1)\,dt_1}{\sqrt{R(t_1)}}\,\frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda\frac{\sqrt{R(t)}\,dt}{(t-z)\,(t_1-t)}.\end{aligned} \tag{87.8}$$

现在对里面的积分应用 Cauchy 留数定理，我們直接得出①

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda\frac{\sqrt{R(t)}\,dt}{(t-z)\,(t_1-t)}=\frac{\sqrt{R(z)}}{t_1-z}+Q(z,\ t_1), \tag{87.9}$$

其中 $Q(z,\ t)$ 表示 $p-1$ 次的多項式，对于很大的 $|z|$，它由条件

$$\frac{\sqrt{R(z)}}{z-t}=Q(z,\ t)+O\left(\frac{1}{z}\right)$$

确定．

多項式 $Q(z,\ t)$ 可以这样来确定：假定 $Q(z)$ 表示 p 次多項式，当 $|z|$ 很大时，由条件

$$\sqrt{R(z)}=Q(z)+O\left(\frac{1}{z}\right) \tag{87.10}$$

确定；那么，显然

$$Q(z,\ t)=\frac{Q(z)-Q(t)}{z-t}. \tag{87.11}$$

把(87.9)代入(87.8)之中，最后，我們得出

① 与384頁脚注作一比較；我們回想起，z 位在圖綫 Λ_k 的外面，而 t_1 則是位在这些圖綫之一的內部．

$$\Phi(z)=\frac{\sqrt{R(z)}}{2\pi i}\int_L \frac{f(t_1)dt_1}{\sqrt{R(t_1)}(t_1-z)}+\frac{1}{2}P(z),$$

其中 $P(z)$ 表示次数不超过 $p-1$ 的确定的多項式，亦就是，

$$P(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(t)Q(z,\ t)dt}{\sqrt{R(t)}}. \tag{87.12}$$

从 $\Phi(z)$ 的上述表示式直接知道，条件(87.6)是滿足的.

这样一来，便証明了我們的結論；我們同时又得出了多項式 $P(z)$ 的确定的表示式(87.12).

利用后一个表示式便可以建立（在§86中对更一般的情形曾經用了与这里不相同的方法）方程

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=f(t_0)$$

在所有端点处都是有界的解存在的充分和必要条件；我們仍然假定 $f(t)$ 是属于 H 类的.

这个条件显然在于使得

$$\int_L \frac{f(t)Q(z,\ t)dt}{\sqrt{R(t)}}\equiv 0, \tag{87.13}$$

其中

$$Q(z,\ t)=Q_0(t)z^{p-1}+Q_1(t)z^{p-2}+\cdots+Q_{p-1}(t),$$

而 $Q_k(t)$ 是一些确定的多項式，根据(87.10)及(87.11)容易求出这些多項式. 特別是，显然，$Q_0(t)=1$，又一般讲来，多項式 $Q_k(t)$ 的最高次項等于 t^k. 由此可以知道，函数組 $Q_0(t), Q_1(t), \cdots, Q_{p-1}(t)$ 与函数組 $1, t, t^2, \cdots, t^{p-1}$ 在下述意义下是等价的：这两組函数中一組函数的每一个函数是另一組函数的綫性組合.

条件(87.13)显然等价于 p 个条件：

$$\int_L \frac{Q_k(t)f(t)dt}{\sqrt{R(t)}}=0,\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ p-1,$$

或者，依据剛才所述結果，这个条件等价于 p 个更簡单形式的条件：

$$\int_L \frac{t^k f(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}=0, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ p-1. \tag{87.14}$$

我們已經指出过，这个結果是在§86中用另外的方法所得出的結果的特殊情形．

我們特別注意 $p=1$ 的特殊情形．在这种情形下，多項式 $P(t)$ 变成了常量，我們就有下述結果．

假定要找的是在敞开弧 ab 上的 H 类函数 $\varphi(t)$ 和常数 C，使得下述等式成立：

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0)+C, \tag{87.15}$$

其中 $f(t)$ 是給定在 ab 上的 H 类函数．

那么，（唯一）解由公式

$$\varphi(t_0)=\frac{\sqrt{(t_0-a)(t_0-b)}}{\pi i}\int_{ab}\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}\,(t-t_0)}, \tag{87.16}$$

$$C=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}} \tag{87.17}$$

給出．

§88．續

上一节中的問題(87.15)是同一节中問題(87.1)的一个特殊情形．第一个問題可以在別的方向上加以推广，亦就是，求解这样的問題：

要求根据条件

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_0}\,dt=f(t_0)+C_k, \quad 当\ t_0\in L_k,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ p, \tag{88.1}$$

来找 H 类的函数 $\varphi(t)$ 和一些常数 C_k，其中 $f(t)$ 是 H 类中的已知函数．

我們首先証明，这个問題不可能有一个以上的解，亦就是說，如果

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=C_k,\quad 当 t_0\in L_k,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ p,\tag{88.2}$$

那么，必然有 $\varphi(t)=0$, $C_k=0$. 实际上，假定 $\varphi(t)$ 适合上述条件. 我們令

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}.\tag{88.3}$$

根据(88.2)，在 L_k 上我們有 $\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0)=C_k$，亦就是說，

$$\Phi^+(t_0)-\frac{C_k}{2}=-\left[\Phi^-(t_0)-\frac{C_k}{2}\right],$$

由此显然可以知道，函数

$$\Psi(z)=\sqrt{(z-a_k)\,(z-b_k)}\left[\Phi(z)-\frac{C_k}{2}\right]$$

在弧 L_k 的某个邻域内（包括这一条弧本身在内）是全純的，并且在点 a_k, b_k 处取値零. 于是 $\Psi(z)=(z-a_k)(z-b_k)\Psi_0(z)$，其中 $\Psi_0(z)$ 在弧 L_k 的某个邻域内是全純的. 这样一来，在 L_k 附近

$$\Phi(z)-\frac{C_k}{2}=\sqrt{(z-a_k)\,(z-b_k)}\,\Psi_0(z),$$

因此，

$$\Phi'(z)=\frac{\Omega(z)}{\sqrt{(z-a_k)\,(z-b_k)}},$$

其中 $\Omega(z)$在 L_k 的某个邻域内是全純的. 从上述可以知道，函数

$$\Phi'(z)\sqrt{R(z)}=P(z)$$

在全平面上是全純的. 又因为当 $|z|$ 很大时，有 $P(z)=O(z^{p-2})$，因此，$P(z)$ 是次数不超过 $p-2$ 的多項式. 这样一来，我們得出 $\Phi(z)$ 的表示式

$$\Phi(z)=\int_\infty^z \frac{P(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}},\tag{88.4}$$

其中积分是展布在任意一条和 L 不相交的路徑上的. 此外，我們

又知道，函数 $\Phi(z)$ 在沿着 L 而割开的全平面上是全純的（因而它亦是单值的）．由此可以作出結論：$\Phi(z)=0$.

事实上，注意到函数 $\Phi(z)$ 在已割开的平面上的单值性，从表达式(88.4)容易得出，$\Phi(z)$ 在端点 a_k 和 b_k 处取完全确定的有限值 $\Phi(a_k)$ 和 $\Phi(b_k)$，并且如果 Λ_k 表示包圍弧 L_k，而且是与弧 L_k 无限制地靠近的封閉圍綫，它的正方向是反时針方向，那么，有

$$0=\int_{\Lambda_k}\frac{P(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}=2\int_{L}\frac{P(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}=2[\Phi(b_k)-\Phi(a_k)],$$

因此，如果令

$$\Phi(z)=u+iv,$$

那么，必然会有 $u(a_k)=u(b_k)$，$v(a_k)=v(b_k)$．其次，我們討論积分

$$J=\int_{\Lambda}u\,dv,$$

其中 Λ 表示圍綫 Λ_k 的全体．于是，显然有

$$J=\int_{L}(u^{+}dv^{+}-u^{-}dv^{-}).$$

但是，从关系式 $\Phi^{+}+\Phi^{-}=C_k=\alpha_k+i\beta_k$ 可以导出

$$u^{+}+u^{-}=\alpha_k,\quad dv^{-}=-dv^{+},$$

因此

$$J=\int_{L}(u^{+}+u^{-})\,dv^{+}=\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\int_{L_k}dv^{+}=\sum_{k=1}^{p}\alpha_k[v(b_k)-v(a_k)]=0.$$

另一方面

$$J=\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy,$$

其中的二重积分是展布在整个已割开的全平面上的．因此，可以得出結論：$\Phi(z)=u+iv=0$．于是，必然有 $\varphi(t)=0$，至此我們的結論便得到了証明．

我們現在回到討論問題(88.1)的求解．上一节中的公式(87.14)給出了能保証方程(88.1)允許有 H 类的解时，常数 C_k 所应該滿足的充分和必要条件．这些条件可以写成

$$\sum_{k=1}^{p} a_{jk}C_k + A_j = 0 \quad (j=0, 1, \cdots, p-1), \qquad (88.5)$$

其中

$$a_{jk} = \int_{L_k} \frac{t^j dt}{\sqrt{R(t)}}, \quad A_j = \int_L \frac{t^j f(t)}{\sqrt{R(t)}} dt. \qquad (88.6)$$

矩陣$\|a_{jk}\|$的行列式异于零，因为否则，从(88.5)取$f(t)=0$而得出的齐次方程組可以有非零解 $C_1, C_2, \cdots, C_p$, 这就意味着，問題(88.2)有非零解，但这是不可能的.

因此，方程組 (88.5) 总有确定的解. 这个解显然具有下述的形式:

$$C_k = \int_L \frac{\omega_k(t) f(t) dt}{\sqrt{R(t)}}, \qquad (88.7)$$

其中 $\omega_k(t)$ 都是次数不超过 $p-1$ 的确定的多項式，它們的系数仅与曲綫 L 的形状有关①；容易看出，多項式 $\omega_k(t)$ 是綫性无关的.

常数 C_k 确定以后，我們可以根据上一节中的公式(87.4)求出函数 $\varphi(t)$，在現在的情形下，这个函数由下式給出:

$$\varphi(t_0) = \frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{\sqrt{R(t)}(t-t_0)} + \frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi i} \sum_{k=1}^{p} C_k \int_{L_k} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}(t-t_0)}, \qquad (88.8)$$

其中 C_k 应該理解为表示式(88.7).

把这些表示式代入(88.8)，我們得出反演公式②:

$$\varphi(t_0) = \frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{\sqrt{R(t)}} \left\{ \frac{1}{t-t_0} + \sum_{k=1}^{p} \omega_k(t) \int_{L_k} \frac{d\tau}{\sqrt{R(\tau)}(\tau-t_0)} \right\} dt. \qquad (88.9)$$

我們看出，正如所預料的那样，函数 $\varphi(t)$ 在所有端点处都取

① 更确切地讲，从拓扑学的观点来看它們的系数仅与端点 a_k, b_k 的位置以及弧 L_k 的相对位置有关；换句話說，当弧 L_k 发生任何連續的变形时，只要它的端点保持不动，并且保証各条弧彼此不相交，多項式 $\omega_k(t)$ 就保持不变.

② Н. П. Векуа [1] 曾經独立地得出过一个本质上与(88.9)相同的公式.

値零．

在 $p=1$ 的情形下，容易直接驗証，我們得出上一节的公式(87.16)，(87.17)．

§89．在一般情形下問題 $\Phi^{+}+\Phi^{-}=g$ 的求解

1°．現在我們轉向把 §§85，86 中的結果推广到 L 是任意一条逐段光滑曲綫的情形，我們从求解在 $G(t)=-1$ 的情形下的联結問題入手，亦就是，从求解問題

$$\Phi^{+}(t)+\Phi^{-}(t)=g(t) \quad 在\ L\ 上 \tag{89.1}$$

入手，其中 $g(t)$ 是 H_0 类中的已知函数．

我們引进下述临时性的記号（我們在推导中要用到这些記号，但是它們并不出現在最終的公式內）．我們用

$$L_k=a_kb_k, \quad k=1, 2, \cdots, N$$

表示构成逐段光滑曲綫 L 的（除了端点以外）沒有公共点的簡单的敞开弧．

曲綫 L 的結点按照任意次序排列后，用 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 来表示它們．点 a_k, b_l 中的每一个必与点 c_j 中的一个是重合的，并且同一个点 c_j 可以与 a_k, b_l 中的几个点重合．

如果在結点 c_j 处集中了偶数条弧，我們就說这个結点是**偶結点**，如果在結点 c_j 处集中了奇数条弧，我們就說这个結点是**奇結点**．后面我們会看出，奇結点（在我們的問題中）是普通結点，而偶結点（亦在我們的問題中）是特殊結点．奇結点的个数显然是偶数[①]；我們用 $2p$ 表示这个偶数，而用

$$c_1, c_2, \cdots, c_{2p} \tag{89.2}$$

表示所有的奇結点．

---

① 如果用 m_k 表示与結点 $c_k (k=1, 2, \cdots, n)$ 相合的端点 a_i, b_j 之个数，那么，所有端点 a_i, b_j 之总数等于 $2N=m_1+m_2+\cdots+m_n$；因为这个等式之左端是偶数，因此，在右端的項中仅能有偶数个奇数項．

2°. 为了作出典則函数 $X(z)$，我們引用公式(78.10)

$$X(z)=e^{\gamma(z)}\prod_{k=1}^{n}(z-c_k)^{\lambda_k}, \tag{*}$$

其中 λ_k 都是整数，它們应該用适当的方式选定，而函数 $\gamma(z)$ 可以由公式(78.5)确定. 因为在我們的情形下，$G(t)=-1$，因此，可以选 $\ln G(t)=\pi i$，并且因此有

$$\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\pi i\,dt}{t-z}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\int_{a_jb_j}\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\ln\frac{z-b_j}{z-a_j},$$

于是

$$e^{\gamma(z)}=\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{z-b_j}{z-a_j}\right)^{\frac{1}{2}},$$

并且我們把表示式 $\left(\frac{z-b_j}{z-a_j}\right)^{\frac{1}{2}}$ 理解为在沿着 $L_j=a_jb_j$ 而割开的平面上是全純的，在 $z=\infty$ 处取值 1 的一个分枝，此时，依据定义，我們規定

$$\left(\frac{z-b_j}{z-a_j}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}\int_{a_jb_j}\frac{dt}{t-z}}.$$

这样一来

$$X(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-c_k)^{\lambda_k}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{z-b_j}{z-a_j}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{**}$$

其中整数 λ_k 适当地选定.

在化簡上述表示式之前，我們注意到，不管整数 λ_k 如何，这个表示式右端表示一个在沿着 L 而割开的平面上是全純的（无穷远点可能例外，它在那里可能有极点）①，并且当点 z 每越过 L 一次时它都变号一次的函数；所謂当点 z 每越过 L 一次时都变号，是指在圍綫 L 上每一个普通点处都有 $X^+(t)=-X^-(t)$ ②.

在(**)的右端合并一些对 c_k, a_j 或者 b_j 有同一值的因子，我

① 这是一个在由曲綫 L 分割平面而得的每一个連通部分內都是全純的（点 $z=\infty$ 可能例外）函数.

② 我們提醒一下，$X(z)$ 是从(89.1)取 $g(t)=0$ 而得出的齐次問題的解.

們得出

$$X(z)=\pm\prod_{k=1}^{n}(z-c_k)^{\alpha_k}, \qquad (***)$$

这里当 c_k 是偶結点时，α_k 是整数，而当 c_k 是奇結点时，

$$\alpha_k=\mu_k\pm\frac{1}{2}, \qquad (****)$$

其中 μ_k 是整数；在前面公式中，我們可以任意地选取上面或下面的符号，这是由于 μ_k 可以作 ±1 的改变．尽管在公式(***)之右端出現 $\pm$ 号，但是，$X(z)$ 仍然是一个在沿着 L 而割开的平面上是完全确定的函数，这可由上述推出，这在后面也会明白的．

我們現在看出，正象前面已提到过的那样，所有偶結点都是特殊結点；与这种結点对应的数 α_k，我們应该让它等于零（根据选定的 λ_k）．所有奇結点都是普通結点，并且如果我們在(****)中假定 $\mu_k=0$，又对 $k=1, 2, \cdots, q$ 取上面的符号，对 $k=q+1, q+2, \cdots, 2p$ 则取下面的符号，那么，我們显然可得出 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的典則函数($q\leqslant 2p$)．

这样一来，最后，由公式

$$X(z)=\pm\prod_{k=1}^{2p}(z-c_k)^{\pm\frac{1}{2}} \qquad (89.3)$$

給出 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的典則函数 $X(z)$，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_{2p}$ 是所有的奇結点，又在其中的指数幂内对于 $k=1, 2, \cdots, q$ 选取上面的符号，对于 $k=q+1, q+2, \cdots, 2p$ 选取下面的符号．

已給类的所有其他典則函数都可以从 $X(z)$ 乘上一个任意常数因子而得出．

在所有結点都是偶結点的情形下，公式(89.3)的右端显然应該理解为 ±1，因此在这种情形下，

$$X(z)=\pm1. \qquad (89.4)$$

当 z 位于由曲綫 L 分割平面而得的連通部分的一个內时，(89.4)右端的符号应該保持不变，而当 z 在曲綫 L 上的某个普通点处越

过 L 时,則符号变成相反. 如果我們在这些部分中的一个內(任意地)选定它的符号[例如,在包含 $z=\infty$ 的部分內,取定 $X(z)=+1$],那么,这个函数便完全确定. 在这种情形下,我們得出的值就是从公式(*)导出的值;在相反的情形下, 我們所得出的值和上述值有相反的符号①.

在 p 是异于零的情形下,公式(89.3)还可以改写成(与§85作一比較):

$$X(z)=\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}=\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}, \tag{89.5}$$

其中

$$R_1(z)=\prod_{k=1}^{q}(z-c_k), \quad R_2(z)=\prod_{k=q+1}^{2p}(z-c_k).$$

我們把

$$\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}=\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}=\prod_{k=1}^{2p}(z-c_k)^{\pm\frac{1}{2}}$$

应該理解为在由平面用曲綫 L 分割而得的每一个連通部分內(点 $z=\infty$ 可能例外) 是全純的函数, 并且当 z(在普通点处) 每越过曲綫 L 一次时, 这个函数改变一次符号(这按上面所解釋过的来理解). 为了要得出由公式(*)所規定的函数, 必須假定在包含无穷远点的那一个部分內,当 $|z|$ 很大时(和§85 作一比較)

$$\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}=+z^{q-p}+A_1z^{q-p-1}+\cdots. \tag{89.6}$$

显然由公式:

$$\varkappa=p-q \tag{89.7}$$

給出 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的指标 $\varkappa$. 在当弧 $L_k=a_kb_k$ 沒有公共端点, 同时所有結点 (端点) 都是奇結点 (因此所有結点都是普通結点)的情形下,我們重新得出在§85 中对于这个特殊情形所得到的

---

① 从我們已經証明过的函数 $X(z)$ 的存在性可以知道,当沿着不同的路徑从平面的一部分进入另一部分时,我們不会发生矛盾.

結果和公式．

在上面所討論过的另一个簡单的情形下，亦就是，在所有結点都是偶結点 ($p=0$) 的情形下，我們已看到 $X(z)=\pm 1$．特别是，当 L 是由一些簡单的，沒有公共点的封閉圍綫而构成的时，則便沒有奇結点，并且在 L 上选定适当的方向后，我們便得出結果 (47.20)．

还要指出，如果假定 $p=q=0$，并且按照上面所述选取符号的規律，把根式

$$\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}=\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}} \tag{89.8}$$

理解为数 1 或 -1，那么，在今后我們可以把有关所有結点都是偶結点的情形的公式写成和存在奇結点的情形的公式同样的形式．

3°．回到一般的情形，我們写出非齐次問題 (89.1) 的一般解．正好和 §85, 2° 段中完全相同，由公式

$$\Phi(z)=\frac{\sqrt{R_1(z)}}{2\pi i\sqrt{R_2(z)}}\int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\,g(t)dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-z)}+\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}Q(z) \tag{89.9}$$

給出非齐次問題的 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的一般解，在 (89.9) 中 $Q(z)$ 是任意多項式，而把 $\dfrac{\sqrt{R_2(t)}}{\sqrt{R_1(t)}}$ 应該理解为函数

$$\frac{\sqrt{R_2(z)}}{\sqrt{R_1(z)}}=1:\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}$$

在 L 上从左側而取的值．

但是，对于 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的在无穷远处取值零的解，我們有下列結果(这些結果正好与 §85 中的相同[①])：

当 $\varkappa=p-q\geqslant 0$，总存在 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的在无穷远处取值零的解；所有这些解都由下述公式給出：

① 不应該忘記，在我們的情形下，$c_1, c_2, \cdots, c_{2p}$ 并不表示所有結点，而仅表示所有的奇結点(在 §85 的情形下，这些記号表示所有的結点)．

$$\Phi(z)=\frac{\sqrt{R_1(z)}}{2\pi i\sqrt{R_2(z)}}\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}\,dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-z)}+\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}Q_{p-q-1}(z),\tag{89.10}$$

其中 $Q_{p-q-1}(z)$ 是次数不超过 $p-q-1$ 的任意多項式(当 $p=q$ 时这个多項式恒等于零);

当 $\varkappa=p-q<0$ 时,当且仅当 $g(t)$ 适合条件:

$$\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}\,t^k g(t)}{\sqrt{R_1(t)}}\,dt=0,\quad k=0,1,\cdots,q-p-1\tag{89.11}$$

时,才有 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的在无穷远处取値零的解;并且解是唯一的,它由公式(89.10)取 $Q_{p-q-1}(z)=0$ 而給出.

§90. 在一般情形下 Cauchy 型积分的反演公式

1°. 我們現在回到討論 Cauchy 型积分的反演問題的解,亦就是,討論方程

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0),\quad t_0\in L\tag{90.1}$$

的求解,其中 L 在現在是任意一条逐段光滑曲綫. 我們将規定,已知函数 $f(t)$ 在 L 上是属于 H_0 类的,且在 H^* 类中找解 $\varphi(t)$.

由于和在§86 中所述几乎是完全类似的,我們只需写出結果并作簡要的說明就可以了.

和在§86中所做过的类似,我們可以把所有要找的解分成类,归进 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的解在結点 $c_1, c_2, \cdots, c_q$ 的邻域內是保持有界的,而 $c_1, c_2, \cdots, c_q$ 是从所有奇結点 $c_1, c_2, \cdots, c_{2p}$ 中任意取定的結点,$c_1, c_2, \cdots, c_{2p}$ 都是联結問題(89.1)的普通結点;在整个这一节中我們沿用上一节的記号.

当 $\varkappa=p-q\geqslant 0$ 时,总存在方程(90.1)的 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的解,并且这种解由公式

$$\varphi(t_0)=\frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\pi i\sqrt{R_2(t_0)}}\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}\,f(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-t_0)}+\frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\sqrt{R_2(t_0)}}P_{p-q-1}(t_0)\tag{90.2}$$

給出，其中 $P_{p-q-1}(t_0)$ 是次数不超过 $p-q-1$ 的任意多項式（当 $q=p$ 时，这个多項式等于零）.

当 $\varkappa=p-q<0$ 时，当且仅当 $f(t)$ 适合条件

$$\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}\,t^kf(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}}=0,\quad k=0,\,1,\,\cdots,\,q-p-1\tag{90.3}$$

时，才有 $h(c_1,\,c_2,\,\cdots,\,c_q)$ 类的（唯一）解存在，当适合上述条件时，解由公式(90.2)取 $P_{p-q-1}(t_0)=0$ 而給出.

在偶結点的邻域内，所有的解 $\varphi(t_0)$ 都是属于 H_0 类的.

在奇結点的邻域内，根据条件，已給类的解应該是有界的，它是属于 H_0 类的，但是不一定取値零；如果这个結点是曲綫 L 的端点，那么，它（亦象在§86 中那样）就取値零.

在 L 仅有偶結点 $(p=0)$ 的情形下，解总存在并且是唯一的；它由公式

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{\pi i\delta(t_0)}\int_L\frac{\delta(t)\,f(t)\,dt}{t-t_0}$$

給出，其中 $\delta(t)$ 是曲綫 L 上点 t 的函数，在 L 的各个分段上取値 ±1. 根据下述規律来选擇这些値[参看在上一节中紧接着公式(89.4)之后所述的]. 假定 $\delta(z)$ 表示在用曲綫 L 分割平面而得出的各个連通部分上仅取値 $+1$ 或者 -1 的函数，并且当 z 每越出 L 一次时，$\delta(z)$ 变更一次符号. 那么，可以取 $\delta(z)$ 在 L 上从左側而取的値当作 $\delta(t)$，换句話說，可以規定 $\delta(t)=\delta^+(t)$.

这样一来，**在所有結点都是偶結点的情形下，我們有下述的反演公式：**

$$f(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0},\quad \varphi(t_0)=\frac{1}{\pi i\delta(t_0)}\int_L\frac{\delta(t)\,f(t)\,dt}{t-t_0}.\tag{90.4}$$

把記号稍許改变一下,这些公式便可加以簡化. 亦就是說,引进記号

$$\delta(t)\varphi(t)=\psi(t),$$

并且把 $\delta(t)=-1$ 的那些弧 L_k 的正方向都改成反方向,我們就得出下述的反演公式:

$$f(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\psi(t)dt}{t-t_0},\quad \psi(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{f(t)dt}{t-t_0},\qquad (90.5)$$

这些公式正好和一条簡单的封閉圍綫的情形是相同的.

2°. 我們引用两个簡单的例子来闡明上面的結果. 首先假定 L 具有如图 20 所示的形状. 在这种情形下,所有的結点都是偶結点. $\delta(z)$的值可以按照图中所示的方法来选取. 如果 L 的正方向照图中所示那样选擇,那么,在 L 上处处都有 $\delta(t)=+1$,并且依据公式(90.4),我們有

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{f(t)dt}{t-t_0},$$

这个公式和一条簡单的封閉圍綫的情形是相同的.

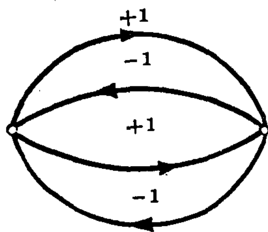


图 20

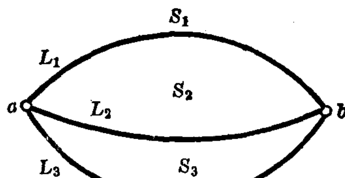


图 21

現在我們討論当 L 具有如图 21 所示的形状的情形. 在这种情形下,有两个結点 a 和 b,它們都是奇結点. 我們要找最大的类(亦就是 h_0 类)的解. 这类的指标 $\varkappa=1$ (在我們的情形下,$p=1$, $q=0$).

根据上述,所有这样的解都由公式

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{\pi i\sqrt{(t_0-a)(t_0-b)}}\int_L\frac{\sqrt{(t-a)(t-b)}f(t)dt}{t-t_0}$$
$$+\frac{C}{\sqrt{(t_0-a)(t_0-b)}}$$

給出，其中 C 是任意常数，而根式的值例如可以用下法确定．我們令

$$\chi(z)=[(z-a)(z-b)]^{\frac{1}{2}},$$

其中右端理解为在沿着簡单弧 L_1, L_2, L_3 中之一(这些弧都联接点 a 和 b) 而割开的 (例如，沿着弧 L_2 而割开的，L_2 介于另外两条弧之間) 平面上是全純的函数．$\chi(z)$ 的值例如可以根据条件 $\lim_{z\to\infty}\frac{\chi(z)}{z}=+1$ 来选定．另外，我們又令(記号在图中已給出)

$$\sqrt{(z-a)(z-b)}=\begin{cases}+\chi(z) & 在区域\ S_1\ 内, \\ -\chi(z) & 在区域\ S_2,\ S_3\ 内.\end{cases}$$

那么，我們可以把 $\sqrt{(t-a)(t-b)}$ 及 $\sqrt{(t_0-a)(t_0-b)}$ 理解为函数 $\chi(z)$ 在 L 上从左側而取的值(不論 L 上的正方向怎样选定)．

III．調和函数論中对于某些区域的一些基本边值問題的有效解法

在这一部分中，我們給出第一部分中的結果在調和函数論中某些特殊形状区域上的一些基本边值問題的有效解法上的应用，而这些边值問題是在流体力学，彈性理論以及数学物理的其他分枝中遇到的．

§91．在沿着一条直綫而断續地割开的平面上的 Dirichlet 問題和其他类似的問題

假定 S 表示沿着实軸 Ox 上一些沒有公共点的綫段 $L_j=a_jb_j$ $(j=1, 2, \cdots, p)$ 而割开的平面；可以认为 $a_1<b_1<a_2<\cdots$．这些

綫段的全体我們用

$$L=L_1+L_2+\cdots+L_p$$

表示.

在区域 S 上我們要求解决三个問題，其中最后一个（問題 C）就是通常的 Dirichlet 問題，而其余两个则是它的某些变态，这两个問題除了本身独有的意义外，在求解 Dirichlet 問題时亦要用到它們.

問題 A 要求根据边界条件：

$$u^+=f^+(t),\quad u^-=f^-(t)\quad \text{在} L \text{上}, \tag{91.1}$$

来找一个在 S 内为全純的，在无穷远处取值零的函数 $\Phi(z)=u+iv$，其中 $f^+(t)$，$f^-(t)$都是給定在 L 上适合 H 条件的实函数；假定所要找的函数 $\Phi(z)$ 在曲綫 L 的端点附近是适合条件

$$|\Phi(z)|<\frac{\text{常数}}{|z-c|^\alpha},\quad \alpha=\text{常数}<1$$

的. 换句話說，假定函数 $\Phi(z)$ 是具有跳跃曲綫 L 的分区全純函数.

沿用在§39，1°段中的記号，我們令

$$\Psi(z)=\frac{\Phi(z)+\overline{\Phi}(z)}{2},\quad \Omega(z)=\frac{\Phi(z)-\overline{\Phi}(z)}{2}. \tag{91.2}$$

分区全純函数 $\Psi(z)$ 及 $\Omega(z)$ 显然应該适合条件

$$\overline{\Psi}(z)=\Psi(z),\quad \overline{\Omega}(z)=-\Omega(z). \tag{91.3}$$

容易看出，边界条件(91.1)可以归結为下列条件[①]：

$$\left\{\begin{aligned}&\Psi^+(t)+\Psi^-(t)=2f(t) &&(91.4\text{a})\\ &\Omega^+(t)-\Omega^-(t)=2g(t) &&(91.4\text{b})\end{aligned}\right.\quad \text{在} L \text{上},$$

① 我們有

$$u^+(t)=\operatorname{Re}\Phi^+(t)=\frac{1}{2}[\Phi^+(t)+\overline{\Phi^+(t)}],$$

$$u^-(t)=\operatorname{Re}\Phi^-(t)=\frac{1}{2}[\Phi^-(t)+\overline{\Phi^-(t)}].$$

但是(参看(39.5a))，$\overline{\Phi^+(t)}=\overline{\Phi}^-(t)$，$\overline{\Phi^-(t)}=\overline{\Phi}^+(t)$，于是可以得出(91.4a)，(91.4b).

其中

$$2f(t)=f^+(t)+f^-(t),\\ 2g(t)=f^+(t)-f^-(t). \tag{91.5}$$

根据条件(91.4b)可以单值地确定函数 $\Omega(z)$ (§ 31)：

$$\Omega(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{g(t)dt}{t-z}. \tag{91.6}$$

公式(39.10)說明，条件(91.3)中的第二个是适合的．

我們看出，函数 $\Omega(z)$ 在所有端点附近是几乎有界的(§ 77, 3°段)①；此外，它在 $f^+(c)=f^-(c)$ 的那些端点 c 附近是有界的．

但是，函数 $\Psi(z)$ 的确定可以归結为在 § 85 中已經討論过的联結問題的最簡单的一个特殊情形；在这里我們只需要考虑到补充条件 $\overline{\Psi}(z)=\Psi(z)$．

我們用 $c_1, c_2, \cdots, c_{2p}$ 表示按照任意次序排列后的点 a_j, b_j．依据公式(85.3)(現在我們取其中的$C=1$)，$h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$类的典則函数，亦就是，齐次联結問題

$$\Psi^+(t)+\Psi^-(t)=0 \quad 在 L 上 \tag{91.7}$$

在这一类中的典則解具有下述形式：

$$X(z)=\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}=\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}, \tag{91.8}$$

其中，正如在 § 85 中那样，

$$R_1(z)=\prod_{j=1}^{q}(z-c_j), \quad R_2(z)=\prod_{j=q+1}^{2p}(z-c_j), \tag{91.9}$$

又其中根式的值根据在 § 85 中所加的条件来选定．

正如在 § 85 中所指出过的那样，对于問題(91.4a)，所有端点 a_k, b_k 都是普通結点．这个問題在无穷远处取値零的 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的一般解，当 $p\geqslant q$ 时，具有形式：

---

① 对問題(91.4b)来讲，所有結点(在我們的情形下，这些結点都是端点) a_j, b_j 都是特殊結点．

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi i}\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}}{\sqrt{R_1(t)}}\frac{f(t)dt}{t-z}+\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}P_{p-q-1}(z),\qquad(91.10)$$

其中 $P_{p-q-1}(z)$ 是次数不超过 $p-q-1$ 的任意多項式(当 $p=q$ 时，$P_{p-q-1}(z)\equiv0$)，而根号則按照在 §85 中那样来理解. 当 $p<q$ 时，仅当适合下面导出的条件(91.12)时，問題(91.4a)在所考虑的类中才有在无穷远处取値零的解存在，并且此时解亦由同一个公式(91.10)取 $P_{p-q-1}(z)=0$ 而給出.

为了使得剛才所导出的問題(91.4a)的解,能适合所应該适合的所有条件,根据(91.3)，还需要使 $\overline{\Psi}(z)=\Psi(z)$ 成立. 我們来驗証是否适合这个条件.

首先,容易看出,

$$\overline{X}(z)=X(z).\qquad(91.11)$$

其次,利用公式(39.10)①,便容易驗証,(91.10)右端的第一項是适合条件 $\overline{\Psi}(z)=\Psi(z)$ 的. 因此,当且仅当多項式 $P_{p-q-1}(z)$ 的系数都是实数时,(91.10)右端所有的各項才能适合这个条件.

当 $p<q$ 时,上面提到的問題(91.4a)在 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中有在无穷远处取値零的解存在的条件为形式(§85)：

$$\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}}{\sqrt{R_1(t)}}t^kf(t)dt=0,\quad k=0,1,\cdots,q-p-1.\qquad(91.12)$$

如果問題A的解在端点 $c_1, c_2, \cdots, c_q$ 附近是几乎有界的，我們就把 $\Phi(z)$ 叫做是原来問題A的类 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 的解. 此时，根据上面所述的,容易得出如次之結論：

当 $p\geqslant q$ 时，問題A的 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的解由下述公式給出：

① 同时,应該考虑到在我們的情形下,根据(39.5a),(91.11)及(91.7)可以得出,在 L 上有 $\overline{X^+(t)}=\overline{X}^-(t)=X^-(t)=-X^+(t)$.

$$\Phi(z)=\Psi(z)+\Omega(z)=\frac{1}{\pi i}\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}}{\sqrt{R_1(t)}}\frac{f(t)dt}{(t-z)}$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{g(t)dt}{t-z}+\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}P_{p-q-1}(z), \qquad (91.13)$$

其中$P_{p-q-1}(z)$是次数不超过$p-q-1$的，并且系数都是实数的任意多项式（当$p=q$时，$P_{p-q-1}(z)\equiv 0$）；在$p<q$时，当且仅当适合条件(91.12)时，（唯一）解才存在，并且解由公式(91.13)取$P_{p-q-1}(z)\equiv 0$而給出.

所得到的結果是 М. В. Келдыш 和 Л. И. Седов[1] 的很有价值的結果（在将解进行分类，同时建立可解性的充分和必要条件的意义下）的推广.

注釋1 容易看出（参照§82），如果假定已知的$f^+(t)$和$f^-(t)$在L上都是属于$h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$类的，而不假定它們在L上适合H条件，那么，上面所得出的全部結果和公式都仍然是有效的．特别是，如果$f^+(t)$和$f^-(t)$是h_0类（亦就是H^*类）中的任意两个函数，那么，h_0类的一般解可以由公式(91.13)取$q=0$而給出：

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\frac{1}{\sqrt{R(z)}}\int_L\frac{\sqrt{R(t)}f(t)dt}{t-z}$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{g(t)dt}{t-z}+\frac{P_{p-1}(z)}{\sqrt{R(z)}}, \qquad (91.13a)$$

其中仍然有

$$R(z)=\prod_{j=1}^{p}(z-a_j)(z-b_j). \qquad (91.9a)$$

注釋2 用类似的方法不难求解和問題A不同仅在于在L上給定了u^+与v^-的值的問題．这个問題的解是由 Д. И. Шерман [1]給出的；如果不把这个問題归結为奇异方程，而把它直接归結为某些（非常簡单的）联結問題，那么，Д. И. Шерман 的解就可以稍为加以簡化.

問題B 要求根据边界条件：

$$u^{+}=f^{+}(t)+C_k,\quad u^{-}=f^{-}(t)+C_k \quad \text{在 } L_k \text{ 上},\quad k=1,2,\cdots,p, \tag{91.14}$$

来找一个在无穷远处是取值零的，又在所有端点附近是几乎有界的分区全純函数 $\Phi(z)=u+iv$，其中 $f^{+}(t)$ 和 $f^{-}(t)$ 都是适合 H 条件的、已知的实函数，而 C_k 是事先沒有給定的实常数.

这个問題在本质上与 §60 中我們称之为变态的 Dirichlet 問題的問題是一致的①；因此，在此处我們仍然沿用这个名称.

由公式(91.2)引进函数 $\Psi(z)$ 及 $\Omega(z)$ 后，我們便导致下面两个联結問題：

$$\Psi^{+}(t)+\Psi^{-}(t)=2f(t)+2C_k \quad \text{在 } L_k \text{ 上},\quad k=1,2,\cdots,p, \tag{91.15a}$$

$$\Omega^{+}(t)-\Omega^{-}(t)=2g(t) \quad \text{在 } L \text{ 上}, \tag{91.15b}$$

其中 $f(t)$ 及 $g(t)$ 是由公式(91.5)确定的函数.

正象在前一个情形中那样，可以解决第二个問題；解在所有端点附近是几乎有界的[在 $f^{+}(t)$ 和 $f^{-}(t)$ 取同一个値的那些端点附近，解甚至是有界的].

留待我們要找的是問題(91.15a)的几乎有界的解，从而亦是有界的解②，亦就是，h_{2p} 类的解；这类的典則函数由下述公式給出：

$$X_{2p}(z)=\sqrt{R(z)},\quad R(z)=\prod_{k=1}^{p}(z-a_k)(z-b_k) \tag{91.16}$$

(参看公式(85.12)；在此处我們取 $C=1$).

---

① 这个問題和在 §60 中所提出的变态的 Dirichlet 問題的主要区别在于，在那里要求函数 $u(x, y)$ 連續拓展到边界的每一个点上，而在此处函数 $u(x, y)$ 可以允許不連續拓展到端点上，在端点处函数 $u(x, y)$ 只要求是几乎有界的. 但是，我們将会見到，在此处所提出的条件下，函数 $u(x, y)$ 在端点附近亦是有界的，并且在适合条件 $f^{+}(c)=f^{-}(c)$ 的端点 c 处，它甚至可以連續拓展到 c 上；显然，如果条件 $f^{+}(c)=f^{-}(c)$ 不成立，那么，它不可能連續拓展到 c 上.

② 因为对于問題(91.15a)，所有端点都是普通結点，因此，每一个几乎有界的解亦是有界的解(§82，2° 段).

問題(91.15)在h_{2p}类中有在无穷远处取值零的解存在的充分和必要条件具有

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{t^k[f(t)+C(t)]dt}{\sqrt{R(t)}}=0, \quad k=0, 1, \cdots, p-1$$

的形式①，其中$C(t)=C_j$(在L_j上)．这些条件給出确定C_j的p个綫性方程的方程組：

$$\sum_{j=1}^{p}\gamma_{kj}C_j+\gamma_k=0, \quad k=0, 1, \cdots, p-1, \qquad (91.17)$$

其中

$$\gamma_{kj}=\frac{1}{\pi i}\int_{L_j}\frac{t^k dt}{\sqrt{R(t)}}, \quad \gamma_k=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{t^k f(t)dt}{\sqrt{R(t)}}. \qquad (91.18)$$

容易看出，γ_{kj}和γ_k都是实数．

如果方程組(91.17)有(实)解，那么，問題(91.15a)所要找的解便由公式

$$\Psi(z)=\frac{\sqrt{R(z)}}{\pi i}\int_L\frac{f(t)+C(t)}{\sqrt{R(t)}(t-z)}\,dt \qquad (91.19)$$

給出，其中$C(t)=C_j$(在L_j上)，而C_j适合方程組(91.17)．此时$\overline{\Psi}(z)=\Psi(z)$．

現在我們証明方程組(91.17)的行列式，亦就是，矩陣$\|\gamma_{ij}\|$的行列式异于零．实际上，如果这个行列式等于零，那么，由(91.17)取$f(t)\equiv 0$而得出的齐次方程組必然有非零解$C_1, C_2, \cdots, C_p$．对应于这个解的函数

$$\Psi_0(z)=\frac{\sqrt{R(z)}}{\pi i}\int_L\frac{C(t)dt}{\sqrt{R(t)}(t-z)},$$

在无穷远处取值零，又可以連續拓展到每一条綫段L_j上(包括端点在內)，并且它在L_j上有$[\mathrm{Re}\,\Psi_0(t)]^+=[\mathrm{Re}\,\Psi_0(t)]^-=C_j$．但是，由此再由在§60中証明过的变态Dirichlet問題的唯一性定理(容易看出，其証明对現在的情形仍然是适用的)，必然有$C_1=C_2=\cdots=C_p=0$，而这与所假定的条件是矛盾的．因此，方程組

① 这是条件(85.18)应用于$q=2p$的情形．

(91.17)的行列式应該不等于零，从而，这个方程組总是单值可解的.

因此,上面所提出的問題总有唯一解;解由公式

$$\Phi(z)=\Psi(z)+\Omega(z)$$
$$=\frac{\sqrt{R(z)}}{\pi i}\int_L \frac{f(t)+C(t)}{\sqrt{R(t)}}dt+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{g(t)dt}{t-z} \quad (91.20)$$

給出，其中 $C(t)=C_j$(在 L_j 上)，并且常数 C_j 由方程組(91.17)唯一地确定.

注釋 3 容易看出，調和函数 $u=\mathrm{Re}\,\Phi(z)$ 在所有端点附近不仅是几乎有界的,而且亦是有界的. 这个結論对于(91.20)右端的第一項是显然的. 而第二項在任意端点 c 的邻域內可以表成形式

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{g(t)dt}{t-z}=\mp\frac{g(c)}{\pi i}\ln(z-c)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{g(t)-g(c)}{t-z}dt,$$

这里对于端点 a_j 取“+”号，而对于端点 b_j 則取“−”号. 因此，在 c 附近

$$u=\mathrm{Re}\,\Phi(z)=\mp g(c)\frac{\vartheta}{\pi}+u_0,$$

其中 u_0 在点 c 处是連續的,而 $\vartheta=\arg(z-c)$.

另外，显然，如果 $g(c)=f^+(c)-f^-(c)=0$，那么，u 可以連續拓展到 c 上.

問題 C (Dirichlet 問題) 要求根据边界条件:

$$U^+=f^+(t),\quad U^-=f^-(t)\quad 在 L 上, \quad (91.21)$$

来找一个在 S 內是調和的，又是处处有界的函数 $U(x, y)$，其中 $f^+(t)$ 及 $f^-(t)$ 都是适合 H 条件的已知实函数.

我們給出这个問題的两个解法. 第一个解法是将它归結为問題 B，而第二个解法則是将它归結为問題 A.

第一个解法 問題 C 可以用很多种方法将它归結为問題 B；我們現在指出其中最簡单的一种方法.

我們用 $\omega_j(x, y)$ 或者簡单地用 $\omega_j(z)$ 表示下述初等的調和函数

$$\omega_j(z)=\mathrm{Re}\frac{(z-b_j)\ln(z-b_j)-(z-a_j)\ln(z-a_j)}{b_j-a_j}, \quad (91.22)$$
$$j=1, 2, \cdots, p,$$

并且把 $\omega_j(z)$ 理解为在沿着 L 而割开的平面上是单值的这样一个分枝，对于很大的 $|z|$，有

$$\omega_j(z)=-\ln|z|-1+O\left(\frac{1}{z}\right). \quad (91.22a)$$

容易看出，函数 $\omega_j(z)$ 在綫段 a_jb_j 上从右側和从左側取同一值；我們用 $\omega_j(t)$ 表示这些值.

我們現在令

$$U(x, y)=u(x, y)+\alpha_0+\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\omega_j(z), \quad (91.23)$$

这里 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p$ 都是实常数，其中后 p 个常数由关系式

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p=0 \quad (91.24)$$

联系，这个关系式保証了和式

$$\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\omega_j(z)$$

在无穷远处取値零；$u(x, y)$ 是新的、在无穷远处取値零的、未知的調和函数.

从(91.21)我們得出有关函数 u 的下述边界条件：

$$u^+=f^+(t)-\omega(t), \quad u^-=f^-(t)-\omega(t) \quad 在 L 上, \quad (91.25)$$

其中为了簡单起見已令

$$\omega(t)=\alpha_0+\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\omega_j(t). \quad (91.26)$$

假定常数 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p$ 都已經选定，并且正象在問題 B 中所要求的那样，$u(x, y)$ 是某一个在无穷远处取値零的、并且在所有端点附近都是几乎有界的分区全純函数 $\Phi(z)$ 的实部，我們就可用求解問題 B：

$$u^+=f^+(t)-\omega(t)+C_j, \quad u^-=f^-(t)-\omega(t)+C_j \quad 在 L_j 上 \tag{91.27}$$

以替代求解問題(91.25).

我們知道(参看前面問題B的解法)，在这种情况下，常数 C_j 是完全确定的，并且显然，它們可以用常数 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p$ 的綫性組合表出：

$$C_j=\sum_{k=0}^{p}\gamma_{jk}\alpha_k+\gamma_j, \tag{91.28}$$

其中 γ_{jk} 是一些确定的常数，它們与函数 $f^+(t)$，$f^-(t)$ 的选擇无关；而 γ_j 是另一些常数，当 $f^+(t)=f^-(t)=0$ 时，这些常数都等于零.

我們現在选取常数 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p$，使得 $C_j=0\,(j=1, 2, \cdots, p)$，另外，又使得条件(91.24)是适合的. 这样一来，为了确定常数 α_k，我們得出方程組

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{p}\gamma_{jk}\alpha_k+\gamma_j=0, \quad j=1, 2, \cdots, p,\\ &\sum_{k=0}^{p}\alpha_k=0.\end{aligned} \tag{91.29}$$

下面我們来証明这个方程組总是单值可解的. 如果按照(91.29)来选取常数 α_k，那么，原来問題C的解可以由公式(91.23)給出，其中 $u(x, y)$ 应該理解为問題(91.27)的解①.

我們現在証明，方程組(91.29)的行列式不等于零. 我們用反証法来証明，假定这个行列式等于零，那么，由(91.29)取 $f^+(t)=f^-(t)=0$（从而，所有的 γ_j 都等于零）而得的齐次方程組有非零解 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p$. 对于常数 α_j 的这些值，由(91.23)所确定的函数 $U(x, y)$ 应該是 Dirichlet 問題(91.21)当 $f^+=f^-=0$ 时的解. 但是，如众所周知，此时 $U\equiv0$. 然而，如果 $U\equiv0$，那么，必然有 $\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_p=0$. 事实上，因为(91.23)右端异于 α_0 的两項在

① 根据前面(問題B的注釋)所讲过的可以知道，函数 $u(x, y)$ 在所有端点附近不仅是几乎有界的，而且是有界的.

无穷远处都取值零，所以 $\alpha_0=0$①．其次，假定 $\alpha_k\neq 0(k\geqslant 1)$．如果 z 圍繞綫段 a_kb_k 轉一周（而不繞別的綫段回轉），那么，与 $u(x,y)$ 及与 $\omega_j(z)(j\neq k)$ 共軛的函数都回到起始值，但是，容易看出，与 $\omega_k(z)$ 共軛的函数却得到一个异于零的增量．这意味着，如果 $\alpha_k\neq 0$，那么，(91.23) 右端的共軛函数可以得到一个异于零的增量，因为左端 $U=0$，因此，这是不可能的．

綜上所述，我們的結論便得到了証明，并且可以认为問題 C 是解决了．

問題 C 的第二个解法 它是由 М.В. Келдыш 和 Л.И. Седов[1] 給出的，这方法是把問題 C 归結为問題 A，它比之前一种解法的一般性要稍差一些，因为它要求已知函数 $f^+(t)$ 与 $f^-(t)$ 是可微的，但是，在实际应用中，有时由它可以导出一些比較簡单的結果．

我們在叙述这个方法时，已經对它作了某些（不重要的）修改和簡化．

我們用

$$\Phi(z)=U(x,\ y)+iV(x,\ y) \tag{91.30}$$

表示一个实部为未知的調和函数 $U(x,y)$ 的解析函数．$U(x,y)$ 的共軛函数 $V(x,y)$，一般讲来，是多值的，因此，函数 $\Phi(z)$ 亦是多值的．但是，如众所周知，函数

$$\Phi'(z)=\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}$$

确是单值的②（由函数 U 的单值性得出），而对很大的 $|z|$，由于 U

① 函数 $u(x,y)$ 是問題 B 的在无穷远处取值零（根据这个問題的条件）的解的实部．

② 当 z 沿着任意一条圍繞綫段 a_kb_k 之一而不圍繞其他綫段的封閉路徑走一圈时，調和函数 $V(x,y)$ 得到一个常数的增量，这个增量和所沿的路徑是无关的．因此显然，当 z 圍繞这样的路徑一周时，函数 $\Phi'(z)$ 回到原来的値．

的有界性①,有

$$\Phi'(z)=O\left(\frac{1}{z^2}\right). \tag{91.31}$$

我們将假定在所有的端点处，亦就是，当 $t=a_k$, b_k时，$f^+(t)=f^-(t)$（这表明未知函数 U 的边値是連續的），我們又引进由公式(91.5)所确定的函数 $f(t)$, $g(t)$ 来討論；那么，根据所設的条件，我們有

$$\begin{aligned}&f(a_k)=f^+(a_k)=f^-(a_k),\\&f(b_k)=f^+(b_k)=f^-(b_k),\\&g(a_k)=g(b_k)=0,\\&k=1,\ 2,\ \cdots,\ p.\end{aligned} \tag{91.32}$$

另外，我們将假定函数 $f^+(t)$, $f^-(t)$ 是属于 H^* 类的，从而 $f(t)$, $g(t)$ 都具有 H^* 类的导函数．我們要求函数 $\Phi'(z)$ 是分区全純的②．

这样一来，我們得到了关于函数 $\Phi'(z)$ 的問題 A，并且在現在 $f'(t)$, $g'(t)$ 起着 $f(t)$, $g(t)$ 的作用．

应用公式(91.13a)，我們得出

$$\Phi'(z)=\frac{1}{\pi i\sqrt{R(z)}}\int_L\frac{\sqrt{R(t)}f'(t)\,dt}{t-z}+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{g'(t)\,dt}{t-z}+\frac{C_1z^{p-2}+C_2z^{p-3}+\cdots+C_{p-1}}{\sqrt{R(z)}}, \tag{91.33}$$

其中 $R(z)$ 由公式(91.9a)确定，又其中根式应該按照在§85中所述来理解；C_1, C_2, $\cdots$, C_{p-1} 表示一些实常数．为了保証适合条件

①在点 $z=\infty$ 的邻域内单値的和有界的調和函数 $U(x, y)$，对很大的 $|z|$，可以展成下述形式的級数：

$$U(x, y)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos k\vartheta+\beta_k\sin k\vartheta)r^{-k}\quad(z=re^{i\vartheta}),$$

并因此对充分大的 $|z|$，有

$$\Phi(z)=U+iV=\alpha_0+i\beta_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k+i\beta_k)z^{-k},\quad \Phi'(z)=O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

② 可以认为这种假定是合理的，因为我們看到，这种形式的解是存在的；从 Dirichlet 問題的唯一性可以知道，我們并沒有丢掉任何別的解。

(91.31)，我們在(91.33)的最后一項的分子中取次数为 $p-2$ 的多項式，而不取次数为 $p-1$ 的多項式，这是因为容易看出，前两項是适合条件(91.31)的．对于第一項，这是显然的；至于第二項，則它在无穷远点附近按 z 的降幂的展开式中，z^{-1} 的系数为

$$\frac{-1}{\pi i}\int_L g'(t)\,dt=-\frac{1}{\pi i}\sum_{k=1}^{p}[g(b_k)-g(a_k)],$$

因此，根据 (91.32)，这个系数等于零，于是，第二項亦是适合条件(91.31)的．

找出 $\Phi'(z)$ 之后，根据公式

$$\Phi(z)=\int_0^z \Phi'(z)\,dz+C,$$

我們就找到 $\Phi(z)$，其中的 C 可以理解为实常数．

为了确定常数 $C_1, C_2, \cdots, C_{p-1}, C$，我們有下列 p 个明显的条件①：

$$\operatorname{Re}\int_0^{a_k} \Phi'(z)\,dz+C=f(a_k). \tag{91.34}$$

积分可以沿着任何一条与 L 不相交的路徑从 0 到 a_k 来积，例如，可以沿着 Ox 軸的左边积分[此时，在积分号下必須取 $\Phi'^{+}(t)\,dt$]．

容易看出，条件(91.34)是关于 $C_1, C_2, \cdots, C_{p-1}, C$ 的 p 个綫性方程的方程組．我們証明，这个方程組总是单值可解的．依据 Dirichlet 問題的唯一性定理，这是容易証明的．但是，在这里我們引进另一个簡单而又直接的証明，这个証明亦是由 М. В. Келдыш 和 Л. И. Седов [1]給出的．

我們来討論对应于方程組 (91.34) 的齐次方程組；假定 $f(t)=g(t)=0$，我們便得出这个齐次方程組，于是，这个齐次方程組具有形式

$$\operatorname{Re}\int_0^{a_k}\frac{C_1t^{p-2}+C_2t^{p-3}+\cdots+C_{p-1}}{\sqrt{R(t)}}\,dt+C=0, \quad k=1,2,\cdots,p, \tag{91.35}$$

① 不要忘掉，$f^{+}(a_k)=f^{-}(a_k)=f(a_k)$．

因此，我們容易得出

$$\int_{b_k}^{a_{k+1}} \frac{C_1 t^{p-2}+C_2 t^{p-3}+\cdots+C_{p-1}}{\sqrt{R(t)}}\,dt=0, \qquad (91.36)$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots,\ p-1.$$

所以，在每一条綫段 $b_k a_{k+1}$（这种綫段共有 $p-1$ 条）上，多項式 $C_1 z^{p-2}+C_2 z^{p-3}+\cdots+C_{p-1}$ 至少应該变号一次，于是，它应該有不少于 $p-1$ 个根；但是，仅当 $C_1=C_2=\cdots=C_{p-1}=0$ 时，这才是可能的. 由此显然，又有 $C=0$.

因此，对应于(91.34)的齐次方程組沒有非零解. 于是，它的行列式不等于零，从而，方程組(91.34)总是单值可解的.

§92. 在沿着圓周而断續地割开的平面上的 Dirichlet 問題及其他类似的問題

完全类似地可以解决上一节中的問題 A、B、C 在区域 S 是用某个圓周上的有限多条弧而割开的平面时的情形. 利用一个簡单的反演变換①可以将这种情形归結为上一节中的情形. 但是，用一个与上一节所指出的类似的直接解法，可以更快地得出結果. 有关的公式的推导与前一节中的公式的推导是完全类似的，我們让讀者去完成这些推导（参考下一节中类似的計算）.

§93. 具有間断系数的 Riemann-Hilbert 問題

1°. 从应用的角度来看，这是一个非常重要的問題②，我們把这个問題叙述如下（参照 §40）：

假定 L 是一条光滑的封閉圍綫，又假定 S^+ 是平面上由 L 所圍成的（有界或无界）部分. 要求根据 L 上的边界条件：

---

① 指的是分式綫性变换. ——譯者注

② 在一些新的应用中，我們指出在壳体无弯矩的理論中的应用；参看 А. Л. Гольденвейзер 的論文[1]. 在 А. В. Бицадзе 的短文[3]中，給出了对于混合型偏微分方程理論中一类重要問題的应用.

$$a(t)u^+-b(t)v^+=c(t), \tag{93.1}$$ ①

来找一个在 S^+ 内是全純的、可以連續拓展到圍綫 L 的所有点上(在这条圍綫的一些已知点 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 处可能除外)的函数 $\Phi(z)=u+iv$，而在点 $c_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 附近

$$|\Phi(z)|<\frac{常数}{|z-c_j|^\alpha}, \quad \alpha=常数<1, \tag{93.2}$$

在(93.1)中的 $a(t)$，$b(t)$ 及 $c(t)$ 在 L 上对結点 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 来讲都是 H_0 类中的已知实函数，并且在 L 上处处都有 $a^2(t)+b^2(t)\neq 0$ ②.

我們还假定圍綫 L 是适合 Ляпунов 条件的.

正象在 § 43 中那样，利用保角映射可以把这个問題归結为 S^+ 是圓域的情形③. 我們現在討論这个情形.

2°. 于是，假定 L 是圓周 $|z|=1$，S^+ 是圓域 $|z|<1$；我們用 S^- 表示区域 $|z|>1$.

在 §§ 41, 43 及 83, 2° 段中的結果給出以后，所提出的問題的解几乎是显然的了. 因此，我們只需要作一些簡要的說明④.

正象在 § 41 中那样，我們把 S^+ 内的未知函数 $\Phi(z)$ 拓展到区域 S^- 内，使得对于 S^- 及 S^+ 中所有的 z，都有

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right)=\Phi(z). \tag{93.3}$$

正象在 § 41 中那样，这可以导出和 Riemann-Hilbert 問題(93.2)相对应的联結問題：

---

① 和原书不同，按中文习惯此式与下式号碼对調了. ——譯者注

② 对于間断点 c_j 来讲，后一个条件通常应該按照下述意义来理解：

$$a^2(c_j\pm 0)+b^2(c_j\pm 0)\neq 0.$$

③ 根据在 § 43 起首所述結果，容易看出，我們对 L 所加的一些条件保証了，当保角映射到圓域上时，所討論的函数仍然保持所要求的性质.

④ 据我所知道，在别处并沒有看到过本书正文所給出的这个問題的完整解法. 在 F. Noether 的論文[1]中考虑了一个特殊情形，但是，这位著者就連这个特殊情形的合理解法都沒有能給出. С. Л. Соболев [1]用了与本书不同的方法給出了另一个特别情形的合理的解法(轉載本书第一版中所做过的脚注).

$$(a+ib)\Phi^{+}(t)+(a-ib)\Phi^{-}(t)=2c \tag{93.4}$$

或者

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t)+g(t), \tag{93.5}$$

其中

$$G(t)=-\frac{a-ib}{a+ib}, \quad g(t)=\frac{2c}{a+ib}. \tag{93.6}$$

和在 § 80 中所讲过的完全类似(亦可以参看 § 83)，我們可以把所討論的 Riemann-Hilbert 問題所有的解分成类，归进 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的解在已給的普通結点 $c_1, c_2, \cdots, c_q$ 附近是保持有界的.

正象在 § 83[公式(83.9)]中所指出的那样，根据已給的解类来选取当 t 經过 c_j 时函数 $G(t)$ 的幅角的跃度,所討論的那类的指标 $\varkappa$ 就由公式

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_L=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a-ib}{a+ib}\right]_L \tag{93.7}$$

給出. 我們总把比値 $\frac{a-ib}{a+ib}$ (它等于 $-G(t)$) 之幅角的跃度理解为 $G(t)$ 之幅角的跃度.

与連續系数的情形正好相反,現在数 $\varkappa$ 可以是偶数,亦可以是奇数①.

假定 $X(z)$表示問題(93.5)在已給类 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 的典則函数,并且它适合补充条件

$$X_*(z)=\overline{X}\left(\frac{1}{z}\right)=z^{\varkappa}X(z); \tag{93.8}$$

---

① 現在我們不能断定,比値 $\frac{a-ib}{a+ib}$ 的幅角之变化等于表示式 $a-ib$ 的幅角之变化的两倍,因为我們不能单独地取定經过点 c_j 时 $a-ib$ 的幅角的跃度.

如果現在按照在§83中公式(83.16)①后面接着所指出的那样来理解表示式：

$$\ln[t^{-\varkappa}G(t)]=i\arg\left[-t^{-\varkappa}\frac{a-ib}{a+ib}\right]=i\Theta(t),\qquad(93.9)$$

那么，函数 $X(z)$ 可以确定精确到仅差一个实的常数因子，并且可以根据公式(41.9)～(41.11)，(41.13)，(41.14)来計算．

当 $\varkappa\geqslant0$ 时，由(93.1)取 $c(t)=0$ 而得出的齐次 Riemann-Hilbert 問題在已給类的一般解，由公式

$$\Phi(z)=X(z)\,(C_0z^{\varkappa}+C_1z^{\varkappa-1}+\cdots+C_{\varkappa})\qquad(93.10)$$

給出，其中 $C_0, C_1, \cdots, C_{\varkappa}$ 是一些用关系式

$$C_k=\bar{C}_{\varkappa-k}\qquad(93.11)$$

联系的常数，正象在§41中那样（区别仅在于在此处 $\varkappa$ 可能是奇数），这些常数不受别的限制．与此同时，正象在§41中那样，当 $\varkappa\geqslant0$ 时，齐次問題恰好有 $\varkappa+1$ 个已給类的綫性无关解（綫性无关性正好按照在§40，2°段中那样来理解）；当 $\varkappa\leqslant-1$ 时，齐次問題在已給类中沒有非零解．

当 $\varkappa\geqslant-1$ 时，非齐次問題(93.1)对每一个右端 $c(t)$（在已給类中）都是可解的；特别是，当 $\varkappa=-1$ 时，它是单值可解的．

当 $\varkappa\leqslant-2$ 时，仅当适合下述 $-\varkappa-1$ 个条件时，这个問題才在已給类中有（唯一的）解：

当 $\varkappa$ 是偶数时②，

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\Omega(\vartheta)c(\vartheta)\cos k\vartheta\,d\vartheta=0,\quad k=0,1,\cdots,-\frac{\varkappa}{2}-1,\\&\int_0^{2\pi}\Omega(\vartheta)c(\vartheta)\sin k\vartheta\,d\vartheta=0,\quad k=1,2,\cdots,-\frac{\varkappa}{2}-1;\end{aligned}\qquad(93.12)$$

当 $\varkappa$ 是奇数时，

---

① 在我們的情形下，在公式(83.16)中，应該假定 $a=0$，并且取上面的符号．

② 在这种情形下，我們有与§41中同样的公式．

$$\int_0^{2\pi}\Omega(\vartheta)c(\vartheta)\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\vartheta\,d\vartheta=0,$$
$$\int_0^{2\pi}\Omega(\vartheta)c(\vartheta)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\vartheta\,d\vartheta=0,\qquad k=0,1,\cdots,-\frac{\varkappa+1}{2}-1. \tag{93.13}$$

这里 $\Omega(\vartheta)$ 表示正象在 § 41 中 [公式(41.22)] 那样确定的实函数，

$$\Omega(\vartheta)=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2(\vartheta)+b^2(\vartheta)}}e^{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Theta(\vartheta_1)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_1}{2}d\vartheta_1}, \tag{93.14}$$

但是，对 $\Omega(\vartheta)$ 应作如下的說明：在 § 41 中根式$\sqrt{a^2(\vartheta)+b^2(\vartheta)}$ 前面的符号是无关紧要的，这是由于在那时这个表示式在 L 上是連續变化的，并且保持同一个符号．而在現在所討論的情形下却并不是如此．因此，在現在应該指出，

$$\pm\sqrt{a^2(\vartheta)+b^2(\vartheta)}=(a+ib)\sqrt{\frac{a-ib}{a+ib}}=(a+ib)e^{\frac{i\omega}{2}},$$

其中

$$\omega=\arg\frac{a-ib}{a+ib},$$

并且当經过間断点 c_j 时，幅角 ω 必然发生在前面紧接着(93.7)以后所讲过的变化．

我們还要写出原来的非齐次問題 (93.1) 在已給类 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 的解之公式．这些公式有与 § 41 中的同样的形式．

当 $\varkappa\geqslant0$ 时，問題(93.1)的一个特解由公式

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\left\{\int_L\frac{c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)}+z^\varkappa\int_L\frac{t^{-\varkappa}c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)}\right\}-\frac{z^\varkappa X(z)}{2\pi i}\int_L\frac{t^{-\varkappa}c}{(a+ib)X^+(t)}\frac{dt}{t} \tag{93.15}$$

給出；当 $\varkappa\leqslant-1$ 时，(唯一的)解由公式

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int_L\frac{c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)}\tag{93.16}$$

給出,当 $\varkappa\leqslant-2$ 时,仅当适合存在性条件(93.12)或者(93.13)时,才有解.

我們单独地指出,当 $\varkappa=0$ 时,給出(特)解的表示式:

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int_L\frac{c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)}-\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L\frac{c\,dt}{(a+ib)X^+(t)t}.\tag{93.17}$$

3° 最后,我們推导半平面上的 Riemann-Hilbert 問題的解.我們可以沿用 § 42 及 § 83, 3° 段中所引进的記号. 由于和上面所讲过的几乎是完全类似的,因此,我們只須推导最終的公式,并且作一些簡要的說明.

半平面 S^+ 上的 Riemann-Hilbert 問題的提法和 1° 段的提法是完全类似的. 如果把边界 D (实軸) 上的无穷远点归入結点,那么,对于这一点,条件(93.1)应該这样来理解:对很大的 $|z|$,有 $|\Phi(z)|<$常数$\cdot|z|^\alpha$, $\alpha=$常数<1.

正象在 § 42 中那样,我們所感兴趣的問題可以归結为求解联結問題(93.4)或者同样的問題(93.5),其中在現在边界是直綫 D,而解应該适合条件:

$$\overline{\Phi}(z)=\Phi(z),$$

并且解可能除了在某些結点的邻域内外处处都是有界的.

已給的 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的指标由公式

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_D\tag{93.18}$$

确定,此处,仍然有

$$G(t)=-\frac{a-ib}{a+ib},$$

而 $\ln G(t)$ 的值应該按照在 § 83, 3° 段中那样来选取;应該怎样来理解公式(93.18)可以参看在 § 83, 3° 段同样的情形,以及参看同

一节中末尾的注釋. 整数 $\varkappa$ 可以是偶数,亦可以是奇数.

我們用公式[参看(83.20),(83.21)]

$$X(z)=\begin{cases} e^{\Gamma(z)} & \text{当 } z\in S^+, \\ \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^{\varkappa} e^{\Gamma(z)} & \text{当 } z\in S^-, \end{cases} \tag{93.19}$$

来确定联結問題在已給类 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 的典則函数 $X(z)$,其中在这一次有

$$\Gamma(z)=\frac{z+i}{2\pi i}\int_D \frac{\ln G_0(t)\,dt}{(t+i)(t-z)}+\gamma=\frac{z+i}{2\pi i}\int_D \frac{\Theta(t)\,dt}{(t+i)(t-z)}+\gamma,$$

$$G_0(t)=\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa} G(t)=-\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa} \frac{a-ib}{a+ib}, \tag{93.20}$$

$$\Theta(t)=\arg G_0(t)=\arg\left\{-\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa} \frac{a-ib}{a+ib}\right\}, \tag{93.21}$$

并且在后一个公式中的幅角应該按照所考慮的解类并根据在 §83, 3° 段中所加的条件来选取. 用 γ 表示暫时是任意的常数,为了化簡下面的公式才引进这个常数. 亦就是,可以这样来选取这个常数,使得 $\overline{\Gamma}(z)=\Gamma(z)$. 容易看出,为此只需令

$$\gamma=-\frac{i}{2\pi}\int_D \frac{\Theta(t)\,dt}{1+t^2}$$

就够了,因此,最后有

$$\begin{aligned}\Gamma(z)&=\frac{z+i}{2\pi}\int_D \frac{\Theta(t)\,dt}{(t+i)(t-z)}-\frac{1}{2\pi}\int_D \frac{\Theta(t)\,dt}{1+t^2}\\ &=\frac{1}{4\pi}\int_D\left[\frac{z+i}{t+i}+\frac{z-i}{t-i}\right]\frac{\Theta(t)\,dt}{t-z}.\end{aligned} \tag{93.22}$$

对这样选取的 $\Gamma(z)$, 正如在連續系数的情形中那样 (§42), 我們有

$$\overline{X}(z)=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\varkappa} X(z). \tag{93.23}$$

当 $\varkappa\geqslant 0$ 时,齐次 Riemann-Hilbert 問題在已給类的一般解,由公式

$$\Phi(z)=X(z)\left\{C_0+C_1\frac{z-i}{z+i}+\cdots+C_\varkappa\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^\varkappa\right\}$$

給出，其中 $C_0, C_1, \cdots, C_\varkappa$ 是一些适合条件

$$\bar{C}_k=C_{\varkappa-k} \tag{93.24}$$

的任意常数．当 $\varkappa\leqslant-1$ 时，齐次問題在已給类中沒有非零解．

当 $\varkappa\geqslant-1$ 时，非齐次 Riemann-Hilbert 問題在已給类中对每一个右端 $c(t)$ 都是可解的；特别是，当 $\varkappa=-1$ 时，它是单值可解的．当 $\varkappa\leqslant-2$ 时，当且仅当适合下述条件时，这个問題在已給类中才有(唯一的)解，这些条件是由条件(83.24)經过某些簡单的变换后得出的：当 $\varkappa$ 是偶数时，

$$\begin{aligned}&\int_D \Omega(t)c(t)\cos 2kt\,dt=0, \quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ -\frac{\varkappa}{2}-1,\\&\int_D \Omega(t)c(t)\sin 2kt\,dt=0, \quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\frac{\varkappa}{2}-1;\end{aligned} \tag{93.25}$$

当 $\varkappa$ 是奇数时，

$$\left.\begin{aligned}&\int_D \Omega(t)c(t)\cos(2k+1)t\,dt=0,\\&\int_D \Omega(t)c(t)\sin(2k+1)t\,dt=0,\end{aligned}\right\} k=0,\ 1,\ \cdots,\ -\frac{\varkappa+1}{2}-1; \tag{93.26}$$

在这些公式中 $\arg(t+i)=-\arg(t-i)$，而 $\Omega(t)$ 則表示实函数

$$\Omega(t)=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2(t)+b^2(t)}\ (1+t^2)}\, e^{-\frac{1}{4\pi}\int_D\left[\frac{t+i}{t_1+i}+\frac{t-i}{t_1-i}\right]\frac{\Theta(t_1)dt_1}{t_1-t}}; \tag{93.27}$$

关于在上式中根式前面的符号的选擇，可以参看在上一段中緊接着(93.14)之后所讲过的．

和所考虑的 Riemann-Hilbert 問題对应的非齐次联結問題的一个特解，由公式[参看(83.22)]

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_D\frac{z+i}{t+i}\,\frac{g(t)\,dt}{X^+(t)\,(t-z)} \tag{93.28}$$

給出．当 $\varkappa=-1$ 时，这个解亦是 Riemann-Hilbert 問題在已給类的(唯一)解．当 $\varkappa\geqslant 0$ 时，Riemann-Hilbert 問題的特解之一是

$$\frac{1}{2}[\Phi(z)+\overline{\Phi}(z)];$$

再加上齐次問題的一般解，我們便得出这个 Riemann-Hilbert 問題的一般解．

当 $\varkappa\leqslant -2$ 时，如果适合充分和必要条件(93.25)或者(93.26)，那么，我們便由公式(93.28)給出 Riemann-Hilbert 問題的(唯一)解．

注釋 如果无穷远点不是間断点，那么，和§83末尾注釋中所述完全类似，上面所得出的公式可以加以簡化；对 $G(-\infty)=G(+\infty)$，而 $g(-\infty)\neq g(+\infty)$ 的情形，亦是完全类似的．

§94. 特殊情形：全純函数論中的混合問題

假定在一条封閉的 Ляпунов 圍綫 L 上給定了一些互相不联接的弧 $a_1b_1, a_2b_2, \cdots, a_pb_p$ (在 L 上循着正方向依次經过点 $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots$)，又假定要求根据边界条件：

$$u^+=f(t) \quad 在 L' 上, \quad v^+=g(t) \quad 在 L'' 上, \tag{94.1}$$

来找一个在 S^+ 内是全純的函数 $\Phi(z)=u+iv$，这里 $f(t), g(t)$ 分别是給定在 L' 与 L'' 上的属于 H 类的函数，并且 L' 表示弧 a_jb_j $(j=1, 2, \cdots, p)$ 的全体，而 L'' 则表示 L 的其余部分，亦就是說，L'' 表示弧 $b_ja_{j+1}(j=1, 2, \cdots, p)$ 的全体；a_{p+1} 是指 a_1；正象在上一节中那样，我們假定，$\Phi(z)$ 可以連續拓展到 L 上可能除了点 a_j 及 b_j 以外的每一个点上，而在这些点附近，$\Phi(z)$ 分别适合不等式：

$$|\Phi(z)|<\frac{常数}{|z-a_j|^{\alpha}}, \quad |\Phi(z)|<\frac{常数}{|z-b_j|^{\alpha}}, \quad \alpha=常数<1. \tag{94.2}$$

这个問題是前面所討論过的問題：

$$a(t)u^+-b(t)v^+=c(t) \tag{94.3}$$

当

$$a(t)=1,\quad b(t)=0,\quad c(t)=f(t)\quad 在 L' 上,$$
$$a(t)=0,\quad b(t)=-1,\quad c(t)=g(t)\quad 在 L'' 上 \tag{94.4}$$

时的特殊情形．

亦象在上一节中那样，利用保角映射可以把这个問題归結为圓域的情形．因此，我們可以假定 L 是圓周 $|z|=1$，而 S^+ 是圓域 $|z|<1$．

根据上一节中所讲的一般解法，我們首先应該找出齐次联結問題 $(a+ib)\Phi^+ + (a-ib)\Phi^- = 0$（在 L 上）在已給类中适合附加条件

$$X_*(z)=z^{\varkappa}X(z) \tag{94.5}$$

的典则解 $X(z)$．在目前的情形下，后一个問題具有形式：

$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=0\quad 在 L' 上,$$
$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=0\quad 在 L'' 上. \tag{94.6}$$

(94.6) 中的第二个条件說明，L'' 不是函数 $\Phi(z)$ 的跳跃曲綫，因此，上述問題可以归結为要求根据条件(94.6)中的第一个，确定具有跳跃曲綫 $L'=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_pb_p$ 的分区全純函数 $\Phi(z)$ 的問題，亦就是說，可以归結为問題：

$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=0\quad 在 L' 上. \tag{94.7}$$

这个問題在 § 85 中我們已經解决过．

为了确定起見，我們将在最大的类（亦就是，在 h_0 类中）来找解．問題(94.7)对应的典则函数是(§ 85)

$$X(z)=\frac{C}{\sqrt{R(z)}},$$

其中 C 是异于零的任意常数，而

$$R(z)=\prod_{j=1}^{p}(z-a_j)(z-b_j); \tag{94.8}$$

根据在 § 85 中所加的条件，我們可以认为，对很大的 $|z|$，有

$$\sqrt{R(z)}=z^p+\alpha_1 z^{p-1}+\cdots. \tag{94.9}$$

与此相应,我們可以把

$$\sqrt{R(0)}=\left\{\prod_{j=1}^{p}a_jb_j\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{94.10}$$

理解为$\sqrt{R(z)}$上述的一个分枝当 $z=0$ 时的值. 注意到 $\bar{a}_j=a_j^{-1}$, $\bar{b}_j=b_j^{-1}$, 我們就得出

$$R_*(z)=\bar{R}\left(\frac{1}{z}\right)=\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{a_j}\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{b_j}\right)=\frac{R(z)}{z^{2p}R(0)},$$

容易驗証,由此可以得出

$$[\sqrt{R(z)}]_*=\frac{\sqrt{R(z)}}{z^p\sqrt{R(0)}},$$

这里根式按照剛才所讲的意义来理解,这意味着

$$X_*(z)=\frac{\bar{C}}{[\sqrt{R(z)}]_*}=\frac{\bar{C}\sqrt{R(0)}}{\sqrt{R(z)}}z^p=\frac{\bar{C}}{C}\sqrt{R(0)}\,z^pX(z). \tag{94.11}$$

因为在目前的情形下,指标

$$\varkappa=\varkappa_0=p \tag{94.12}$$

(这是由于我們知道 $X(z)$ 在无穷远处的阶数等于 $-\varkappa$), 因此, 如果我們令

$$\frac{\bar{C}}{C}\sqrt{R(0)}=1,$$

那么,关系式(94.5)是适合的.

我們引用記号

$$\sqrt{R(0)}=\left\{\prod_{j=1}^{p}a_jb_j\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{i\alpha}, \tag{94.13}$$

其中 α 为实数. 那么,我們显然可以取

$$C=e^{\frac{i\alpha}{2}}=\sqrt[4]{R(0)}. \tag{94.14}$$

这样一来,最后的联結問題(94.7)在 h_0 类的滿足条件(94.5)的典则解由公式

$$X(z)=\frac{\sqrt[4]{R(0)}}{\sqrt{R(z)}}=\frac{e^{\frac{i\alpha}{2}}}{\sqrt{R(z)}} \tag{94.15}$$

給出;这个函数同时亦是齐次联結問題(94.6)所要找的典則解.

因此,根据在上一节中所述,齐次混合問題(它是从(94.1)取 $f(t)=0$, $g(t)=0$ 而得出的)在 h_0 类的一般解,由公式

$$\Phi_0(z)=\frac{\sqrt[4]{R(0)}}{\sqrt{R(z)}}(C_0z^p+C_1z^{p-1}+\cdots+C_p) \qquad (94.16)$$

給出,其中 $C_0, C_1, \cdots, C_p$ 是(一般讲来,是复数)常数,这些常数由关系式

$$C_{p-j}=\bar{C}_j \quad (j=0, 1, \cdots, p) \qquad (94.17)$$

联系,并且再不受任何别的限制.

得出了函数 $X(z)$ 和齐次問題的一般解(94.16)之后,依据上一节中的公式(93.15),我們立可写出原来非齐次問題在 h_0 类的一般解:亦就是,公式(93.15)給出非齐次問題的某些特解;由这个公式所給出的特解再加上齐次問題的一般解(94.16),我們便得出原来問題在 h_0 类中所要找的一般解.

但是,如果取指标为零所对应的类中的解当作特解,那么,我們就得出一般解的更簡单的表示式.

例如,$h(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ 类便是指标为零的类,这类中的解在端点 $a_1, a_2, \cdots, a_p$ 处是有界的,而在端点 $b_1, b_2, \cdots, b_p$ 处则可能是无界的. 齐次联結問題(94.7)对应的典則解显然是

$$Z(z)=C\sqrt{\frac{R_a(z)}{R_b(z)}},$$

其中

$$R_a(z)=\prod_{j=1}^{p}(z-a_j), \quad R_b(z)=\prod_{j=1}^{p}(z-b_j). \qquad (94.18)$$

根据 §85 中所加的条件,把上述根式理解为使得

$$\left[\sqrt{\frac{R_a(z)}{R_b(z)}}\right]_{z=\infty}=1 \qquad (94.19)$$

的一个分枝.

和前面类似地，我們令

$$\sqrt{\frac{R_a(0)}{R_b(0)}}=\left\{\prod_{j=1}^{p}\frac{a_j}{b_j}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{i\beta}, \tag{94.20}$$

又令

$$C=e^{-\frac{i\beta}{2}}=\left\{\prod_{j=1}^{p}\frac{b_j}{a_j}\right\}^{\frac{1}{4}}.$$

那么，$h(a_1, a_2, \cdots, a_p)$类的典則函数

$$Z(z)=e^{-\frac{i\beta}{2}}\sqrt{\frac{R_a(z)}{R_b(z)}} \tag{94.21}$$

适合条件

$$Z_*(z)=Z(z).$$

与此同时，根据上一节中的公式 (93.17)，原来的非齐次問題的一个特解 $\Psi(z)$ 是

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi i}\frac{\sqrt{R_a(z)}}{\sqrt{R_b(z)}}\int_L\frac{\sqrt{R_b(t)}}{\sqrt{R_a(t)}}\frac{h(t)dt}{t-z}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{\sqrt{R_a(z)}}{\sqrt{R_b(z)}}\int_L\frac{\sqrt{R_b(t)}}{\sqrt{R_a(t)}}\frac{h(t)dt}{t}, \tag{94.22}$$

这里已令

$$h(t)=\begin{cases} f(t) & \text{在 } L' \text{ 上}, \\ ig(t) & \text{在 } L'' \text{ 上}, \end{cases} \tag{94.23}$$

而 $\dfrac{\sqrt{R_b(t)}}{\sqrt{R_a(t)}}=\sqrt{\dfrac{R_b(t)}{R_a(t)}}$ 理解为 $\dfrac{\sqrt{R_b(z)}}{\sqrt{R_a(z)}}=1:\sqrt{\dfrac{R_a(z)}{R_b(z)}}$ 在 L 上从左侧(亦就是，从 L 的內部)而取的值.

由公式

$$\Phi(z)=\Psi(z)+\Phi_0(z), \tag{94.24}$$

我們得出原来問題在 h_0 类的一般解，这里 $\Psi(z)$ 由公式(94.22)給出，而 $\Phi_0(z)$ 是由公式(94.16)，(94.17)确定的.

我們还指出，$h(a_1, a_2, \cdots, a_p)$类的一般解显然可以由公式

$$\Phi(z)=\Psi(z)+Ce^{-\frac{i\beta}{2}}\sqrt{\frac{R_a(z)}{R_b(z)}} \tag{94.25}$$

給出，其中 C 是实的任意常数.

§ 95. 半平面上的混合問題. М. В. Келдыш 和 Л. И. Седов 公式

假定在实軸 Ox 上給定有限条相互不連接的綫段 a_jb_j, $j=1, 2, \cdots, p$(假定 $a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots$). 我們用 D' 表示这些綫段的全体，而用 D'' 則表示实軸上的其余部分，因此，D'' 是由一些有限长的綫段 $b_ja_{j+1}(j=1, 2, \cdots, p-1)$ 和无限长的"綫段" b_pa_1 构成的，而 b_pa_1 由两条半直綫 $b_p<x<\infty$ 及 $-\infty<x<a_1$ 构成. 在我們的情形下，我們将混合問題叙述如下：

要求根据边界条件：

$$u^+=f(t) \quad 在 D' 上, \qquad v^+=g(t) \quad 在 D'' 上, \tag{95.1}$$

来找一个在上半平面 $y>0$ 内是全純的，在无穷远处是有界的函数 $\Phi(z)=u+iv$；我們假定，在 D 附近(我們用 $D=D'+D''$ 表示整个实数軸)，未知函数 $\Phi(z)$ 适合和上一节中的函数 $\Phi(z)$ 所适合的同样的条件，又假定，已知函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 分别在 D' 和 D''[包括无穷远点在内(§ 19)]上适合 H 条件.

利用我們常常利用的分式綫性变换 $z+i=-(\zeta+i)^{-1}$, 将上一节中的公式作簡单的变更，我們立可得出这个問題的解来.

但是，利用与在上一节中应用过的略有不同的但是完全类似的方法，我們可以得出更为簡单的結果. 由于这些方法彼此是类似的，因此我們只需作一个簡单的說明①.

与我們的問題对应的齐次問題具有形式：

$$\begin{aligned} &\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=0 \quad 在 D' 上, \\ &\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=0 \quad 在 D'' 上, \end{aligned} \tag{95.2}$$

并且要求所要找的解具有性质：

$$\overline{\Phi}(z)=\Phi(z).$$

① 亦参照在 Ф. Д. Гахов [3], [4] 中給出的稍欠一般的問題之解.

我們取函数

$$X(z)=\frac{1}{\sqrt{R(z)}} \tag{95.3}$$

当作这个齐次問題的解，它起着 h_0 类的典則解的作用，这里

$$R(z)=\prod_{j=1}^{p}(z-a_j)(z-b_j); \tag{95.4}$$

把 $\sqrt{R(z)}$ 理解为在沿着 D' 而割开的平面上是全純的，并且在 $z=\infty$ 附近有

$$\sqrt{R(z)}=z^p+\alpha_1 z^{p-1}+\cdots \tag{95.5}$$

的一个分枝；等式(95.5)等价于 $\sqrt{R(z)}$ 在 Ox 軸上当 $x>b_p$ 时取正値.

容易看出，$X_*(z)=\overline{X}(z)=X(z)$. 我們不把这个解叫做典則解，是由于它在边界 D 上（当 $z=\infty$ 时）成为零的阶数 $\geqslant 1$；但是，在这里我們可以完全象利用典則解那样来利用它. 亦就是，容易看出，由 (95.1) 取 $f(t)=g(t)=0$ 而得出的齐次問題在 h_0 类的一般解，由公式

$$\Phi_0(z)=\frac{C_0 z^p+C_1 z^{p-1}+\cdots+C_p}{\sqrt{R(z)}} \tag{95.6}$$

給出，其中 $C_0, C_1, \cdots, C_p$ 是**实**的任意常数.

正象在上一节中那样，我們現在来找問題 (95.2) 在 $h(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ 类的典則解 $Z(z)$. 这样的解除了差一个常数因子而外显然是

$$Z(z)=\sqrt{\frac{R_a(z)}{R_b(z)}}, \tag{95.7}$$

其中

$$R_a(z)=\prod_{j=1}^{p}(z-a_j), \quad R_b(z)=\prod_{j=1}^{p}(z-b_j), \tag{95.8}$$

而把 $\sqrt{\frac{R_a(z)}{R_b(z)}}=\frac{\sqrt{R_a(z)}}{\sqrt{R_b(z)}}$ 理解为在沿着 D' 而割开的平面上是全純的，并且在无穷远处取値 1 的那一个分枝. 在这种情形下 $Z_*(z)$

$=\bar{Z}(z)=Z(z)$.

原来問題(95.1)的特解之一 $\Psi(z)$ 由公式[与(42.19)作一比較]

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi i}\frac{\sqrt{R_a(z)}}{\sqrt{R_b(z)}}\int_L\frac{\sqrt{R_b(t)}}{\sqrt{R_a(t)}}\cdot\frac{h(t)dt}{t-z} \tag{95.9}$$

給出，其中

$$h(t)=\begin{cases}f(t) & \text{在 } D' \text{ 上},\\ ig(t) & \text{在 } D'' \text{ 上},\end{cases} \tag{95.10}$$

而把 $\frac{\sqrt{R_b(t)}}{\sqrt{R_a(t)}}$ 理解为当 z 从上半平面而趋于 t 时，$\frac{\sqrt{R_b(z)}}{\sqrt{R_a(z)}}$ 所取的值；把 $\frac{\sqrt{R_b(z)}}{\sqrt{R_a(z)}}$ 本身理解为值 $\sqrt{\frac{R_a(z)}{R_b(z)}}$ 的倒数.

这样一来，原来問題(95.1)在 h_0 类的一般解由公式

$$\Phi(z)=\Psi(z)+\Phi_0(z) \tag{95.11}$$

給出，其中 $\Phi_0(z)$ 与 $\Psi(z)$ 是由公式(95.6)及(95.9)确定的函数.

同一个問題在 $h(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ 类的一般解由公式

$$\Phi(z)=\Psi(z)+C\frac{\sqrt{R_a(z)}}{\sqrt{R_b(z)}}$$

給出，其中 C 是实的任意常数.

在这一节中所得出的一些公式都是 М. В. Келдыш 和 Л. И. Седов 的公式[①].

---

① М. В. Келдыш 和 Л. И. Седов[1]; Л. И. Седов[1]; 亦可参看 A. Signorini [1].

第 五 章

在一般情形下的奇异积分方程. 某些应用

在这一章的第一部分内，我們要論述具有 Cauchy 型积分的奇异积分方程当其积分路徑是任意一条逐段光滑曲綫，而对应的特征方程(参看 § 96)的系数可以是間断的，不过这些系数应該是属于 H_0 类的情形时的理論. 我們約定称这种情形为一般情形.

在我們此处所叙述的那种形式下，这一种理論是由著者的論文[6]中給出的，并且在 Н. И. Мусхелишвили 和 Д. А. Квеселава 的論文[1]中对它作了重要的补充. 在后一篇論文中，第一次引进了解的相联的类的概念，并且証明了在 § 102 中将要导出的那些基本定理.

其实，应該指出，在上列論文中叙述的理論适用于积分路徑是一条断續的光滑曲綫的情形①. 但是，把下面的叙述和上面提到的論文作一比較②，几乎毫无例外地容易得出所有的結果，而那里的証明也差不多可以逐字逐句地移植到此处我們所感兴趣的一般情形上；基本的区别只是在于：代替在 § 22 中所推导出的命题，我們利用在 § 26 中所得出的若干更为一般的命题.

---

① 在 § 103, 2° 段中，将要讲到当积分路徑是一些沒有公共点的、光滑封閉圍綫的全体，而特征部分的系数具有(第一类的)間断点的另一个特殊情形.

② 在本书第一版中曾經叙述了它們的內容.

在W.J.Trjitzinsky的論文[1]中，把上面所提到的著者的論文[6]中的結果，推广到了当积分路徑是一些可以有有限个公共点的、封閉的和敞开的圍綫所构成的情形．其后，Д.А.Квеселава[7]把前一著者的叙述和結果作了很大的簡化，并且也把Н.И.Мусхелишвили 和 Д.А.Квеселава 的論文[1]中的結果推广到了上述情形．

下面要叙述的結果比之上列各著者的結果更为一般，据我所知，这些結果是用更自然和更直接的方法得出的；后一种方法主要和一般情形下的联結問題（第四章第一部分）的求解有关，下面所叙述的理論实质上依据了这一种情形下的联結問題．

在第二部分中，我們要給出在第一部分中所叙述的理論的某些簡单应用．在第三部分中，我們要討論不同于前面早已討論过的一种形式的奇异积分方程．而在第四部分中，我們要給出对于彈性理論中两个重要的混合問題的应用．最后，在第五部分中，我們对某些别的結果和推广作一簡单的介紹．

I. 一般情形下的奇异积分方程

§96. 定义、記号和术語

1° 在整个这一部分中，如果不作相反的声明，L便表示一条逐段光滑曲綫(§1)．我們用L_k, $k=1, 2, \cdots, p$表示构成L的那些光滑弧，而以c_k, $k=1, 2, \cdots, p$表示曲綫L的結点（包括端点在内）．以t_0, t, t_1表示曲綫L上的点．

2° 在这一部分中，我們将研究形式为$\mathbf{K}\varphi=f$的方程，其中$\mathbf{K}$是由公式

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t_0, t)\varphi(t)dt}{t-t_0} \tag{I}$$

所确定的算子，这里$A(t)$与$K(t_0, t)$表示适合一定条件的函数，

我們現在来指出这些条件.

亦就是,为了有可能不利用特别复杂的方法,而利用与我們在第二章中用过的类似的方法,我們将假定算子 $\mathbf{K}$ 可以表成下述两种形式之一:

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0, t)\varphi(t)\,dt \tag{a}$$

或者

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k'(t_0, t)\varphi(t)\,dt, \tag{b}$$

其中 $A(t)$, $B(t)$, $k(t_0, t)$, $k'(t_0, t)$ 都是 L 上的 H_0 类函数; 对后面两个函数所加的条件可以大大削弱而不改变結果, 但是我們在这里将不論述到这些.

如果置

$$B(t) = K(t, t),$$

$$k(t_0, t) = \frac{K(t_0, t) - B(t_0)}{t-t_0};\quad k'(t_0, t) = \frac{K(t_0, t) - B(t)}{t-t_0},$$

又若假定函数 $B(t)$, $k(t_0, t)$ 或者 $k'(t_0, t)$ 适合上面所指出的条件,那么,从算子 $\mathbf{K}$ 的表示式(I)之形式可以导出形式(a)或者(b).

特别是,如果两个函数 $k(t_0, t)$ 及 $k'(t_0, t)$ (对两个变量)都属于 H_0 类, 那么, 方程(I)可以化为(a), (b)两种形式之一. 但是, 由于这个假定并不提供任何实质的簡化, 而只会貶低一般性, 因此,我們不采用这个假定.

这样一来,在我們所作的假定下, 一般讲来, 形式如(a)和(b)的算子中一个不能归結为另一个. 例如,我們用上面把形式为(I)的算子化成形式(a)的方法, 企图把形式为(b)的算子化为形式

(a)，我們便得出

$$A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{B(t)\varphi(t)dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int_L k'(t_0,\ t)\varphi(t)dt$$

$$=A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_L\left\{\frac{B(t)-B(t_0)}{t-t_0}+k'(t_0,\ t)\right\}\varphi(t)dt;$$

但是，一般讲来，当 t_0 与 t 位于集中在結点 c_k 处的不同的弧 L_j 上时，比值 $\frac{B(t)-B(t_0)}{t-t_0}$ 在 c_k 的邻域内具有 $(t-t_0)^{-1}$ 型的奇异性．

3°．今后我們永远把**奇异算子**理解为形式为(a)和(b)之一的算子，即把它理解为由下列公式所确定的两个算子 **K**, **K**′ 中的一个：

$$\mathbf{K}\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0,\ t)\varphi(t)dt \tag{96.1}$$

及

$$\mathbf{K}'\psi\equiv A(t_0)\psi(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{B(t)\psi(t)}{t-t_0}dt+\frac{1}{\pi i}\int_L k(t,\ t_0)\psi(t)dt, \tag{96.2}$$

其中 $A(t)$, $B(t)$, $k(t,\ t_0)$在 L 上都是属于 H_0 类的．

我們現在来說明把第二个算子(亦就是，形式为(b)的算子)写成和上面略为不同的形式之理由．

保留在§46中所給出的形式为(I)的算子之相联算子的定义，我們可以把算子(96.1)和(96.2)叫做是彼此**相联**的算子．正象在第二章中所研究过的情形那样，相联的算子之間以及与它們对应的奇异积分方程之間彼此有着紧密的联系．因此，不单独地研究形式为(b)的算子，而是把它当作形式为(a)的算子的相联算子来研究是恰当的(为了不增加不必要的术語和記号)．这当然一点也不限制一般性，并且尤其合理的是同时考虑相联的算子是不

可避免的.

4°. 如果在 L 上处处成立

$$A(t)+B(t)\neq 0,\quad A(t)-B(t)\neq 0, \tag{96.3}$$

我們便称算子 $\mathbf{K}$ 与 $\mathbf{K}'$ 是正則型的算子；正象通常那样，条件 (96.3) 在 $t=c_j$ 处成立是指：当 t 沿着任意一条具有端点 c_j 的弧 L_k 而趋于 c_j 时，$A(t)+B(t)$ 和 $A(t)-B(t)$ 的极限都不等于零.

在今后我們总假定所考虑的算子是正則型的算子.

5°. 我們把由公式

$$\mathbf{K}^0\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} \tag{96.4}$$

所定义的算子 $\mathbf{K}^0$ 叫做算子 $\mathbf{K}$ 的特征部分，而把函数 $A(t_0)$，$B(t_0)$ 叫做特征部分的系数.

如果我們用 $\mathbf{k}$ 表示第一类的 Fredholm 算子

$$\mathbf{k}\,\varphi\equiv\frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0,\ t)\varphi(t)\,dt, \tag{96.5}$$

那么，算子 $\mathbf{K}$ 可以表成算子 $\mathbf{K}^0$ 和 $\mathbf{k}$ 之和的形式，即

$$\mathbf{K}\varphi=\mathbf{K}^0\varphi+\mathbf{k}\varphi. \tag{96.6}$$

和 $\mathbf{K}^0$ 相联的算子 $\mathbf{K}^{0\prime}$ 由公式

$$\mathbf{K}^{0\prime}\psi\equiv A(t_0)\psi(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{B(t)\psi(t)\,dt}{t-t_0} \tag{96.7}$$

确定.

与此相应，有

$$\mathbf{K}'\psi=\mathbf{K}^{0\prime}\psi+\mathbf{k}'\psi, \tag{96.8}$$

其中 $\mathbf{k}'$ 是与算子 $\mathbf{k}$ 相联的第一类 Fredholm 算子，这就是說

$$\mathbf{k}'\psi\equiv\frac{1}{\pi i}\int_L k(t,\ t_0)\psi(t)\,dt. \tag{96.9}$$

6°. 我們可以把算子 $\mathbf{K}$ 与 $\mathbf{K}'$ 应用到（在 L 上的）H^* 类中的函数 φ 和 ψ 上. 根据 § 26 中的結論，容易看出，这些算子把 H^* 类的函数变成这同一类中的函数. 特別是，这些算子把 H_0 类中

的函数变成 H_{ε}^{*} 类的函数,而把 H_{ε}^{*} 类的函数变成此同一类中的函数.

7°. 在 §46 中我們已經見到过重要的公式

$$\int_L \psi \mathbf{K} \varphi dt = \int_L \varphi \mathbf{K}' \psi dt, \tag{96.10}$$

其中 L 是一些光滑的閉圍綫的組合,而 φ 及 ψ 都是 H 类中的任意函数.

容易看出,在 L 是任意一条逐段光滑曲綫的情形下,这个公式仍然有效. 但是,要求我們把这个公式能应用到比 H 类更广泛的 H^* 类的函数 φ 与 ψ 上去. 如果 φ 与 ψ 是 H^* 类中的任意两个函数,那么,公式(96.10)中的积分可能是发散的. 但是,以后我們仅对在每一个結点的邻域內在函数 φ 和 ψ 之中有一个是属于 H_{ε}^{*} 类的情形来应用公式(96.10). 容易驗証,在这种情形下,公式(96.10)是保持有效的.

8°. 我們把下列两种形式的方程

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0,\ t)\varphi(t)\,dt = f(t_0) \tag{96.11}$$

及

$$\mathbf{K}'\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\psi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t,\ t_0)\psi(t)\,dt = g(t_0) \tag{96.12}$$

叫做**奇异积分方程**,这里 $f(t)$ 和 $g(t)$ 都是給定在 L 上的 H^* 类的函数;我們总是在 H^* 类中找这些方程的解.

今后我們并不要求方程(96.11)**或者**(96.12)**在曲綫** L **的結点处是满足的.**

我們总假定这些方程是**正則型的方程**, 亦就是說, 算子 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{K}'$ 是**正則型的算子**.

我們把方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 和 $\mathbf{K}'\psi=g$ 叫做是**相联的方程**,而不管它們的右端 f 和 g 如何.

通常我們并不单独地討論形式为 $\mathbf{K}'\psi=g$ 的方程（参照3°段),而把它当作方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 的相联方程来討論,这样做的唯一目的是为了不增加术語和記号，并且这样做一点也不会給我們帶来局限性.

9°. 我們把最簡单的形式为

$$\mathbf{K}^0\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0)\qquad(96.13)$$

的方程叫做**特征方程**,而函数 $A(t_0)$ 及 $B(t_0)$ 叫做它的系数.

我們把方程

$$\mathbf{K}^{0\prime}\psi\equiv A(t_0)\psi(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{B(t)\psi(t)}{t-t_0}\,dt=g(t_0)\qquad(96.14)$$

叫做**特征方程的相联方程**.

注釋 我們把曲綫 L 上的結点不仅理解为在几何意义下的結点,而且还理解为这条曲綫上的另一些点，在这些点处，允許所考慮的函数是間断的(参照 §78).

我們会看到,起主要作用的是函数 $A(t)$ 和 $B(t)$ 的間断性,而并不是曲綫 L 的几何性质(亦就是指,角点的存在等等).

§97. 特征方程的求解

1°. 正如和我們在第二章中所做的类似,我們从求解特征方程

$$\mathbf{K}^0\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0)\qquad(97.1)$$

入手. 象在前面曾經指出过的那样,我們将假定在 L 上处处有

$$A^2(t)-B^2(t)\neq 0.\qquad(97.2)$$

此外,我們暫时还认为 $f(t)$ **是属于** H_0 **类的**;而且正如已經商定好的一样,**我們要在** H^* **类中来找方程**(97.1)**的解**.

我們考虑在无穷远处取值零的分区全純函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}. \tag{97.3}$$

对于这一个函数，有

$$\begin{aligned}\varphi(t_0)&=\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0),\\ \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}&=\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0),\end{aligned} \tag{97.4}$$

从而函数 $\Phi(z)$ 应该是联結問題

$$(A+B)\Phi^+-(A-B)\Phi^-=f \tag{97.5}$$

或者

$$\Phi^+(t_0)=G(t_0)\Phi^-(t_0)+\frac{f(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)} \tag{97.6}$$

的在无穷远处取值零的解，这里

$$G(t_0)=\frac{A(t_0)-B(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}. \tag{97.7}$$

这个問題的研究与在前一章（第一部分）中的研究是类似的.

現在我們把这个問題对应的特殊結点和普通結点（§ 80）叫做**算子 $\mathbf{K}^0$ 或者方程 $\mathbf{K}^0\varphi=f$ 对应的特殊結点和普通結点.**

我們仍然用 $c_1, c_2, \cdots, c_m\,(m\leqslant n)$ 表示普通結点.

問題(97.6)在无穷远处是有限阶的最一般的（H^* 类中的）解，例如，可以写成形式（§ 80, 4° 段）:

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{[A(t)+B(t)]X^+(t)(t-z)}+X_0(z)Q(z), \tag{97.8}$$

其中 $X(z)$ 是与問題(97.6)相应的某一类 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 中的典則函数，$X_0(z)$ 是此同一个問題在 h_0 类中的典則函数，而 $Q(z)$ 是某一个多項式.

解 $\Phi(z)$ 还应該适合条件 $\Phi(\infty)=0$；我們以后会考慮到这一个条件的，而現在我們从下述事实来推导若干結論：**如果方程 (97.1) 有解存在，那么，它所有的解都必須由公式**

$$\varphi(t_0)=\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0)$$

給出,在其中的 $\Phi(z)$ 是形式为(97.8)的函数.

我們来計算 $\varphi(t_0)$. 为此,引进記号

$$Z(t_0)=[A(t_0)+B(t_0)]X^+(t_0)$$
$$=[A(t_0)-B(t_0)]X^-(t_0); \qquad (97.9)$$

函数 $X^+(t_0)$ 和 $X^-(t_0)$ 由公式(78.13)确定.

我們把函数 $Z(t)$ 叫做与方程 $\mathbf{K}^0\varphi=f$ 或者算子 $\mathbf{K}^0$ 对应的已給类 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 中的典則函数.

特別是,对应于 $q=0$ 的情形的 $h_0=h(0)$ 类之典則函数 $Z_0(t)$,由公式

$$Z(t_0)=[A(t_0)+B(t_0)]X_0^+(t_0)=[A(t_0)-B(t_0)]X_0^-(t_0) \qquad (97.9\text{a})$$

确定.

引进記号

$$A^*(t_0)=\frac{A(t_0)}{A^2(t_0)-B^2(t_0)}, \quad B^*(t_0)=\frac{B(t_0)}{A^2(t_0)-B^2(t_0)}. \qquad (97.10)$$

那末,利用 Сохоцкий-Plemelj 公式,我們容易得出(与 §47 作比較)

$$\varphi(t_0)=\mathbf{K}^*f+B^*(t_0)Z(t_0)P(t_0), \qquad (97.11)$$

其中

$$\mathbf{K}^*f\equiv A^*(t_0)f(t_0)-\frac{B^*(t_0)Z(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{f(t)\,dt}{Z(t)(t-t_0)}, \qquad (97.12)$$

而 $P(t_0)$ 表示一个多項式.

根据函数 $Z(t_0)$ 的定义(97.9),并且利用公式(78.13)和(78.14),显然有

$$Z(t_0)=\omega_0(t_0)\prod_{k=1}^{n}(t_0-c_k)^{\gamma_k}, \qquad (97.13)$$

其中 $\omega_0(t_0)$ 是一个恒不为零的 H_0 类中的函数,而

$$0<\operatorname{Re}\gamma_k<1 \quad (k=1, 2, \cdots, q);$$
$$-1<\operatorname{Re}\gamma_k<0 \quad (k=q+1, \cdots, m);$$

$$\operatorname{Re}\gamma_k=0 \quad (k=m+1, \cdots, n). \tag{97.14}$$

对于 $Z_0(t_0)$ 亦有这同样的公式，只需在后一个情形中假定 $q=0$.

2° 从上面的結果出发，可以得出下述結論：

在所有特殊結点 $c_k(k=m+1, \cdots, n)$ 的邻域內，解 $\varphi(t)$ 是属于 H_s^* 类的．此外，它在那些 $\gamma_k \neq 0$ 的特殊結点 c_k 附近是有界的；在那些 $\gamma_k=0$ 的特殊結点 c_k 附近它可能象 $\ln(t-c_k)$ 那样是无界的．所有这些都可以从 § 26 的結果推出．

如果解 $\varphi(t)$ 在任何普通結点的邻域內是有界的，那么，它在这个邻域內是属于 H_0 类的．

事实上，設 c_k 是一个普通結点，而函数 $\varphi(t_0)$ 在这一个結点附近是有界的．在公式(97.11)，(97.12)中作为典則函数的 $Z(t)$，我們取使它在 c_k 处取值为零的函数．那么，(97.11) 右端的第一項在 c_k 的邻域內是属于 H_0 类的(§ 26)．因此，为了使得函数 $\varphi(t_0)$ 是有界的，必需使得 c_k 是多项式 $P(t_0)$ 的根，于是，我們的結論便变成显然的了．

3° 現在我們把所討論的积分方程 $\mathbf{K}^0\varphi=f$ 所有可能的解分成类，归进 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类 $(0 \leqslant q \leqslant m)$ 中的所有解 $\varphi(t)$ 在普通結点 $c_1, c_2, \cdots, c_q$ 的邻域內都是保持有界的．我們曾經看到这样的解在結点 $c_1, c_2, \cdots, c_q$ 的邻域內是属于 H_0 类的；因此，在这里我們所給出的解的类之定义与在 § 82 中对函数 $\varphi(t)$ 曾引用过的类之定义是一致的．

容易看出，积分方程 (97.1) 在 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中的解，依据公式(97.3)，对应于联結問題 (97.6) 在此同一类中的解①．因此，为了找出方程(97.1)在这个类中的所有解，只需找出联結問題(97.6)在此同一类中的在无穷远处取值零的所有解．

① 如果函数 $\varphi(t_0)$ 在已給的普通結点 c 附近是有界的，从而 $\varphi(t_0)$ 在这个結点的邻域內是属于 H_0 类的，那么，由公式(97.3)所确定的函数 $\Phi(z)$ 在 c 附近是几乎有界的．但是此时，正如我們知道的(§ 82)，这个函数在 c 附近必然是有界的．

从已經知道后一个問題的解 (§ 80) 这一事实出发，我們容易导出下述的結論.

我們把联結問題(97.6)的已給的 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$类的指标 $\varkappa$ 叫做方程 $\mathbf{K}^0\varphi=f$ 或者算子 $\mathbf{K}^0$ 的此同一类的指标. 此时,如果把 $Z(t)$理解为 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$类的典則函数,那么,我們便有:

当 $\varkappa\geqslant 0$ 时,方程 $\mathbf{K}^0\varphi=f$ 在 $h=h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中所有的解,都可以由公式

$$\varphi(t_0)=\mathbf{K}^*f+B^*(t_0)Z(t_0)P_{\varkappa-1}(t_0) \qquad (97.15)$$

給出,其中 $P_{\varkappa-1}(t_0)$ 表示次数不超过 $\varkappa-1$ 次的任意多項式[当 $\varkappa=0$ 时, $P_{\varkappa-1}(t_0)\equiv 0$];

当 $\varkappa<0$ 时,当适合(充分和必要)条件

$$\int_L \frac{t^k f(t)dt}{Z(t)}=0, \quad k=0, 1, \cdots, -\varkappa-1 \qquad (97.16)$$

时,(唯一)解才存在,并且由同一个公式(97.15)在其中取

$$P_{\varkappa-1}(t_0)=0$$

而給出.

由前面所述还可以推出，当 $\varkappa\leqslant 0$ 时，齐次方程 $\mathbf{K}^0\varphi=0$ 沒有 h 类的异于零的解；当 $\varkappa>0$ 时，齐次方程 $\mathbf{K}^0\varphi=0$ 在 h 类中恰好有 $\varkappa$ 个綫性无关解,全部解都可以由公式

$$\varphi(t)=B^*(t)Z(t)P_{\varkappa-1}(t) \qquad (97.17)$$

給出,其中 $P_{\varkappa-1}(t)$ 是任意一个次数不超过 $\varkappa-1$ 次的多項式.

容易看出，如果函数 $f(t)$ 不属于 H_0 类，而是属于 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$类,那么上述結果都仍然是有效的. 只是在这种情形下,如果函数 $f(t)$在 $\gamma_k\neq 0$ 的那些特殊結点处是无界的,那么,解在那些結点处亦可能是无界的.

注釋 我們考察由在(97.1)中以 $-B(t_0)$ 代替 $B(t_0)$ 而得到的方程

$$\mathbf{K}_1\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)-\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=f(t_0). \qquad (97.18)$$

这个方程与方程(97.1), 除了 $B(t_0)=$常数的情形外, 一般并不是相联的(在下一节中将要討論相联方程). 和方程 (97.18) 对应的联結問題,可以由問題(97.6)将 $B(t_0)$ 换成 $-B(t_0)$ 而得出, 即具有形式:

$$\Psi^+(t_0)=[G(t_0)]^{-1}\Psi^-(t_0)+\frac{f(t_0)}{A(t_0)-B(t_0)}, \quad (97.19)$$

这是因为当 B 换成 $-B$ 时, 函数 G 换成了 G^{-1}. 这样一来, 和問題(97.6)及(97.19)对应的齐次联結問題是相联的 (§ 79). 因此, 根据 § 79 中的結果,如果 $X(z)$ 和 $\varkappa$ 是与問題 (97.6) 相应的 h 类中的典則函数和指标,那么, $[X(z)]^{-1}$ 和 $-\varkappa$ 将是与問題(97.19) 相应的 h' 类中的典則函数和指标,这里 h' 类是 h 类的相联类.

現在注意到确定和方程 (97.1) 对应的典則函数 $Z(t)$ 的公式 (97.9) 以及适用于方程 (97.19) 的这同样的公式, 我們可以导出下述結論.

如果把

$$B(t), \qquad Z(t), \qquad \varkappa, \; h$$

分别换成

$$-B(t), \; \frac{A^2(t)-B^2(t)}{Z(t)}, \; -\varkappa, \; h',$$

这里 h' 表示 h 的相联类, 那么本节的所有公式和結果都仍然是有效的.

§ 98. 特征方程的相联方程的求解

1° 現在我們討論方程

$$\mathbf{K}^{0\prime}\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\psi(t)}{t-t_0}dt=g(t_0), \quad (98.1)$$

它是方程 $\mathbf{K}^0\varphi=f$ 的相联方程. 我們假定函数 $g(t)$ 是属于 H_0 类的, 亦象通常那样, 我們要在 H^* 类中找它的解 $\psi(t)$.

引进在无穷远处取值零的分区全純函数

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{B(t)\psi(t)dt}{t-z},$$

注意到,

$$B(t_0)\psi(t_0)=\Psi^+(t_0)-\Psi^-(t_0),$$
$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{B(t)\psi(t)dt}{t-t_0}=\Psi^+(t_0)+\Psi^-(t_0), \tag{98.2}$$

与 § 48 中的情形完全类似,可以确信,找方程 (98.1) 的解等价于求解下列边值問題:要求按条件:

$$\begin{aligned}A(t_0)\psi(t_0)&=\Psi^+(t_0)+\Psi^-(t_0)+g(t_0),\\ B(t_0)\psi(t_0)&=\Psi^+(t_0)-\Psi^-(t_0),\end{aligned} \tag{98.3}$$

来找一个 H^* 类中的函数 $\psi(t)$ 和一个在无穷远处取值零的分区全純函数 $\Psi(z)$. 条件(98.3)同样地等价于条件

$$(A+B)\psi=2\Psi^++g,\quad (A-B)\Psi=2\Psi^-+g$$

或者

$$\psi=\frac{2\Psi^+}{A+B}+\frac{g}{A+B},\quad \psi=\frac{2\Psi^-}{A-B}+\frac{g}{A-B}. \tag{98.4}$$

比較右端,我們就导出联結問題:

$$\Psi^+(t_0)=[G(t_0)]^{-1}\Psi^-(t_0)+\frac{B(t_0)g(t_0)}{A(t_0)-B(t_0)}, \tag{98.5}$$

这里,亦象在上一节中那样,

$$G(t_0)=\frac{A(t_0)-B(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}, \tag{98.6}$$

幷且要求找在无穷远处取值零的解 $\Psi(z)$.

解决了这个問題,根据(98.4)中的任意一个我們就求得$\psi(t)$.

齐次联結問題

$$\Psi^+(t_0)=[G(t_0)]^{-1}\Psi^-(t_0) \tag{98.7}$$

是与上节問題(97.6)对应的齐次問題

$$\Phi^+(t_0)=G(t_0)\Phi^-(t_0) \tag{98.8}$$

的相联問題(参看 § 79; 亦可以和上一节中的注釋作一比較). 因此, 如果 $X(z)$ 是問題 (98.8) 的 $h=h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中的典則

解，那么，$[X(z)]^{-1}$ 将是問題 (98.7) 在相联类 $h'=h(c_{q+1}, c_{q+2}, \cdots, c_m)$ 中的典則解，这一个結果可以由 §79 中所讲过的結果推出．因此，容易看出，問題 (98.5) 在无穷远处是有限阶的一般解，可以写成下述形式：

$$\Psi(z)=\frac{[X(z)]^{-1}}{2\pi i}\int_L \frac{X^+(t)B(t)g(t)dt}{[A(t)-B(t)](t-z)}+[X_m(z)]^{-1}Q(z), \tag{98.9}$$

其中 $Q(z)$ 是一个多項式，$X_m(z)$ 是齐次問題 (98.8) 在 $h_m=h(c_1, c_2, \cdots, c_m)$ 类中的典則解，而因之，$[X_m(z)]^{-1}$ 是問題 (98.7) 的 h_0 类中的典則解．

我們还应該表明条件 $\Psi(\infty)=0$．暫时不去注意这个条件，和上一节中所做的完全类似，我們从下述事实引进某些推論：积分方程 (98.1) 的每一个解都应該由公式 (98.4) 給出，其中 $\Psi(z)$ 表为形式如 (98.9) 的表示式．按公式 (98.4) 之一来計算 $\psi(t_0)$，經过一些和上一节中的演算相类似的簡单演算之后（亦可以参照 §48），我們得出

$$\psi(t_0)=\mathbf{K}^{*\prime}g+\frac{P(t_0)}{Z_m(t_0)}, \tag{98.10}$$

其中 $P(t_0)$ 是某一个多項式，$Z_m(t_0)$ 是对应上一节中的方程 (97.1) 在 $h_m=h(c_1, c_2, \cdots, c_m)$ 类中的典則函数，并且

$$\mathbf{K}^{*\prime}g\equiv A^*(t_0)g(t_0)+\frac{1}{\pi i Z(t_0)}\int_L \frac{Z(t)B^*(t)g(t)dt}{t-t_0}, \tag{98.11}$$

因此，$\mathbf{K}^{*\prime}$ 是上一节中算子 $\mathbf{K}^*$ 的相联算子．

2°. 我們把問題 (98.7) 所对应的特殊結点或者普通結点叫做**算子 $\mathbf{K}^{0\prime}$ 或者方程 $\mathbf{K}^{0\prime}\psi=g$ 所对应的特殊結点或者普通結点**；这亦就是 (98.7) 的相联問題 (98.8) 或者 $\mathbf{K}^{0\prime}$ 的相联算子 $\mathbf{K}^0$ 的特殊結点和普通結点．

容易看出（比較上一节），在所有特殊結点的邻域内，每一个解 $\psi(t)$ 都是属于 H_s^* 类的；它在 $\gamma_k\neq 0$ 的那些特殊結点附近是有界

的，而在 $\gamma_k=0$ 的那些特殊結点附近 $\psi(t)$ 可能亦象 $\ln(t-c_k)$ 一样是无界的.

再者，正如在上一节中那样，如果解在任何普通結点附近是有界的，那么，它在这一个結点的邻域內必然是属于 H_0 类的.

3° 我們現在把方程 (98.1) 的所有可能的解完全象在上一节中那样分成类.

我們把齐次联結問題 (98.7) 的已給类的指标 $\varkappa$ 叫做方程 (98.1) 或者算子 $\mathbf{K}^{0\prime}$ 的同一类的指标.

如果 $X(z)$ 是問題 (98.8) 在 $h=h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中的典則函数，那么，正如已經指出过的，$[X(z)]^{-1}$ 是問題 (98.7) 在相联类 $h'=h(c_{q+1}, c_{q+2}, \cdots, c_m)$ 中的典則解. 因此，相联的方程 (97.1) 和 (98.1) 的相联的类 h 和 h' 之指标 $\varkappa$ 和 $\varkappa'$ 大小相等而符号相反：

$$\varkappa'=-\varkappa.$$

根据前面所叙述的結果，容易建立下述命題：

如果 $\varkappa'=-\varkappa\geqslant 0$，則方程 (98.1) 在 $h'=h(c_{q+1}, c_{q+2}, \cdots, c_m)$ 类中所有的解，都可以由公式

$$\psi(t_0)=\mathbf{K}^{*\prime}g+\frac{P_{\varkappa'-1}(t_0)}{Z(t_0)} \tag{98.12}$$

給出，其中 $P_{\varkappa'-1}(t_0)$ 是次数不超过 $\varkappa'-1$ 次的任意多項式（当 $\varkappa'=0$ 时，$P_{\varkappa'-1}(t_0)\equiv 0$），而 $Z(t_0)$ 是相联方程 (97.1) 在 h 类中的典則函数，h 类是 h' 类的相联类.

如果 $\varkappa'=-\varkappa<0$，則仅当 $g(t)$ 适合条件

$$\int_L Z(t)B^*(t)g(t)t^j dt=0, \quad j=0, 1, \cdots, -\varkappa'-1 \tag{98.13}$$

时，h' 类的解才存在；并当适合这些条件时，（唯一的）解由这同一个公式 (98.12) 在其中取 $P_{\varkappa'-1}(t_0)=0$ 而給出.

公式 (98.12) 的推导正好完全和公式 (98.10) 的推导是相同的；然而只需补充考虑条件 $\Psi(\infty)=0$，这个条件說明任意多項式

的次数不能超过 $\varkappa'-1$，并且当 $\varkappa'<0$ 时，条件(98.13)应当是成立的．

由上所述还可推出：当 $\varkappa'\leqslant 0$ 时，齐次方程 $\mathbf{K}^{0\prime}\psi=0$ 在 h' 类中沒有非零解；当 $\varkappa'>0$ 时，它在 h' 类中恰好有 $\varkappa'$ 个綫性无关解，这些解的全体由公式

$$\psi(t)=\frac{P_{\varkappa'-1}(t)}{Z(t)} \tag{98.14}$$

給出．

4°. 如果函数 $g(t)$ 是属于 h' 类的(而不必属于 H_0 类)，那么上面的結果都是保持有效的；仅在这种情形下，解在 $\gamma_k\neq 0$ 的那些特殊結点处可能是无界的．

注釋　綜合相联的方程

$$\mathbf{K}^0\varphi=f,\qquad \mathbf{K}^{0\prime}\psi=g$$

的可解性条件，容易导出下述結果：为使方程 $\mathbf{K}^0\varphi=f$ 在已給类 h 中可解，必須而且只須

$$\int_L f\psi_j dt=0,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ \varkappa',$$

其中 $\psi_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ \varkappa')$ 是相联齐次方程 $\mathbf{K}^{0\prime}\psi=0$ 在相联类 h' 中的綫性无关解的完备系；类似地，方程 $\mathbf{K}^{0\prime}\psi=g$ 在 h' 类中可解的充分和必要条件是

$$\int_L g\varphi_j dt=0,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ \varkappa,$$

其中 $\varphi_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ \varkappa)$ 是相联齐次方程 $\mathbf{K}^0\varphi=0$ 在 h' 类的相联类 h 中的綫性无关解的完备系．

还要指出，如果 k' 和 k 分别表示齐次方程 $\mathbf{K}^{0\prime}\psi=0$ 和 $\mathbf{K}^0\psi=0$ 在 h' 类和 h 类中的綫性无关解的个数，則

$$k-k'=\varkappa^{①},$$

其中 $\varkappa$ 是算子 $\mathbf{K}^0$ 的 h 类的指标．

① 当 $\varkappa=0$ 时，我們有 $k=\varkappa$，$k'=0$；当 $\varkappa\leqslant 0$ 时，我們有 $k=0$，$k'=-\varkappa$．

上述結果都是在§102 中将要証明的重要定理的特殊情形.

§99. 奇异积分方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 的正則化

和在§57 中所做的类似,在§97 中所得出的結果提供了把奇异积分方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 化为 Fredholm 方程的一个非常簡单的方法.

在这一节中,所要研究的一个化为 Fredholm 方程的方法是 T. Carleman 的論文[1]中所提出的思想的发展①,在这同一个方向上,И. Н. Векуа 曾經研究过封閉圍綫的情形(参看§57). T. Carleman 本人所討論的是 L 为实軸上的一个綫段,并且 $\varkappa_0=1$ (用我們的記号表示的話)的情形.

1° 我們把方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 改写成

$$\mathbf{K}\varphi\equiv\mathbf{K}^0\varphi+\mathbf{k}\varphi=f, \tag{99.1}$$

其中仍然有

$$\mathbf{K}^0\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} \tag{99.2}$$

和

$$\mathbf{k}\varphi\equiv\frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0,\ t)\varphi(t)\,dt. \tag{99.3}$$

我們把算子 $\mathbf{K}^0$ 对应的特殊結点和普通結点叫做算子 $\mathbf{K}$ 或者方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 对应的特殊結点和普通結点.

我們指出,如果,象我們所假定的那样,函数 $k(t_0,\ t)$ 是属于 H_0 类的,而 $\varphi(t)$ 是 H^* 类中的函数,那么,容易看出,$\mathbf{k}\varphi$ 是 H_0 类中的函数.

为了簡单起見,我們将假定,函数 $f(t)$ 是属于 H_0 类的.

我們还可以把方程(99.1)改写成

$$\mathbf{K}^0\varphi=f-\mathbf{k}\varphi \tag{99.4}$$

---

① 在 T. Carleman 的这一篇論文中(第一次)还发表了一个非常聪明的,但是又是人为的正則化方法.由于用这个方法推导出的所有結果,都可以用本书所用的方法非常簡单地而且更完整地得出,因此,我們就不再介紹这个方法.就著者所知道,仅在 В. Д. Купрадзе 的論文[6]及[7]中才应用了这个方法.

并且把(属于 H_0 类的)右端暂时看作已知函数．

从这一点出发，我們可以在这里重复 § 97, 2° 段中已讲过的，所考虑的方程之解在結点邻域內的性质．特別是，每一个在已給的普通結点的邻域內保持有界的解，在这一个邻域它必然是属于 H_0 类的．

完全象 § 97 中那样，我們能够把現在的方程所有可能的解分成一些类 $h=h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$．我們把相应于方程 $\mathbf{K}^0\varphi=f$ 或者算子 $\mathbf{K}^0$ 在 h 类中的典則函数 $Z(t)$ 和 h 类的指标 $\varkappa$，叫做方程(99.1)或者算子 $\mathbf{K}$ 在这同一个类中的典則函数和指标．

2°. 正如在 § 97 中那样，我們用 $\mathbf{K}^*$ 表示由公式

$$\mathbf{K}^*f \equiv A^*(t_0)f(t_0)-\frac{B^*(t_0)Z(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{Z(t)(t-t_0)} \qquad (99.5)$$

所确定的算子；这个記号与 § 97 中的是相同的．

現在把在 § 97 中所指出的結果应用到(99.4)上，容易导出下述的結果：

假定要找的是方程(99.1)在 $h=h(c_1, c_2, \cdots, c_{q+1})$ 类中所有的解，又假定 $Z(t)$ 和 $\varkappa$ 表示对应的典則函数和指标．那么：

当 $\varkappa\geqq 0$ 时，方程(99.1)(在 h 类中找解的意义下)等价于 Fredholm 方程

$$\varphi(t_0)+\mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi=f^*(t_0), \qquad (99.6)$$

其中

$$f^*(t_0)=\mathbf{K}^*f+B^*(t_0)Z(t_0)P_{\varkappa-1}(t_0), \qquad (99.7)$$

并且 $P_{\varkappa-1}(t_0)$ 表示次数不超过 $\varkappa-1$ 的任意多项式 $(P_{-1}(t_0)=0)$；

当 $\varkappa<0$ 时，方程(99.1)(在同一个意义下)等价于 Fredholm 方程(99.6)(并且应該假定 $P_{\varkappa-1}(t_0)\equiv 0$)和下列一組补充条件：

$$\int_L \frac{t^j\mathbf{k}\varphi(t)\,dt}{Z(t)}=\int_L \frac{t^j f(t)\,dt}{Z(t)}, \quad j=0, 1, \cdots, -\varkappa-1. \qquad (99.8)$$

起源于条件(97.16)的条件(99.8)，显然还可以改写成形式

$$\int_L \rho_j(t)\varphi(t)dt = \int_L \frac{t^j f(t)dt}{Z(t)}, \quad j=0,\ 1,\ \cdots,\ -\varkappa-1, \tag{99.8a}$$

其中

$$\rho_j(t) = \mathbf{k}'\left[\frac{t^j}{Z(t)}\right] = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{k(t_1,\ t)t_1^j dt_1}{Z(t_1)} \tag{99.9}$$

是完全确定的函数，并且容易看出，它是属于 H_0 类的.

我們指出，由公式(99.7)所确定的函数 $f^*(t_0)$ 是属于$h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$类的，此外，它在特殊結点的邻域內是属于 H_ε^* 类的，并且在 $\gamma_k \neq 0$ 的那些結点之邻域內是保持有界的；在 $\gamma_k=0$ 的結点 c_k 的邻域內，它可能象 $\ln(t-c_k)$ 那样是无界的．这些結果都可以从 $f(t)$是属于 H_0 类的条件导出.

§100．奇异积分方程 $\mathbf{K}'\psi=g$ 的正則化

在上一节中所指出的正則化方法，可以应用于方程

$$\mathbf{K}'\psi \equiv \mathbf{K}^{0\prime}\psi + \mathbf{k}'\psi = g. \tag{100.1}$$

我們把方程 $\mathbf{K}^{0\prime}\psi=g$ 或者算子 $\mathbf{K}^{0\prime}$ 对应的特殊結点和普通結点叫做方程 $\mathbf{K}'\psi=g$ 或者算子 $\mathbf{K}'$ 所对应的特殊結点和普通結点，而这些点正是算子 $\mathbf{K}$ 所对应的特殊結点和普通結点.

我們把算子 $\mathbf{K}^{0\prime}$ 或者方程 $\mathbf{K}^{0\prime}\psi=g$ 的已給类 $h'=h(c_{q+1}, c_{q+2}, \cdots, c_m)$的指标 $\varkappa'$，叫做算子 $\mathbf{K}'$ 或者方程 $\mathbf{K}'\psi=g$ 的已給类的指标.

为了簡单起見，我們假定函数 g 是属于 H_0 类的，利用与上一节中类似的方法，并且根据 §98 中的結果，我們便得出下述結論：

当 $\varkappa' \geqslant 0$ 时，方程(100.1)，在 $h'=h(c_{q+1},\ c_{q+2},\ \cdots,\ c_m)$ 类中找解的意义下，等价于 Fredholm 方程

$$\psi(t_0) + \mathbf{K}^{*\prime}\mathbf{k}'\psi = g^*(t_0), \tag{100.2}$$

其中

$$g^*(t_0) = \mathbf{K}^{*\prime}g + \frac{P_{\varkappa'-1}(t_0)}{Z(t_0)}, \tag{100.3}$$

$P_{\varkappa'-1}(t_0)$ 表示次数不超过 $\varkappa'-1$ 的任意多项式 ($P_{-1}(t_0)=0$)，而 $Z(t_0)$ 是相联方程 $\mathbf{K}\varphi=0$ 在 h' 类的相联类 $h=h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 中的典则函数；

当 $\varkappa'<0$ 时，方程(100.1)(在同一个意义下)等价于 Fredholm 方程(100.2)(并且应該取定 $P_{\varkappa'-1}(t_0)\equiv 0$)和下述一組补充条件：

$$\int_L \sigma_j(t)\psi(t)\,dt=\int_L Z(t)B^*(t)t^j g(t)\,dt, \quad j=0,1,\cdots,-\varkappa'-1, \tag{100.4}$$

其中

$$\sigma_j(t)=\mathbf{k}[Z(t)B^*(t)t^j]=\frac{1}{\pi i}\int_L k(t,\,t_1)Z(t_1)B^*(t_1)t_1^j\,dt_1 \tag{100.5}$$

是 H_0 类中完全确定的函数.

正象在 § 98 中[公式(98.11)]那样，此处 $\mathbf{K}^{*\prime}$ 表示算子 $\mathbf{K}^*$ 的相联算子；$B^*(t)$ 由公式(97.10)确定.

我們注意到，一般讲来，方程(100.2)不是方程(99.6)的相联方程，这是因为 $\mathbf{K}^*\mathbf{k}$ 的相联算子是 $\mathbf{k}'\mathbf{K}^{*\prime}$，而不是 $\mathbf{K}^{*\prime}\mathbf{k}'$.

最后，我們指出，函数 $g^*(t_0)$ 是属于 $h(c_{q+1}, c_{q+2}, \cdots, c_m)$ 类的，此外，它在特殊結点的邻域内是属于 H_ε^* 类的，并且在 $\gamma_k\neq 0$ 的那些特殊結点的邻域内是保持有界的；在 $\gamma_k=0$ 的那些特殊結点 c_k 的邻域内，它可能象 $\ln(t_0-c_k)$ 那样是无界的. 根据 $g(t)$ 属于 H_0 类的假定，便可以得出这些結論.

§ 101. 經正則化后而得出的方程的研究

1°. 在研究前面两节中所得出的方程之前，我們先在与 § 52 中稍为不同的条件下給出有关 Fredholm 方程豫解式的若干注釋. 亦就是，我們考慮 Fredholm 方程

$$\varphi(t_0)+\int_L n(t_0,\,t)\varphi(t)\,dt=f(t_0) \tag{A}$$

及其相联方程

$$\psi(t_0)+\int_L n(t,\ t_0)\psi(t)dt=g(t_0),\tag{A'}$$

其中 L 为一条逐段光滑曲綫，而核 $n(t_0,\ t)$ 是有界函数，对 t_0 及 t 所有的值（与結点所对应的值可能除外），它都是連續的．我們用 $f(t_0)$ 及 $g(t_0)$ 表示給定在 L 上的有界函数，它們在 L 上可能除了結点外处处都是連續的；对未知函数 $\varphi(t)$ 及 $\psi(t)$ 亦要求适合这同样的条件．

所討論的函数（不論是已知函数还是未知函数）在曲綫 L 的結点处可能完全沒有定义．与此相应，我們并不要求对于結点所对应的值 t_0 满足方程(A)或者(A′)．

几乎逐字逐句重复 § 52 中的議論，我們可以导出下述結論．

如果和 (A) 对应的齐次方程有 ν 个綫性无关解（此时它的相联齐次方程亦有同样个数的綫性无关解），那么，总可以把核 $n(t_0,\ t)$ 用另一个核

$$m(t_0,\ t)=n(t_0,\ t)+\sum_{i=1}^{n}\eta_i(t_0)\xi_i(t)\tag{*}$$

来替代，其中 $\xi_i(t)$，$\eta_i(t)$ 是給定在 L 上属于 H 类的函数，它們具有下列性质：

对应于方程

$$\varphi(t_0)+\int_L m(t_0,\ t)\varphi(t)dt=f(t_0)\tag{B}$$

及

$$\psi(t_0)+\int_L m(t,\ t_0)\psi(t)dt=g(t_0)\tag{B'}$$

的齐次方程沒有非零解，从而，非齐次方程 (B)，(B′) 总是单值可解的．

如果方程(A)是可解的，亦就是說，如果它的右端适合条件：

$$\int_L \psi_i(t)f(t)dt=0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu,\tag{C}$$

其中 $\psi_i(t)$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu$ 是和 (A′) 对应的齐次方程的所有綫性

无关解，那么，方程 (B) 的解同时又是方程(A)的解(更确切地說来，是它的一个解)；对于方程(B′)及(A′)亦是类似的.

設 $\gamma(t_0, t)$是方程(B)的豫解式，亦就是說，$\gamma(t_0, t)$是具有下列性质的函数：方程(B)的(唯一)解都可以由公式

$$\varphi(t_0)=f(t_0)+\int_L \gamma(t_0, t)f(t)dt \qquad (**)$$

給出；那么，$\gamma(t, t_0)$ 便是方程(B′)之豫解式．从 Fredholm 方程的一般理論可以推知，$\gamma(t_0, t)$ 是一个有界函数，它对变量 t_0 与 t 之中每一个都是可积的．由 Fredholm 方程理論中的众所周知关系式[①]

$$\gamma(t_0, t)+m(t_0, t)=-\int_L m(t_0, t_1)\gamma(t_1, t)dt_1 \qquad (D)$$

及

$$\gamma(t_0, t)+m(t_0, t)=-\int_L \gamma(t_0, t_1)m(t_1, t)dt_1 \qquad (D')$$

表明，函数 $\gamma(t_0, t)$ 和函数 $m(t_0, t)$ 具有同样的連續特性，亦就是說，可能除了与結点所对应的值外，它們对 t_0 与 t 所有的值都是連續的.

当方程(A)可解时，亦就是，当条件(C)满足时，方程 (A) 的所有解都可以由公式

$$\varphi(t_0)=f(t_0)+\int_L \gamma(t_0, t)f(t)dt+\sum_{i=1}^{\nu}C_i\varphi_i(t_0) \qquad (E)$$

給出，其中 $\varphi_i(t)$是和(A)对应的齐次方程的綫性无关解，而 C_i 是任意常数.

类似地，当方程(A′)可解时，方程(A′)的所有解都可以由公式

$$\psi(t_0)=g(t_0)+\int_L \gamma(t, t_0)g(t)dt+\sum_{i=1}^{\nu}C_i\psi_i(t_0) \qquad (E')$$

給出，其中 $\psi_i(t)$ 是和(A′)对应的齐次方程的綫性无关解，而 C_i 是任意常数.

---

① 参看本段末尾的注释.

函数 $\gamma(t_0, t)$ 是方程 (A) 的广义的 Fredholm 豫解式；类似地，函数 $\gamma(t, t_0)$ 是方程 (A′) 的广义的 Fredholm 豫解式.

注釋 例如，可以这样来得出关系式(D) 和 (D′). 将由公式(**)所确定的 $\varphi(t)$ 之表示式代入方程(B)之左端. 所得出的等式应該对每一个选定的函数 $f(t)$ 都是成立的；从这一个要求我們就可以得出关系式(D). 类似地，把由公式(B)所确定的 $f(t)$ 的表示式代入等式 (**) 之右端，我們可以得出关系式 (D′).

2°. 我們轉回来研究在 § 99 中所得出的方程 (99.6)，它現在可以改写成

$$\varphi(t_0)+\mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi\equiv\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L N(t_0, t)\varphi(t)\,dt$$
$$=f^*(t_0), \tag{101.1}$$

其中根据公式(99.7)，$f^*(t_0)$ 是在特殊結点的邻域内属于 H_ε^* 类的 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的函数，它在那些 $\gamma_k\neq0$ 的特殊結点的邻域内是有界的，在那些 $\gamma_k=0$ 的特殊結点 c_k 的邻域内可能象 $\ln(t_0-c_k)$ 那样是无界的，而

$$N(t_0, t)=A^*(t_0)k(t_0, t)$$
$$-\frac{B^*(t_0)Z(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{k(t_1, t)\,dt_1}{Z(t_1)(t_1-t_0)}. \tag{101.2}$$

和这个方程一起，我們討論它所对应的齐次方程

$$\varphi(t_0)+\mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi=0 \tag{101.3}$$

以及它的相联齐次方程

$$\psi(t_0)+\mathbf{k}'\mathbf{K}^{*\prime}\psi\equiv\psi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L N(t, t_0)\psi(t)\,dt=0, \tag{101.4}$$

这里根据(101.2)有

$$N(t, t_0)=A^*(t)k(t, t_0)$$
$$-\frac{B^*(t)Z(t)}{\pi i}\int_L\frac{k(t_1, t_0)\,dt_1}{Z(t_1)(t_1-t)}. \tag{101.5}$$

在 § 99 中，我們把方程(101.1)叫做 Fredholm 方程，不过它

的核 $N(t_0, t)$并不属于通常所謂的正則型核.

虽然是这样，所有 Fredholm 基本定理只需用适当的形式来叙述，它們仍然都能适用于方程(101.1). 我們証明这一点，只要将方程(101.1)归結为具有有界核的 Fredholm 方程就可以了①.

根据公式(97.13)，有

$$Z(t)=\omega_0(t)\prod_{j=1}^{n}(t-c_j)^{\gamma_j}, \tag{101.6}$$

其中 $\omega_0(t)$是 H_0 类中在 L 上处处都不取值零的确定的函数，而

$$\left.\begin{array}{ll} 0<\operatorname{Re}\gamma_j<1, & j=1,2,\cdots,q, \\ -1<\operatorname{Re}\gamma_j<0, & j=q+1,q+2,\cdots,m, \\ \operatorname{Re}\gamma_j=0, & j=m+1,m+2,\cdots,n. \end{array}\right\} \tag{101.7}$$

我們用 $c_{l+1}, c_{l+2}, \cdots, c_n (l\geqslant m)$ 表示 $\gamma_j=0$ 的那些特殊結点，又令

$$T(t)=\prod_{j=q+1}^{m}(t-c_j)^{\gamma_j}\prod_{j=l+1}^{n}[\ln(t-c_j)+c_j^0], \tag{101.8}$$

其中 c_j^0 是这样选定的常数，使得表示式 $\ln(t-c_j)+c_j^0$ 在 L 上处处都不取值零而不受别的限制.

其次，我們引用代换

$$\varphi(t)=T(t)\varphi_0(t). \tag{101.9}$$

那么，方程(101.1)具有形式

$$\varphi_0(t)+\int_L n(t_0, t)T(t)\varphi_0(t)dt=f_0(t_0), \tag{101.10}$$

这里，我們采用了記号

$$f_0(t)=\frac{f^*(t)}{T(t)}, \tag{101.9a}$$

$$\pi i n(t_0, t)=\frac{N(t_0, t)}{T(t_0)}=\frac{A^*(t_0)k(t_0, t)}{T(t_0)} - \frac{B^*(t_0)Z(t_0)}{\pi i T(t_0)}\int_L\frac{k(t_1, t)}{Z(t_1)(t_1-t_0)}dt_1. \tag{101.11}$$

---

① 亦容易直接研究形式为(101.1)的方程；参照 É. Goursat[1]，561段.

根据§26, 3° 段中的結果,容易看出, $n(t_0, t)$是有界函数.其次,根据同一节(6° 段)中的結果, 函数$n(t_0, t)$当确定t值时对于变量t_0是属于H_ε^*类的, 它在所有普通結点的邻域內是属于H_0类的. 当确定t_0值时, $n(t_0, t)$对于变量t亦具有同样的性质.

讲到$n(t_0, t)$当确定t值时对于变量t_0是属于H_0类的, 我們是指: t不与結点重合, 但是它可以和这些結点任意接近, 此时$n(t_0, t)$对于变量t_0的H条件所对应的系数和指数可以选得和t的位置无关; 对属于H_ε^*类亦作类似的了解. 对取定的t_0和变动的t的情形亦作同样的了解.

再在方程(101.10)中将积分变量t换成τ, 令

$$T(t)dt=d\tau, \tag{101.12}$$

或者为了确定起見,置

$$\tau=\int_c^t T(t)dt \quad 在 L_k 上,\ k=1, 2, \cdots, p, \tag{101.12a}$$

这里c是弧L_k的端点之一. 此时,当t描繪出弧L_k时, 与它对应的点τ描繪出某一条弧Λ_k. 弧Λ_k的全体我們将用Λ表示.

弧Λ_k可能彼此相交, 也可能自身相交, 但是这并不重要. 只需要約定好, Λ_k上的点τ即与t值所对应的τ值不表征着它的几何位置;换句話說,应該认为, 利用(复的)参数t, 用参数方程把弧Λ_k表出①.

今后,当談到結点时,我們所指的是曲綫L的結点或者曲綫Λ上和这些点对应的点,而不是Λ可能有的其他(在几何意义下的)結点.

按照上面所指出的, 下面用$\varphi_0(\tau)$或者$n(\tau_0, \tau)$等等表示的函数是当作t或者t_0, t等等的函数来考虑的. 因此, 我們有时把$\varphi_0(t)$, $n(t_0, t)$等等写成$\varphi_0(\tau)$, $n(\tau_0, \tau)$等等.当讲到函数$\varphi_0(\tau)$,

① 亦可以认为,弧Λ_k是分布在对应的 Riemann 面上的,或者更簡单地用分布在彼此可以相交并且构成一个环的平面上的某些綫来表示它們 (这些綫上的点仅对应于弧L_k上的一个点).

$n(\tau_0, \tau)$ 等等是属于 H 类，H_0 类，H^* 类，H^*_ε 类的时，我們是指它們在 L 上对于变量 t, t_0 等等是这样的．

按照上面所指出的，現在把 $\varphi_0(t)$ 改写成 $\varphi_0(\tau)$，把 $n(t_0, t)$ 改写成 $n(\tau_0, \tau)$，这样一来，我們可以把方程(101.10)化成形式

$$\varphi_0(\tau)+\int_A n(\tau_0, \tau)\varphi_0(\tau)d\tau=f_0(\tau_0). \qquad (101.13)$$

核 $n(\tau_0, \tau)$ 是有界的并且具有紧接着公式(101.11)后面所指出的那些性质．(101.13)的右端 $f_0(\tau_0)$ 亦是有界的，是属于 H^*_ε 类的，此外，在所有普通結点的邻域內它是属于 H_0 类的；这是从公式(99.7)，(101.9a)以及从 §26 的結果得出的．

为了我們的目的，我們应該在 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中来找方程(101.1)的解．但是，今后我們把这个方程(101.1)的解理解为絕对可积的解，这是因为容易看出，所有这样的解必然是属于 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的．事实上，假定要找的函数 $\varphi(t)$ 是絕对可积的[①]；那么，函数 $\varphi_0(\tau)$ 亦具有这个性质[②]．另一方面，从方程(101.13)本身容易看出，它的每一个絕对可积的解都是 H^*_ε 类中的有界函数，并且在所有普通結点的邻域內都是属于 H_0 类的；再根据公式(101.9)，每一个这样的解都可以給出方程(101.1)在 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中的解，而这亦就証明了我們的結論．

这样一来，在 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中方程(101.1)的求解等价于在絕对可积函数类內找这同一个方程的解，亦等价于在通常意义下找 Fredholm 方程(101.13)的解，亦就是，在有界函数类(当然，亦是可积的)中找出它的解．

我們現在轉向討論与(101.1)相联的齐次方程(101.4)．如果我們在这个方程中作变量代换(101.12)，那么，它变成了形式(在

---

① 容易看出，在这个假定下，方程(101.1)左端的积分在普通意义下仍然是有意义的；正象通常那样，假定在这个方程中，点 t_0 不是結点．

② 事实上，依据(101.9)及(101.12)，有

$$\varphi_0(\tau)d\tau=\varphi(t)dt.$$

前面的記号下)

$$\psi(\tau_0)+\int_{\Lambda} n(\tau,\ \tau_0)\psi(\tau)d\tau=0, \qquad (101.14)$$

亦就是說，它变成了一个具有有界核的，并且和方程(101.13)相联的 Fredholm 方程. 依据上述有关函数 $n(\tau,\ \tau_0)$ 的結果，容易看出，(101.14) 的每一个絕对可积的解是有界的，属于 H_ε^* 类的，在所有普通結点的邻域内是属于 H_0 类的. 由于这个原因，当我們讲到方程(101.4)的解时，我們所指的是有界的解.

現在回到有关相联的齐次方程綫性无关解个数相等的和有关非齐次方程可解性条件的 Fredholm 基本定理.

这些定理中的第一个可以直接应用于(101.13)所对应的齐次方程以及和这个齐次方程相联的方程 (101.14)，这是由于这些方程的核都是有界的.

把这个定理应用于方程(101.3)及(101.4)时，它显然可以叙述成：

齐次方程

$$\varphi(t_0)+\mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi=0$$

的(絕对可积的)綫性无关解 (这些解必然是属于 $h(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_q)$ 类的，并且在特殊結点的邻域内是属于 H_ε^* 类的)的个数是个有限数，并且等于它的相联方程

$$\psi(t_0)+\mathbf{k}'\,\mathbf{K}^{*\prime}\psi=0$$

的(有界的)綫性无关解(这些解必須是属于 H_ε^* 类的，在所有普通結点的邻域内是属于 H_0 类的)的个数.

我們轉到第二个定理. 在应用到方程 (101.13) 和 (101.14) 时，它可以写成：方程(101.13)可解的充分和必要条件是

$$\int_{\Lambda} f_0(\tau)\omega_j(\tau)d\tau=0, \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu, \qquad (101.15)$$

其中 $\omega_j(\tau)$ 是齐次方程(101.14)綫性无关解的完备系. 如果改回到老的变量 t，那么，上述条件可以写成形式

$$\int_L f^*(t)\omega_j(t)dt=0, \quad j=1, 2, \cdots, \nu. \tag{101.16}$$

这样一来，当直接应用于方程(101.1)和(101.4)时，这个定理可以叙述成：

为了使得方程

$$\varphi(t_0)+\mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi=f^*(t_0) \tag{101.1}$$

（在絕对可积的函数类中）是可解的，必須而且只須它的右端适合条件(101.16)，其中 $\omega_j(t)$ 是方程(101.1)的相联齐次方程(101.4)的綫性无关（有界）解的完备系．方程(101.1)的所有（絕对可积的）解都必須是属于 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的，此外，它們在特殊結点的邻域内都应該是属于 H_s^* 类的．

我們提醒一下，$f^*(t_0)$ 表示属于 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中的函数，并且它在特殊結点的邻域内是属于 H_s^* 类的．

如果 Fredholm 方程(101.13)的可解性条件满足，那么，根据 1° 段中所指出过的結果，它的一般解可以写成形式

$$\varphi_0(\tau_0)=f_0(\tau_0)+\int_\Lambda \gamma(\tau_0, \tau)f_0(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{\nu}C_j\chi_{0j}(\tau_0), \tag{101.17}$$

其中 $\gamma(\tau_0, \tau)$ 是广义的豫解式，$\chi_{0j}(\tau_0)$, $j=1, 2, \cdots, \nu$ 是对应的齐次方程的綫性无关解的完备系，而 C_j 是任意常数．

从 1° 段中所导出的泛函数方程(D)和(D′)容易推出，在結点的邻域内，豫解式 $\gamma(\tau_0, \tau)$ 具有和核 $n(\tau_0, \tau)$ 同样的性质，亦就是說，它們对每一个变量是属于 H_s^* 类的有界函数，此外，在所有普通結点的邻域内，它們都是属于 H_0 类的．

現在利用公式(101.9)及(101.12)回复到老的未知函数 $\varphi(t)$ 以及老的变量 t，我們得出方程(101.1)的一般（絕对可积的）解，而正如我們知道的，这个解是属于 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的，它由公式

$$\varphi(t_0)=\mathbf{\Gamma}f^*+\sum_{j=1}^{\nu}C_j\chi_j(t_0) \tag{101.18}$$

給出，其中 $\chi_j(t)$ 是齐次方程(101.3)的綫性无关（絕对可积的）解的完备系，我們知道，这些解都是属于 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的；以 $\mathbf{\Gamma}$ 表示由公式

$$\mathbf{\Gamma} f \equiv f(t_0)+\int_L \Gamma(t_0, t) f(t) dt \tag{101.19}$$

所确定的算子，其中

$$\Gamma(t_0, t)=T(t_0) \gamma(t_0, t). \tag{101.19a}$$

根据上面所指出过的函数 $\gamma(t_0, t)$ 的性质，容易得出：算子 $\mathbf{\Gamma}$ 把 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中每一个函数 $f(t)$ 都变成这同一类中的一个函数，而它的由公式

$$\mathbf{\Gamma}' g \equiv g(t_0)+\int_L \Gamma(t, t_0) g(t) dt \tag{101.20}$$

所确定的相联算子 $\mathbf{\Gamma}'$，把 $h(c_{q+1}, c_{q+2}, \cdots, c_m)$ 类中的每一个函数 $g(t)$ 都变成这同一类中的一个函数，根据(101.19a)有

$$\Gamma(t, t_0)=T(t) \gamma(t, t_0). \tag{101.20a}$$

3° 完全类似地可以研究上一节中的方程(100.2)，亦就是，由方程 $\mathbf{K}'\psi=g$ 正则化后得到的方程

$$\psi(t_0)+\mathbf{K}^{*\prime}\mathbf{k}'\psi=g^*(t_0), \tag{101.21}$$

和(101.21)的相联齐次方程

$$\omega(t_0)+\mathbf{k}\mathbf{K}^*\omega=0; \tag{101.22}$$

由于完全是类似的，我們在这里不再来討論它們.

§ 102. 方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 及 $\mathbf{K}'\psi=g$ 的求解. 基本定理.

1° 現在我們回到在已給类 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 中找奇异积分方程

$$\mathbf{K}\varphi \equiv \mathbf{K}^0\varphi+\mathbf{k}\varphi=f \tag{102.1}$$

的解的問題. 利用在 § 99 中介紹过的方法将上述方程正则化后，我們得出 Fredholm 方程

$$\varphi+\mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi=f^*(t_0) \tag{102.2}$$

和补充条件

$$\int_L \rho_j\varphi(t)dt=\int_L \frac{t^j f(t)dt}{Z(t)}, \quad j=0,\ 1,\ \cdots,\ -\varkappa-1. \quad (102.3)$$

原来的奇异积分方程，在找 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中的解的意义下，等价于方程(102.2)和条件(102.3)的全体.

在此处我們应用§99中的記号；特别是，函数 $\rho_j(t)$ 由公式(99.9)确定，而

$$f^*(t_0)=\mathbf{K}^*f+B^*(t_0)Z(t_0)P_{\varkappa-1}(t_0), \quad (102.4)$$

其中 $P_{\varkappa-1}(t_0)$ 是次数不超过 $\varkappa-1$ 的任意多項式，我們可以把它写成

$$P_{\varkappa-1}(t_0)=A_1t^{k_1}+A_2t^{k_2}+\cdots+A_\varkappa t^{k_\varkappa}, \quad (102.5)$$

这里 $k_1, k_2, \cdots, k_\varkappa$ 表示数 $0, 1, \cdots, \varkappa-1$ 按照某一种次序排列的結果，而 $A_1, A_2, \cdots, A_\varkappa$ 是一些任意常数.

在 $\varkappa\geqslant 0$ 的情形下，沒有补充条件(102.3)，在 $\varkappa\leqslant 0$ 的情形下，我們应該假定 $P_{\varkappa-1}(t_0)=0$.

我們考察方程(102.1)的求解問題，首先从 $\varkappa\geqslant 0$ 的情形入手. 在这种情形下，方程(102.1)在 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中找解的意义下等价于方程(102.2). 方程(102.2)的可解条件为(参看上一节)

$$\int_L \omega_j(t)f^*(t)dt=0, \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu, \quad (102.6)$$

其中 $\omega_j(t)$ 是(102.2)的相联齐次方程

$$\omega+\mathbf{k}'\mathbf{K}^{*\prime}\omega=0 \quad (102.7)$$

的綫性无关解的完备系；我們知道，函数 $\omega_j(t)$ 是属于 H_s^* 类的，在普通結点的邻域内它是属于 H_0 类的.

把 $f^*(t_0)$ 的表示式(102.4)代入(102.6)，并引进記号

$$\delta_i=\int_L \omega_i(t)\mathbf{K}^*f(t)dt, \quad (102.8)$$

可以断言，条件(102.6)具有形式

$$\sum_{j=1}^{\varkappa}\gamma_{ij}A_j=\delta_i, \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu, \quad (102.9)$$

其中 γ_{ij} 是完全确定的常数，它們与函数 $f(t)$ 是无关的. 常数 δ_i 还可以表成形式

$$\delta_i=\int_L \omega_i^*(t)f(t)\,dt, \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu, \tag{102.10}$$

其中为了簡单起見已置

$$\omega_i^*(t)=\mathbf{K}^{*\prime}\omega_i(t). \tag{102.11}$$

函数 $\omega_i^*(t)$ 是属于 $h(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_q)$ 类的相联类 $h(c_{q+1},\ c_{q+2},\ \cdots,\ c_m)=h'$ 类的；这一点可以从函数 $\omega_0(t)$ 在普通結点的邻域內属于 H_0 类以及由公式(98.11)确定的算子 $\mathbf{K}^*$ 的形式而导出. 此外，容易看出，函数 $\omega^*(t)$ 是綫性无关的. 事实上，依据(102.7)我們有 $\omega_i+\mathbf{k}'\mathbf{K}^{*\prime}\omega_i=0$，并且由此推知，$\omega_i=-\mathbf{k}'\omega_i^*$；因此，如果函数 ω_i^* 是綫性相关的，那么，函数 ω_i 亦是綫性相关的，但是这与它們的定义相矛盾.

假定矩陣 $\|\gamma_{ij}\|$ 的秩等于 $\rho(\rho\leqslant\nu,\ \rho\leqslant\varkappa)$. 不失一般性，可以假定，矩陣

$$\|\gamma_{ij}\|, \quad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ \rho$$

的行列式不等于零. 那么，如众所周知，有关 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\varkappa$ 的方程組(102.9)的可解条件为

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1\rho} & \delta_1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2\rho} & \delta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{\rho 1} & \gamma_{\rho 2} & \cdots & \gamma_{\rho\rho} & \delta_\rho \\ \gamma_{\rho+j,1} & \gamma_{\rho+j,2} & \cdots & \gamma_{\rho+j,\rho} & \delta_{\rho+j} \end{vmatrix}=0 \tag{102.12}$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu-\rho$$

或者把它簡写成

$$\delta_{\rho+j}+\sum_{i=1}^{\rho} a_{ji}\delta_i=0, \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu-\rho, \tag{102.13}$$

其中 a_{ji} 是完全确定的与函数 $f(t)$ 无关的常数.

把 δ_j 的表示式 (102.10) 代入上述等式之中，我們可以断言，

方程(102.2)的可解条件具有形式

$$\int_L \lambda_j(t) f(t) dt = 0, \quad j=1, 2, \cdots, \nu-\rho, \qquad (102.14)$$

其中 $\lambda_j(t)$ 是 $h'=h(c_{q+1}, c_{q+2}, \cdots, c_m)$ 类的完全确定的綫性无关的函数,亦就是,

$$\lambda_j(t) = \omega^*_{\rho+j}(t) + \sum_{i=1}^{\rho} a_{ji}\omega^*_i(t), \quad j=1, 2, \cdots, \nu-\rho. \quad (102.15)$$

我們假定条件(102.14)是适合的,那么,方程(102.2)是可解的. 我們来作出它的一般解. 因为已假定了条件(102.14)是适合的,于是,条件(102.13)亦是适合的,因此,方程組(102.9)对于 $A_1, A_2, \cdots, A_\rho$ 是可解的;把 $A_{\rho+1}, A_{\rho+2}, \cdots, A_\varkappa$ 当作任意常数,从方程組(102.9)前 ρ 个方程解出 $A_1, A_2, \cdots, A_\rho$ 我們便可以找出它的一般解. 方程組(102.9)的一般解因此具有形式

$$A_j = B_{j1}A_{\rho+1} + B_{j2}A_{\rho+2} + \cdots + B_{j\varkappa}A_\varkappa + \Gamma_{j1}\delta_1 + \cdots + \Gamma_{j\rho}\delta_\rho, \quad j=1, 2, \cdots, \rho \qquad (102.16)$$

其中 B_{ji}, Γ_{ji} 都是完全确定的常数,它們与函数 $f(t)$ 是无关的.

現在我們如果把常数 $A_1, A_2, \cdots, A_\rho$ 的上述值代入方程(102.2)的右端,那么,所得出的积分方程对于任意常数 $A_{\rho+1}$, $A_{\rho+2}, \cdots, A_\varkappa$ 的任何值都是可解的. 利用公式(101.18)求解这个方程,且又注意到公式(102.4),(102.8),我們容易断言,方程(102.2)的一般解具有形式

$$\varphi(t_0) = \boldsymbol{\Gamma}^*\mathbf{K}^*f + C_1\chi_1 + C_2\chi_2 + \cdots + C_\nu\chi_\nu + C_{\nu+1}\chi_{\nu+1} + C_{\nu+2}\chi_{\nu+2} + \cdots + C_{\varkappa+\nu-\rho}\,\chi_{\varkappa+\nu-\rho}, \qquad (102.17)$$

其中 $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_\nu$ 及 $C_1, C_2, \cdots, C_\nu$ 所表示的与在公式(101.18)中的相同;为了一致起見,以 $C_{\nu+1}, C_{\nu+2}, \cdots, C_{\varkappa+\nu-\rho}$ 表示任意常数 $A_{\rho+1}, A_{\rho+1}, \cdots, A_\varkappa$ 而用 $\chi_{\nu+1}, \chi_{\nu+2}, \cdots, \chi_{\varkappa+\nu-\rho}$ 表示一些完全确定的,与函数 $f(t)$ 无关的函数,它們亦象函数 $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_\nu$ 那样是属于 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的;以后还要談到这些函数. 最后,

用$\mathbf{\Gamma}^*$来表示由公式

$$\mathbf{\Gamma}^* f \equiv f(t_0)+\int_L \Gamma^*(t_0,\ t) f(t)\,dt \qquad (102.18)$$

所确定的算子,其中函数$\Gamma^*(t_0,\ t)$与公式(101.19)中的函数$\Gamma(t_0,\ t)$相差某些项,容易把这些项写成明显的形式;实际上,如果把这些簡单的計算都做了,那么,显然便可以知道,算子$\mathbf{\Gamma}^*$具有在上一节末尾所讲到的算子$\mathbf{\Gamma}$的性质;亦就是說,算子$\mathbf{\Gamma}^*$把$h(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_q)$类的函数变成这同一类中的函数,而它的相联算子$\mathbf{\Gamma}^{*\prime}$把$h'=h(c_{q+1},\ c_{q+2},\ \cdots,\ c_m)$类中的函数变成这同一类中的函数.

特别是,我們考察当原来的奇异积分方程(102.1)是齐次方程(亦卽,当$f(t)\equiv 0$时)的情形. 在这种情形下,方程(102.1)等价于下述(一般讲来是非齐次的)方程

$$\varphi(t_0)+\mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi=B^*(t_0)Z(t_0)P_{\varkappa-1}(t_0). \qquad (102.19)$$

在现在的情形下,所有的$\delta_i=0$,而方程(102.9)的可解条件(102.13)是适合的. 关系式(102.16)具有形式

$$A_j=B_{j1}A_{\rho+1}+B_{j2}A_{\rho+2}+\cdots+B_{j\varkappa}A_\varkappa,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ \rho. \qquad (102.16a)$$

如果将$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\rho$的这些表示式代入(102.19)的右端,那么,(102.19)可以表成形式

$$\varphi+\mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi=C_{\nu+1}\sigma_{\nu+1}+C_{\nu+2}\sigma_{\nu+2}+\cdots+C_{\varkappa+\nu-\rho}\sigma_{\varkappa+\nu-\rho}; \qquad (102.20)$$

我們仍然把$A_{\rho+1},\ A_{\rho+2},\ \cdots,\ A_\varkappa$記作$C_{\nu+1},\ C_{\nu+2},\ \cdots,\ C_{\varkappa+\nu-\rho}$;我們用$\sigma_{\nu+1},\ \sigma_{\nu+2},\ \cdots,\ \sigma_{\varkappa+\nu-\rho}$表示$h(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_q)$类中的綫性无关的函数,它們的表示式是容易写出的.

根据一般公式(102.17),对任意的$C_{\nu+1},\ \cdots,\ C_{\varkappa+\nu-\rho}$等价于方程(102.20)的齐次方程$\mathbf{K}\varphi=0$的一般解,具有形式

$$\begin{aligned}\varphi(t_0)=&C_1\chi_1(t_0)+C_2\chi_2(t_0)+\cdots+C_\nu\chi_\nu(t_0)\\&+C_{\nu+1}\chi_{\nu+1}(t_0)+\cdots+C_{\varkappa+\nu-\rho}\chi_{\varkappa+\nu-\rho}(t_0),\end{aligned} \qquad (102.21)$$

其中$C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_{\varkappa+\nu-\rho}$都是任意常数. 这样一来,函数$\chi_j(t)$都是齐次方程$\mathbf{K}\varphi=0$的解;它們之中的前$\boldsymbol{\nu}$个同时又是方程

$$\varphi+\mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi=0$$

的綫性无关解．当 $j>\nu$ 时，函数 $\chi_j(t)$ 显然是方程

$$\varphi+\mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi=\sigma_j,\quad j=\nu+1,\ \nu+2,\ \cdots,\ \varkappa+\nu-\rho \tag{102.22}$$

的解，而方程(102.22)是从方程(102.20)取 $C_j=1$ 且所有 $C_i=0$ 而得出的．現在容易看出，所有的函数 $\chi_j(t)$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ \varkappa+\nu-\rho$ 是綫性无关的．事实上，如果对于某些常数值 C_j，由公式(102.21)所确定的函数 φ 恒等于零，那么，显然便有

$$0=\varphi+\mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi=C_{\nu+1}\sigma_{\nu+1}+C_{\nu+2}\sigma_{\nu+2}+\cdots+C_{\varkappa+\nu-\rho}\sigma_{\varkappa+\nu-\rho},$$

因为函数 σ_j 是綫性无关的，因此，这个等式仅当

$$C_{\nu+1}=C_{\nu+2}=\cdots=C_{\varkappa+\nu-\rho}=0$$

时才有可能．但是，此时从(102.21)取 $\varphi=0$ 推出

$$C_1=C_2=\cdots=C_\nu=0.$$

这样一来，齐次方程 $\mathbf{K}\varphi=0$ 恰好有 $\varkappa+\nu-\rho$ 个 $h(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_q)$ 类的綫性无关解．

其次，因为 $\nu\geqslant\rho$，因此，我們可以断言：当 $\varkappa\geqslant0$ 时，齐次方程 $\mathbf{K}\varphi=0$ 至少有 $\varkappa$ 个 $h\ (c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_q)$ 类的綫性无关解．

現在我們轉入討論 $\varkappa$ 是負的情形．在这个情形下，在方程(102.2)中应該认为 $P_{\varkappa-1}(t_0)=0$，并且这个方程的可解性条件归結为条件 $\delta_j=0(j=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu)$，亦就是說，再一次归結为形如

$$\int_L\lambda_j(t)f(t)\,dt=0,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu \tag{102.23}$$

的条件，其中 $\lambda_j(t)$ 是 $h'=h(c_{q+1},\ c_{q+2},\ \cdots,\ c_m)$ 类中某些确定的綫性无关的函数．

假定条件(102.23)是适合的；那么，方程(102.2)是可解的；但是，这还不能說明原来的方程(102.1)在已給类 $h(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_q)$ 中亦是可解的，因为在現在的情形($\varkappa<0$)下，还要求滿足 $-\varkappa$ 个补充条件(102.3)．我們把一般解(102.17)代入关系式(102.3)的左端；当然，在(102.17)中我們应該假定

$$C_{\nu+1}=C_{\nu+2}=\cdots=C_{\varkappa+\nu-\rho}=0.$$

这样一来,我們得出为了确定 $C_1, C_2, \cdots, C_\nu$ 的 $-\varkappa$ 个綫性方程的方程組,这个方程組与方程組(102.9)是类似的,它的可解性条件仍然可以写成一定个数的下述形式的条件:

$$\int_L \lambda_j(t) f(t)\, dt=0, \quad j=\nu+1, \nu+2, \cdots, \nu+\sigma, \quad (102.24)$$

这里 $\sigma\leqslant-\varkappa$. 如果完成了对应的完全初等的計算,又若注意到了公式

$$\int_L \rho_j \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{K}^* f dt=\int_L f \mathbf{K}^{*\prime} \mathbf{\Gamma}^{*\prime} \rho_j dt, \quad (102.25)$$

以及前面所指出的算子 $\mathbf{\Gamma}^*$ 的性质,那么,容易断言,函数

$$\lambda_j(t) \quad (j=\nu+1, \cdots, \nu+\sigma)$$

亦象在公式 (102.23) 中的函数 $\lambda_j(t)$ 那样是属于 $h'=h(c_{q+1}, \cdots, c_{n})$ 类的.

条件 (102.23) 和条件 (102.24) 一起給出方程 (102.1) 在 $h=h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中为可解的一組充分和必要条件.

2°. 如果把 § 100 中所指出的正則化方法应用到方程 (101.1) 的相联方程

$$\mathbf{K}'\psi\equiv\mathbf{K}^{0\prime}\psi+\mathbf{k}'\psi=g \quad (102.1')$$

上,那么,完全类似地可以求解方程 (102.1'). 由于几乎完全是类似的,我們不再来叙述它.

3°. 从上面的推导直接导出: 齐次方程 $\mathbf{K}\varphi=0$ 的 (任何类中的) 綫性无关解的个数是个有限数. 对于方程 $\mathbf{K}'\psi=0$ 亦有类似的結論.

4°. 現在我們轉向証明与 § 53 类似的定理①,亦就是,

定理 I 方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 在已給类 $h=h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 中为可解的充分和必要条件是

① 后面所給出的一般性定理的証明是 И. Н. Векуа[4] 对于若干条封閉圍綫和連續系数情形所給出的証明之推广.

$$\int_L f\psi_j dt=0, \quad j=1, 2, \cdots, k', \tag{102.26}$$

其中 $\psi_j(j=1, 2, \cdots, k')$ 是相联齐次方程 $\mathbf{K}'\psi=0$ 在相联类 $h'=h(c_{q+1}, c_{q+2}, \cdots, c_m)$ 中綫性无关解的完备系．

定理 II 如果 k 是齐次方程 $\mathbf{K}\varphi=0$ 的 h 类的綫性无关解的个数，$\varkappa$ 是 h 类的指标，而 k' 是相联齐次方程 $\mathbf{K}'\psi=0$ 的相联类 h' 的綫性无关解的个数，那么，

$$k-k'=\varkappa. \tag{102.27}$$

如果交换算子 $\mathbf{K}$ 与 $\mathbf{K}'$，h 类与 h' 类以及指标 $\varkappa$ 与 $\varkappa'$ 所处之地位，則这些定理仍然保持有效．

定理 I 的証明 容易看出，公式(96.10)对現在的情形是适用的，并且根据公式 (96.10)，条件(102.26)的必要性是显然的．我們来証明这个条件的充分性．我們曾經指出过，方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 在 h 类中可解的必要和充分条件具有形式

$$\int_L \lambda_j(t)f(t)dt=0, \quad j=1, 2, \cdots, N, \tag{102.28}$$

其中 $\lambda_j(t)$ 是 h 类的相联类 h' 中确定的函数，而 N 是某个正整数或者零．如果我們能够証明由条件 (102.26) 可以导出条件 (102.28)，那么，显然便証明了定理 I．

假定 $g(t)$ 是 H 类中的任意一个函数，它在所有結点处都取值零，于是函数 $\mathbf{K}g$ 是属于 H_0 类的．方程 $\mathbf{K}\varphi=\mathbf{K}g$ 在 h 类 (甚至在 H 类) 中是可解的，因为它有解 $\varphi=g$．从而，必然有

$$0=\int_L \lambda_j \mathbf{K}g\,dt=\int_L g\mathbf{K}'\lambda_j dt=0.$$

根据函数 $g(t)$ 的任意性，从前一个等式得出，$\mathbf{K}'\lambda_j=0$．这样一来，λ_j 是齐次方程 $\mathbf{K}'\psi=0$ 的 h' 类的解，而因之，λ_j 是函数 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{k'}$ 的綫性組合；这意味着，条件(102.28)是条件(102.26)的推論，这就証明了定理 I．交换 $\mathbf{K}$ 与 $\mathbf{K}'$，h 与 h' 所处的地位而得出的定理完全类似地可以加以証明．

定理 II 的証明 首先討論 $\varkappa \geqslant 0$ 的情形. 在这种情形下, 在 h 类中可解的充分和必要条件具有形式 (102.14), 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{\nu-\rho}$ 是 h' 类的綫性无关的函数. 另一方面, 正如剛才所証明过的那样, (在同一类中) 可解性的充分和必要条件是条件 (102.26). 这样一来, 如果 H_0 类中任一个函数适合条件 (102.14), 那么, 它亦适合条件 (102.26), 反之亦然. 由此可以知道(参閱本书末尾的附录三), 函数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{\nu-\rho}$ 是函数 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{k'}$ 的綫性組合, 反之亦然. 因此, 有

$$k' = \nu - \rho.$$

再者, 正如已經指明过的那样, 根据 (102.21), 方程 $\mathbf{K}\varphi = 0$ 的 h 类的綫性无关解的个数等于 $\varkappa + \nu - \rho$, 因此

$$k = \varkappa + \nu - \rho;$$

从上面所得出的两个等式就可以推得等式 (102.27).

我們轉向討論 $\varkappa < 0$ 的情形. 交换算子 $\mathbf{K}$ 与 $\mathbf{K}'$ 以及 h 类与 h' 类所处的地位, 我們便可以把这种情形归結为上面的情形.

进行和前面完全类似的推导, 我們导出关系式 $k' - k = \varkappa'$, 其中 $\varkappa'$ 是算子 $\mathbf{K}'$ 的 h' 类的指标; 我們知道, $\varkappa' = -\varkappa$. 因此, 我們重新得出了等式 (102.27).

这样一来, 便証明了定理 II. 交换 $\mathbf{K}$ 与 $\mathbf{K}'$ 以及 h 与 h' 所处的地位而得出的定理亦同样可以証明.

注釋 1 如果函数 $f(t)$ 不属于 H_0 类, 而是属于 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类, 并且它在特殊結点的邻域内同时又是属于 H_s^* 类的, 那么, 容易看出, 定理 I 和 II 以及别的結果都仍然是有效的. 在函数 $f(t)$ 属于 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类, 在特殊結点的邻域内又是属于 H^* 类的情形, 亦不必作任何重大的变更; 特别是, 在这情形下, 上述定理仍然有效.

对交换 $\mathbf{K}$ 与 $\mathbf{K}'$, h 与 h' 所处的地位而得出的定理, 亦可以作类似的注釋.

注釋 2 如果在用适当方式引进了实变量（例如，选用弧坐标 s）后，所討論的奇异积分方程变成了实方程，那么，又若在实的范圍内求解方程，則上面已証明过的基本定理在这个情形仍然是有效的，它們和在 § 54 中所指明过的是完全类似的．此时应把已給方程的相联齐次方程理解为已給方程化成实形式后的相联方程，并且，它亦是实方程（参照 § 54）．

§ 103．重要的特殊情形

在上面几节中，我們討論了形式为

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0,\,t)\,\varphi(t)\,dt = f(t_0) \tag{103.1}$$

及

$$\mathbf{K}'\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\,\psi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t,\,t_0)\,\psi(t)\,dt = g(t_0) \tag{103.2}$$

的方程，其中假定了 L 为任意一条逐段光滑曲綫．

亦象在 § 83 中那样，我們现在討論两个重要的特殊情形：L 是一条断續的光滑曲綫的情形和 L 是一条簡单的、封閉的逐段光滑圍綫的情形．

正象在前面那样，我們引进記号

$$G(t) = \frac{A(t)-B(t)}{A(t)+B(t)}. \tag{103.3}$$

1°. 断續的光滑曲綫的情形①．

此处 L 是由一些分开分布的光滑敞开弧 $L_k = a_k b_k$，$k=1, 2, \cdots, p$ 所构成的曲綫．在我們的情形下，端点 a_k，b_k 都是曲綫 L 的

① 在 Н. И. Мусхелишвили 的論文[6]中以及 Н. И. Мусхелишвили 和 Д. А. Квеселава 的論文[1]中直接研究了这个情形．参看本章的引言．

結点. 我們把曲綫 L 上某一些别的点亦算作結点, 但是, 这一次我們将不这样做. 我們用 c_k, $k=1, 2, \cdots, 2p$ 表示端点(結点) a_k, b_k 的某一种排列的結果.

根据上面所加的条件, 我們假定, 函数 $A(t)$, $B(t)$ 在 L 上是属于 H 类的, 函数 $k(t_0, t)$ 在 L 上对两个变量 t_0 和 t 亦是属于 H 类的(在現在的情形下 H 类与 H_0 类是同样的).

我們把在 L_j 上的 $\ln G(t)$ 理解为在 L_j 上連續变化的任何一个値. 对应于端点 c_k 的数 γ_k 由公式

$$\gamma_k=\alpha_k+\lambda_k+i\beta_k \tag{103.4}$$

确定, 其中

$$\alpha_k+i\beta_k=\mp\frac{1}{2\pi i}\ln G(c_k), \tag{103.5}$$

并且当 $c_k=a_j$ 时取上面一个符号, 当 $c_k=b_j$ 时取下面一个符号, 而整数 λ_k 按照条件

$$-1<\alpha_k+\lambda_k<1, \quad k=1, 2, \cdots, 2p \tag{103.6}$$

选擇.

特殊端点 c_k[①] (在現在的情形下, 結点归結为端点), 亦就是, $\operatorname{Re}\gamma_k=0$ 的那些端点, 在現在的情形下, 它們由条件: $G(c_k)$ 是实的正数(因为在并且只有在这个情形下 α_k 才是整数)表征着.

不仅 $\operatorname{Re}\gamma_k=0$ 的特殊端点, 而且 $\gamma_k=0$ 的特殊端点都由条件 $G(c_k)=1$, 亦即 $B(c_k)=0$ 表征着.

在 §97, 2° 段中所指出的有关特征方程 $\mathbf{K}^0\varphi=f$ (假定 f 是属于 H 类的) 的解的結果, 在現在的情形下可以补充成这些解在 $\gamma_k=0$ 的那些特殊端点 c_k 的邻域內亦是有界的, 并且甚至是属于 H 类的; 这一点可以从公式(97.11) 和 (97.12) 导出, 因为在現在的情形下, 当 $\gamma_k=0$ 时, 我們有 $B^*(c_k)=B(c_k)=0$.

---

① 当結点是端点时, 特殊結点和普通結点叫做特殊端点和普通端点. ——譯者注

再者，如果方程 $\mathbf{K}^0\varphi=f$ 的解 $\varphi(t)$ 在任一个普通端点 c_k 的邻域内是有界的，那么，$\varphi(t)$ 在这个端点的邻域内必然是属于 H 类的，并且在那一点处它应該取值零①．正象在 § 97, 2° 段中那样，可以証明解 $\varphi(t)$ 是属于 H 类的．其次，如果 $\varphi(c_k)\neq0$，那么，在等式 (103.1) 中左端的第二项在 c_k 附近象 $\ln(t_0-c_k)$ 那样是无界的，这是不可能的，因为在 c_k 附近这个等式的其余各项都是有界的．$\varphi(c_k)=0$ 亦可以直接証明．

我們再补充一点，在現在的情形下，由公式 (101.2) 所确定的核 $N(t_0, t)$ 在所有特殊端点的邻域内都是有界的，而因此，在 §101 中由公式 (101.8) 所引进的函数 $T(t)$，可以由更簡单的

$$T(t)=\prod_{j=q+1}^{m}(t-c_j)^{\gamma_j} \tag{103.7}$$

代替．

最后，我們指出，如果在所有端点处 $B(c_k)=0$，那么，方程 (103.1), (103.2) 的理論与在第二章中所叙述的当 L 由一些光滑封閉圍綫所构成，而函数 $A(t)$, $B(t)$ 在 L 上是連續的（是属于 H 类的）情形之理論，并沒有什么区别．

实际上，如果 $B(c_k)=0$, $k=1, 2, \cdots, 2p$，那么，$\gamma_k=0$, $k=1, 2, \cdots, 2p$，并且所有端点都是特殊結点．因此，解的类的概念失去意义．方程 (103.1) 或者 (103.2) 的所有解都是属于 H 类的，甚至我們可以在 H^* 类中来找这些解；此处我們假定 $f(t)$ 及 $g(t)$ 是属于 H 类的，函数 $k(t_0, t)$ 亦是如此．

在所有端点处 $\mathrm{Re}\,\gamma_k=0$ 的情形下，亦就是，在所有端点处 $G(c_k)$ 都是实的正数的情形下，我們亦不必作任何重大的变更．

2°. **簡单的封閉圍綫的情形**②．

我們現在假定 L 是一条簡单的、封閉的、光滑或者逐段光滑

---

① 把解 $\varphi(t)$ 在端点 c_k 处的值 $\varphi(c_k)$ 理解为当 $t\to c_k$ 时 $\varphi(t)$ 所趋于的极限．

② Ф. Д. Гахов[3],[4] 直接討論了这一种情形（还特別假定了 L 是一条光滑圍綫）．他曾經利用了 Н. И. Мусхелишвили 和 Д. А. Квеселава 的論文[1]中的結果．

的圍綫(完全类似地可以討論 L 由一些这样的圍綫而构成的情形).

我們可以沿用在§83, 2° 段中的記号,特别是,我們以 c_1, c_2, …, c_n 表示曲綫 L 的結点;在現在的情形下,結点是角点和分布在圍綫 L 的光滑部分上的某些点.

正象在整个这一部分中那样,我們可以假定 $A(t)$, $B(t)$, $k(t_0, t)$是 L 上的 H_0 类函数.

如果假定函数 $A(t)$, $B(t)$是属于 H 类的,从而 $G(t)$ 亦是属于 H 类的(而不仅是属于 H_0 类),那么,按照在§83, 2° 段中的記号,对于所有的"結点",我們可以有

$$G(c_k-0)=G(c_k+0), \tag{103.8}$$

由此可以得出,所有数 $\gamma_k=0$(参看公式(83.7)),因此,所有結点都是特殊結点.容易看出,在所討論的情形下,方程(103.1),(103.2)的理論在本质上与在第二章中对 L 是一条光滑的封閉圍綫(或者 L 是有限条这样的圍綫的一个組合)的情形下所叙述的理論沒有什么区别.唯一的区别在于:$\varphi(t)$ 或者对应地按上一节中所指出的一般方法所确定的 $\psi(t)$,当 t 与角点重合时①,可能不适合方程(103.1)或者相应地不适合方程(103.2).

如果假定 $A(t)$和 $B(t)$是属于 H_0 类的,但是在点 c_k 处有

$$\arg G(c_k-0)=\arg G(c_k+0) \tag{103.9}$$

(精确到差一个 2π 的整数倍的数),那么,在这个情形下,并不发生重大的变更.并且在这种情形下,所有結点都是特殊結点,而解的分类失去意义.

反之,如果形式为(103.8)或者(103.9)的等式不成立,那么,甚至在当 L 是一条光滑圍綫的情形下,比之当 L 是任意一条逐段光滑的曲綫的情形而言,我們不能作出任何本质的簡化.

但是,我們指出一个事实,它有时有重要的意义.亦就是說,

① 关于这一点还可以参看 Д. А. Квеселава [7].

我們可以証明，如果方程 (103.1) 的解 $\varphi(t)$ 在已給的普通結点的邻域内保持是有界的，那么，$\varphi(t)$ 必然在这一点的邻域内是属于 H 类的（而不仅是属于 H_0 类的）．事实上，如果 c 是上述的結点，又若 $\varphi(c-0)\neq\varphi(c+0)$，那么，(103.1)左端的第二项就象

$$\frac{B(t_0)}{\pi i}[\varphi(c-0)-\varphi(c+0)]\ln(t_0-c)$$

那样是无界的[①]，而这是不可能的，因为左端的其余各项以及右端在 c 附近都是有界的．

对于方程(103.2)，亦有同样的情况．

注釋 在数学物理的边值問題（例如，在势論的問題中）中，边界上角点的存在，通常会使得所归結的奇异积分方程之求解大大复杂化．

这与上面所指出的并不是矛盾的，因为在上述的一些問題中，角点的存在通常会影响到函数 $k(t_0, t)$，为了直接应用上面所叙述的理論，可能需要再要求 $k(t_0, t)$ 具有正規性质．

§104. 应用于第一类的特征方程

在 §86 中以及在 §90 中的更一般的假定下，求解了方程

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=f(t_0), \qquad (104.1)$$

現在可以把这个方程叫做第一类的特征方程；从在 §97 中所討論过的方程 $\mathbf{K}^0\varphi=f$ 取 $A(t_0)=0$, $B(t_0)=1$，便可以得出这个方程．

为了簡单起見，在这里我們只討論 L 是一条断續的光滑曲綫的情形（如同在 §86 中那样）；处理一般的情形亦是沒有困难的（参照 §90）．

对应于方程(104.1)的联結問題(97.6)在 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中的典則函数 $X(z)$，由公式(§§86 及 85)

① 我們指出，量 $B(c-0)$，$B(c+0)$ 中至少有一个是不等于零的；否則結点 c 就是特殊結点．

$$X(z)=C\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}\tag{104.2}$$

給出，其中 C 是一个异于零的任意常数，而

$$R_1(z)=\prod_{j=1}^{q}(z-c_j),\quad R_2(z)=\prod_{j=q+1}^{2p}(z-c_j);\tag{104.3}$$

根式按照 § 85 中那样理解，亦就是說，

$$\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}=\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}},\quad \frac{\sqrt{R_2(z)}}{\sqrt{R_1(z)}}=1:\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}},\tag{104.4}$$

并且右端的根式理解为在沿着 L 而割开的平面上是全純的一枝；为了确定起見，如同在 § 85 中那样，我們可以假定，对很大的 $|z|$，有

$$\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}=z^{q-p}+\alpha_1 z^{q-p-1}+\cdots.\tag{104.5}$$

在目前的情况下，所有端点都是普通結点．由于 $X(z)$ 在无穷远处的阶数等于 $q-p$，因此，$h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类的指标

$$\varkappa=p-q.\tag{104.6}$$

方程(104.1)在 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中的典則函数 $Z(t)$ 是由公式(97.9)取 $A=0$, $B=1$ 而給出，因此，

$$Z(t)=X^+(t)=-X^-(t)=C\frac{\sqrt{R_1(t)}}{\sqrt{R_2(t)}}=C\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}},\tag{104.7}$$

其中后一个根式理解为函数 $\sqrt{R_1(z)/R_2(z)}$ 从 L 的左侧所取得的边值．

与此同时，根据公式(97.12)，

$$\mathbf{K}^*f\equiv\frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\pi i\sqrt{R_2(t_0)}}\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}f(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-t_0)}.\tag{104.8}$$

根据 § 97 中的一般性公式，方程 (104.1) 在 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中的解可以表成形式：

$$\varphi(t_0)=\frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\pi i\sqrt{R_2(t_0)}}\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}f(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-t_0)}+\frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\sqrt{R_2(t_0)}}P_{p-q-1}(t_0),\tag{104.9}$$

其中 $P_{p-q-1}(t_0)$ 是次数不超过 $p-q-1$ 的任意多项式(当 $p\leqslant q$ 时，$P_{p-q-1}(t_0)\equiv 0$)，并且当 $p<q$ 时，为使解存在的充分和必要条件是

$$\int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}}{\sqrt{R_1(t)}} t^j f(t)\,dt=0,\quad j=0,\ 1,\ \cdots,\ q-p-1. \tag{104.10}$$

这样一来，我們重又得出了 §86 的結果．我們再指出，方程(104.1)是自身相联的，并且可解性条件(104.10)所說明的并不比把 §102 中定理 I 应用于这一个特殊情形所得出的多．

§105．第一类方程的正則化和求解

我們現在討論一般形式的第一类方程

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0), \tag{105.1}$$

为了簡单起見，亦象在上一节中那样，认为 L 仍然是一条断續的光滑曲綫，并且引用同样的記号．

这个方程可以改写成

$$\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt=f(t_0), \tag{105.2}$$

其中

$$B(t_0)=K(t_0,\ t_0),\quad k(t_0,\ t)=\frac{K(t_0,\ t)-K(t_0,\ t_0)}{t-t_0}. \tag{105.3}$$

象通常那样，我們将假定所考慮的方程是正則型的；在現在的情况下，这可以归結为在 L 上处处都成立 $B(t)\neq 0$ 的条件．因此，不失一般性，我們可以假定

$$B(t)=1. \tag{105.4}$$

与此相对应，所考慮的方程具有形式

$$\mathbf{K}\varphi\equiv\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt=f(t_0). \tag{105.5}$$

我們仍然假定，$k(t_0,\ t)$ 对 t_0 及 t 是属于 H 类的；此外，我們暂时还假定 $f(t)$ 是属于 H 类的．

方程(105.1)是方程(96.11)的特殊情形,因此,我們可以把在上一节中所得出的所有結果应用于方程 (105.1). 如果我們直接应用 §99 中所指出的正則化方法于方程 (105.5),并且利用在上一节中所指出的特征方程(104.1)的解,那么,我們亦可以得到同样的結果和公式. 我們簡单地重复这些結果中的某一些結果.

方程(105.5)在 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 类中对应的典則函数由公式

$$Z(t)=C\frac{\sqrt{R_1(t)}}{\sqrt{R_2(t)}} \tag{105.6}$$

給出,其中 C 是异于零的任意常数; $h(c_1, c_2, \cdots, c_q')$ 的指标

$$\varkappa=p-q. \tag{105.7}$$

当 $\varkappa=p-q\geqslant 0$ 时,方程(105.5) 在 $h(c_1, c_2, \cdots, c_p)$ 类中找解的意义下等价于 Fredholm 方程

$$\varphi(t_0)+\mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi=\mathbf{K}^*f+\frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\sqrt{R_2(t_0)}}P_{p-q-1}(t_0), \tag{105.8}$$

其中 $P_{p-q-1}(t_0)$ 是次数不超过 $p-q-1$ 的任意多項式(当 $p=q$ 时, $P_{p-q-1}(t_0)\equiv 0$).

当 $\varkappa=p-q<0$ 时,方程(105.5)等价于 (在同一个意义下) 方程

$$\varphi(t_0)+\mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi=\mathbf{K}^*f \tag{105.9}$$

連同形式为

$$\int_L \rho_j\varphi dt=\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}\,t^j f(t)}{\sqrt{R_1(t)}}dt,\quad j=0, 1, 2, \cdots, q-p-1 \tag{105.10}$$

的条件的全体.

在上述这些公式中

$$\mathbf{K}^*f\equiv\frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\pi i\sqrt{R_2(t_0)}}\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}f(t)dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-t_0)},$$
$$\mathbf{k}\varphi\equiv\frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0, t)\varphi(t)dt, \tag{105.11}$$

与此相对应

$$\mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi=\frac{1}{\pi i}\int_L N(t_0,\ t)\varphi(t)dt, \qquad (105.12)$$

这里

$$N(t_0,\ t)=\frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\pi i\sqrt{R_2(t_0)}}\int_L\frac{\sqrt{R_2(t_1)}\,k(t_1,\ t)dt_1}{\sqrt{R_1(t_1)}\,(t_1-t_0)} \qquad (105.13)$$

及

$$\rho_j(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\sqrt{R_2(t_1)}\,t_1^j k(t_1,\ t)dt_1}{\sqrt{R_1(t_1)}}. \qquad (105.14)$$

我們注意到下列事实：方程(105.5)在已給的端点 c 附近保持有界的所有解，都应該在 c 处取値零.

在 §86 中曾对一个特殊情形，亦就是，对形式为(104.1)的方程，指出过解的这一个性质．由于方程(105.5)可以改写成

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=f(t_0)-\mathbf{k}\varphi,$$

因此，一般情形可以归結为上述的特殊情形；如果解 φ 在端点 c 附近是有界的，那么，$\mathbf{k}\varphi$ 在这个端点的邻域内，正象 f 那样，是属于 H 类的；由此便可以导出我們的結論.

最后，我們指出，如果假定函数 $f(t)$ 是属于 $h(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_q)$ 类的，而不一定是属于 H 类的，那么，上述所有公式和結果都仍然是有效的.

§106．研究奇异积分方程的其他方法

在 §55 中我們熟悉了由 И. Н. Векуа 提出的①，用来研究在下列情形下的奇异积分方程的一个有效方法：当积分曲綫由一些光滑的封閉圍綫所构成，而特征部分的系数是連續的情形．类似的方法亦适用于积分路徑是任意一条逐段光滑曲綫，而所考慮的

① 这里我們所指的是 И. Н. Векуа 論文[7]中所讲到的方法，这个方法与同一个著者論文[4]所讲到的方法是不同的.

奇异积分方程是属于在 § 96 中所讲到的类型之一的情形. 在这种情形下,事情要稍为复杂些,因为在选擇正則化算子时必須考慮到,要使得經正則化后而得出的,并且等价于原来的奇异积分方程的 Fredholm 方程之核的性质在端点附近是十分簡单的.

由下面的考虑出发,不难得出这样的正則化算子.

我們知道,当沿用 § 97 的記号时,特征方程

$$\mathbf{K}^0\varphi=f$$

在已給类 h 中的解,在 $\varkappa\geqslant 0$ 时,由公式

$$\varphi(t_0)=\mathbf{K}^*f+B^*(t_0)Z(t_0)P_{\varkappa-1}(t_0)$$

給出,其中 $P_{\varkappa-1}(t)$ 是次数不超过 $\varkappa-1$ 的任意多項式. 这样一来,当 $\varkappa\geqslant 0$ 时,我們有恒等式

$$\mathbf{K}^0\mathbf{K}^*f\equiv f,$$

因此 $\mathbf{K}^0\mathbf{K}^*=\mathbf{E}$, 其中 $\mathbf{E}$ 是单位算子. 我們看出,在目前的情形下,算子 $\mathbf{K}^0$ 是对于 $\mathbf{K}^*$ 的正則化算子,并且正則化的結果是非常簡单的.

因此,不难想到,如果交换 $\mathbf{K}^0$ 与 $\mathbf{K}^*$ 所处的地位,当 $\varkappa<0$ 时,亦有类似的事实发生.

事实上,通过一些不复杂的推导,可以建立

$$\mathbf{K}^*\mathbf{K}^0\varphi=\varphi(t_0)+\frac{B^*(t_0)Z(t_0)}{\pi i}\int_L P_{\varkappa-1}(t_0,\ t)\varphi(t)\,dt,$$

$$\mathbf{K}^0\mathbf{K}^*\varphi=\varphi(t_0)-\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{Q_{\varkappa'-1}(t_0,\ t)\varphi(t)\,dt}{Z(t)},$$

其中 $\varphi(t)$ 是 h 类中的任意函数,而 $P_{\varkappa-1}(t_0,\ t)$ 及 $Q_{\varkappa'-1}(t_0,\ t)$ 分别是次数不超过 $\varkappa-1$ 和 $\varkappa'-1\,(\varkappa'=-\varkappa)$ 的完全确定的多項式,并且当 $\varkappa\leqslant 0$ 时,$P_{\varkappa-1}(t_0,\ t)\equiv 0$,当 $\varkappa'\leqslant 0$ 时,$Q_{\varkappa'-1}(t_0,\ t)\equiv 0$. 特别是,如果 $\varkappa=\varkappa'=0$, 那么,$\mathbf{K}^*\mathbf{K}^0=\mathbf{K}^0\mathbf{K}^*=\mathbf{E}$, 因此,算子 $\mathbf{K}^0$ 与 $\mathbf{K}^*$ 彼此互为逆算子. 在 $\varkappa\neq 0$ 的一般情形下,这些算子虽然彼此并不互为逆算子,但是,它們具有这样的算子的实质的性质. 此外,不难証明算子 $\mathbf{K}^*$ 的下列性质:

当 $\varkappa \geqslant 0$ 时，齐次方程 $\mathbf{K}^*\omega=0$ 在 h 类中沒有非零解.

当 $\varkappa \leqslant 0$ 时，方程 $\mathbf{K}^*\omega=f$ 对于属于 h 类的每一个右端 f 在 h 类中都是可解的；对应的齐次方程恰有 $\varkappa'=-\varkappa$ 个 h 类的綫性无关解.

因此，算子 $\mathbf{K}^*$ 可以起着与 И. Н. Векуа 等价性定理（在 § 55 中証明过的）中的算子 $\mathbf{M}$ 同样的作用. 这样一来，在現在的情形下，我們得出一个与 § 55 中的定理类似的等价性定理.

正象在 § 55 中那样，利用这个定理，可以得出在 § 102 中用另外的方法証明过的那些基本定理. 在目前的情形下，其推导比之在 § 55 中所做过的要稍为复杂些，因为在这里我們还需要进一步研究解在結点附近的性质.

在这一节中所用到的研究方法是属于 Д. А. Квеселава[1] 的，在她的論文[1]中，讀者还可以找到这里所指出的結論之証明①.

利用这方法可以得出一系列新的結果，这些結果与第二章 §§ 55, 59 中所指出过的那些結果是类似的，部分是由 Д. А. Квеселава 本人完成的.

II.　应用于 Dirichlet 問題及其类似的問題②

在前面几个部分中所闡述的結果可以有成效地被用来求解数学物理中的很多重要問題.

在这一部分中，我們要給出一个既是最簡单的，同时又是典型的应用，亦就是，用来求解沿着有限条任意形状的弧而割开的平面

① Д. А. Квеселава 考虑了更特殊的情形，亦就是，当积分綫是一条光滑的封閉圍綫，而特征部分的系数，正象在 § 103, 2° 段中那样，可以有第一类的間断点的情形. 但是，这个方法是容易移植到一般情形上的.

② 在这一部分所叙述的結果，特别是，有关一条圍綫情形的結果（§§ 107, 108）是著者在他的論文[6]中得出的，在这篇論文中事实上仅解决了 § 107 中的問題 A_1. Н. П. Векуа[1] 給出了对于任意多条圍綫情形的推广（§ 109）；亦可以参看著者的論文[6].

上的 Dirichlet 問題以及它的某些变态問題，这些問題在空气动力学中（例如，在机翼理論中）起着重要的作用.

§107. 在沿着一条任意形状的弧而割开的平面上的 Dirichlet 問題及其类似的問題

1°. 假定 $L=ab$ 表示一条簡单的、敞开的光滑弧. 此外，我們还假定 L 具有适合 H 条件的曲率①.

假定 S 表示沿着 L 而割开的平面. 我們提出下述問題.

問題 A 要求根据边界条件

$$\operatorname{Re}\Phi^{+}(t_0)=\operatorname{Re}\Phi^{-}(t_0)=f(t_0) \quad \text{在 } L \text{ 上}, \tag{107.1}$$

来找一个在 S 内是全純的，在无穷远处取值零的，可以从 L 的左側及右側連續拓展到曲綫 L 的所有普通点（不是端点的点）上的，而在端点附近是适合下列不等式的函数 $\Phi(z)$：

$$|\Phi(z)|<\frac{\text{常数}}{|z-c|^{\alpha}}, \quad 0\leqslant\alpha=\text{常数}<1 \quad (c=a \text{ 或 } b)②,$$

这里 $f(t_0)$ 是給定在 L 上的 H 类中的实函数.

問題 A 可以分成下列情形来討論：

問題 $\mathbf{A}_1$ 附加要求函数 $\Phi(z)$ 在两个端点 a 和 b 附近是有界的.

問題 $\mathbf{A}_2$ 附加要求函数 $\Phi(z)$ 在端点 a 和 b 之中的一个附近是有界的.

問題 $\mathbf{A}_3$ 函数 $\Phi(z)$ 在两个端点 a 和 b 附近都可以是无界的.

2°. 我們先闡明与問題 A 对应的齐次問題（亦就是，問題 A 在 $f(t)\equiv 0$ 的情形）之非零解的存在性問題，我們把这个齐次問題叫做問題 A^0，而把对应于問題 A_1, A_2, A_3 的齐次問題分别叫做問題 A_1^0, A_2^0, A_3^0. 对于問題 A^0，边界条件(107.1)具有形式

---

① 这意味着：L 上点 t 的坐标 x 与 y 对弧坐标具有适合 H 条件的二阶导函数.

② 換句話說，函数 $\Phi(z)$ 是一个在无穷远处取值零的具有跳跃曲綫 L 的分区全純函数.

$$\operatorname{Re}\Phi^{+}(t_0)=\operatorname{Re}\Phi^{-}(t_0)=0 \quad \text{在 } L \text{ 上}. \qquad (*)$$

我們首先討論一个特殊情形：$L=ab$ 是实軸上的一段，并且用更一般的条件 $\Phi(z_0)=0$ 来替代条件 $\Phi(\infty)=0$，这里 z_0 是不在 L 上的某一个点（特别是，可以取 $z_0=\infty$）；我們所指的是函数 $\Phi(z)$ 在无穷远处是有界的．

在研究中引进在无穷远处是有界的（具有跳跃曲綫 L 的）分区全純函数

$$\Omega(z)=\Phi(z)-\overline{\Phi}(z);$$

此处，我們应用了 § 39, 1° 段中的記号，亦就是，把 $\overline{\Phi}(z)$ 理解为由公式

$$\overline{\Phi}(z)=\overline{\Phi(\bar{z})}$$

所确定的函数．提醒一下，在 L 上有

$$\overline{\Phi}^{+}(t)=\overline{\Phi^{-}(t)}, \quad \overline{\Phi}^{-}(t)=\overline{\Phi^{+}(t)}. \qquad (**)$$

依据 (*) 及 (**)，容易看出，在 L 上 $\Omega^{+}(t)-\Omega^{-}(t)=0$，由此可得，$\Omega(z)=$常数$=2C$．这样一来，$\overline{\Phi}(z)=\Phi(z)-2C$，这里 C 是一个常数．因此，根据 (*) 及 (**)，容易看出

$$\Phi^{+}(t)+\Phi^{-}(t)=2C \quad \text{在 } L \text{ 上}.$$

这样一来，为了确定 $\Phi(z)$，我們有一个最簡单的联結問題，这个問題在无穷远处是有界的一般解，由公式

$$\Phi(z)=C+\frac{Az+B}{\sqrt{(z-a)(b-z)}} \qquad (***)$$

給出，其中 A 和 B 都是任意常数．

現在如果要求函数 $\Phi(z)$ 应該适合問題 A^0 的边界条件 (*)，那么，容易断言，常数 A, B, C 都应該是純虛数．此外，如果考虑到在問題 A_1^0 和 A_2^0 中所要求的补充条件，以及条件 $\Phi(z_0)=0$，那么，通过非常初等的計算，我們导出下述的結論：

問題 A_1^0 及 A_2^0 都沒有非零解．問題 A_3^0 的最一般的解具有形式

$$\Phi(z)=k\omega(z),$$

其中 k 是一个实的任意常数，而 $\omega(z)$ 是在无穷远处为有界的、完全确定的分区全純函数.

我們再指出下列事实. 如果在問題 A_1^0 中抛去条件 $\Phi(z_0)=0$, 那么，根据同一个公式 (***)，容易看出，这个問題的唯一解是 $\Phi(z)=ki$, 其中 k 是一个实常数，从而，有 $\operatorname{Re}\Phi(z)=0$.

我們已經討論了当 $L=ab$ 是一条直綫綫段时的情形. 利用将区域 S 映射成 ζ 平面上沿着实軸上某一段 $\alpha\beta$ 而割开的区域 Σ 的保角映射（假定这个映射同时把端点 a 与 b 分别映射成端点 α 与 β①），就将一般情形归結为上述情形. 这样一来，上面已經得出的有关問題 A^0 的解的結論对于一般情形仍然是有效的.

3°. 我們現在着手于問題 A 的求解. 我們将找形式为（参照 § 65）

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\mu(t)\,dt}{t-z} \qquad (107.2)$$

的解，其中 $\mu(t)$ 是 H^* 类中实的未知函数；今后，我們暫时把問題 A 的解（相应地，問題 A_1, A_2, A_3 的解）理解为可以表成形式为 (107.2) 的解②.

边界条件 (107.1) 可归結为第一类实的奇异积分方程

$$\frac{1}{\pi}\int_L\mu(t)\frac{dr}{r(t_0,\ t)}\equiv\frac{1}{\pi}\int_L\mu(t)\frac{\cos\alpha(t_0,\ t)}{r(t_0,\ t)}\,ds=f(t_0), \qquad (107.3)$$

这里，正象在 § 64 中那样，$r(t_0,\ t)=|t-t_0|$，而 $\alpha(t_0,\ t)$ 表示在 t 处的正切綫方向和向量 $\overrightarrow{t_0t}$ 之間所夹的角. 上述方程还可以改写成（参照 § 64）形式:

---

① 根据保角映射已知的性质（例如，参看 S. Warschawski [1]），容易看出，在我們对 L 所加的条件下，在端点 c 附近适合条件

$$|\Phi(z)|<\frac{\text{常数}}{|z-c|^{\mu}},\quad 0\leqslant\mu<1$$

的函数 $\Phi(z)$，經过保角映射后变成在 ζ 平面上在对应的端点附近亦适合同样条件的函数.

② 这个限制在下面（7° 段中）要去掉.

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int_L \mu(t)\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\,ds=f(t_0),\qquad(107.4)$$

其中 $\vartheta=\arg(t-t_0)$．在我們对 L 所加的条件下，这个方程是属于我們在 § 105 中已研究过的那一种类型的[①]．

因为方程(107.3)是实方程，因此，整个研究我們可以在实变范圍內来进行(参看 § 102 末尾的注釋 2)．

方程(107.3)的相联齐次方程

$$\int_L \nu(t)\frac{\cos\alpha(t,\ t_0)}{r(t_0,\ t)}\,ds=0\qquad(107.5)$$

具有簡单的物理意义．亦就是，假定要求找一个展布在 L 上并且在 L 上取常数值的单层势之密度 $\nu(t)$，即

$$\int_L \nu(t)\ln\frac{1}{r(t_0,\ t)}\,ds=常数\qquad(107.6)$$

(电容器 L 上的"电荷分布問題")．将上述方程两边对 s_0 微分，我們立刻得出方程(107.5)．

我們現在分别考慮問題 A_1, A_2, A_3 中的每一个．

4°. 为了求解問題 A_1．显然要求在 $h(a,\ b)$ 类中找方程(107.3)的解，亦就是說，要求找出在两个端点 a 和 b 处是有界的解[②]．依据在 § 105 所指出的結果，这一类的指标 $\varkappa$ 等于 -1[③]．

与方程(107.3)对应的齐次方程沒有类 $h(a,\ b)$ 的非零解；这可以从問題 A_1^0 沒有非零解导出．因此，相联齐次方程 (107.5) 恰好有一个 $h(a,\ b)$ 类的相联类 h_0 中的綫性无关解，我們用 $\nu_0(t)$ 表示这个解．

容易看出，

$$\int_L \nu_0(t)\,ds\neq 0.\qquad(107.7)$$

事实上，在相反的情形，函数

---

① 事实上，根据 § 7 末尾所指出的，$\dfrac{\partial\vartheta}{\partial s}$ 对于 t 以及 t_0 是适合 H 条件的．

② 根据在 § 105 (4° 段) 中所指出的結果，这样的解在端点处都应該取値零．

③ 在目前的情形下 $p=1$, $q=2$．

$$U(x, y)=\int_L \nu_0(t) \ln \frac{1}{r(t_0, t)} ds$$

是一个在 S 内为調和的，連續拓展到 L 上(包括端点)的，又在 L 上是常数的，并且在无穷远处取値零的函数．因此，$U(x, y)=0$，从而由此有在 L 上，$\nu_0(t)=0$ ①，而这与条件(107.7)是矛盾的．

为使方程(107.3)可解必須而且只須

$$\int_L f(t) \nu_0(t) ds=0. \tag{107.8}$$

如果这个条件不适合，那么，总可以选取这样的常数 C，使

$$\int_L [f(t)+C] \nu_0(t) ds=0; \tag{107.9}$$

这可从(107.7)导出．因此，找出問題

$$\operatorname{Re} \Phi^+(t_0)=\operatorname{Re} \Phi^-(t_0)=f(t_0)+C \tag{107.10}$$

的解以后，令

$$U=\operatorname{Re} \Phi(z)-C, \tag{107.11}$$

我們就得出普通 Dirichlet 問題

$$U^+=U^-=f(t_0) \tag{107.12}$$

在无穷远处是有界即在无穷远处取値 $-C$ 的解．

5°. 为了求解問題 A_2，要求找出方程(107.3)在 $h(a)$ 类中的解；为确定起見，我們假定，解应該在端点 a 处是有界的．$h(a)$ 类的指标 $\varkappa$ 等于 0 ②．与方程(107.3)对应的齐次方程沒有 $h(a)$ 类的非零解；这可从問題 A_2^0 沒有非零解推出．因此，相联方程(107.5)在相联类 $h(b)$ 中沒有非零解．这意味着，方程(107.3)总有一个而且仅有一个类 $h(a)$ 的解，并且問題 A_2 总是单值可解的．

6°. 为了求解問題 A_3，要求找出方程(107.3)在 h_0 类中的解．这一类的指标等于 1 ③．因为，由上一段的結果可以知道，相联齐次方程(107.5)甚至在更大的类 $h(b)$ 中都沒有非零解，因此，方程

① 参看 § 65 中公式(65.11)．

② § 105；在目前的情形下 $p=1, q=1$．

③ § 105；在目前的情形下 $p=1, q=0$．

(107.5)在相联类 $h(a, b)$ 中亦沒有非零解．于是，方程(107.3)总是可解的，并且它的解綫性地包含一个任意常数 C(因为对应的齐次方程只有一个綫性无关解)．

这样一来，問題 A_3 总是可解的，并且它的一般解綫性地包含一个(实的)任意常数．

7°. 到目前为止，我們总是把問題 A 的解理解为可以表成形式(107.2)的解．我們还需要証明，在問題的求解过程中我們所加的上述补充条件，实际上并不影响到所得的結果之一般性．

在問題 A_2 的情形下，这是显然的，因为我們已經証明了总存在可以表成形式为(107.2)的解；同时又由于問題 A_2^0 沒有非零解知道，問題 A_2 沒有其他的解．

在問題 A_1 的情形下，仅可能产生下述的疑問：如果我們拋去表述为形式(107.2)的解，条件(107.8)是否对問題的可解性仍然是必要的．容易証明，条件(107.8)在这种情形下亦是必要的．事实上，假定

$$\int_L f(t)\nu_0(t)\,ds \neq 0,$$

虽然如此，又假定問題 A_1 有在无穷远处取値零的解 $\Phi_1(z)$．現在选取这样的实常数 C，使得条件 (107.9) 成立，并且正象上面(在 4° 段中)所証明过的那样，我們可以作出問題

$$\operatorname{Re}\Phi_2^+(t_0) = \operatorname{Re}\Phi_2^-(t_0) = f(t_0)$$

的解 $\Phi_2(z)$，且 $\operatorname{Re}\Phi_2(\infty) = -C \neq 0$．但是，此时，处处都是有界的函数 $\Phi(z) = \Phi_2(z) - \Phi_1(z)$ 适合条件：$\operatorname{Re}\Phi^+(t_0) = \operatorname{Re}\Phi^-(t_0) = 0$，而因此，根据前面所做的注釋(2° 段的)，处处都有 $\operatorname{Re}\Phi(z) = 0$，而这与 $\operatorname{Re}\Phi(\infty) = \operatorname{Re}\Phi_2(\infty) - \operatorname{Re}\Phi_1(\infty) = -C \neq 0$ 是矛盾的．

在問題 A_3 的情形中，只可能产生这样的疑問：找出形式为(107.2)的解以后，我們找不出更一般的解．但是，如果我們把在 6° 段中得出的結果和在 2° 段中所指出的有关齐次問題 A_3^0 的解

之結果作一比較,那么容易看出,这个疑問是容易解决的.

注釋 对于方程(107.3)的相联非齐次方程

$$\frac{1}{\pi}\int_L \nu(t)\frac{\cos\alpha(t,\ t_0)}{r(t,\ t_0)}\,ds=g(t_0) \tag{107.13}$$

的研究与方程 (107.3) 的研究应該是完全类似的: 只需交换方程(107.3)与(107.13)所处的地位就够了.

一个非常重要的水力学問題可以归結为方程 (107.13), 这个水力学問題是要找出繞过已知形状的弧的水流. 从应用角度来看, 最大的兴趣是要找 $h(a)$ 类中的解, 或者归結为找 $h(b)$ 类的解[①]. M. A. Лаврентьев 的論文[2] (1932 年)是专門研究这个問題的,在他的研究工作中沒有用到奇异积分方程的一般理論,他得出了一系列具有較大意义的結果, 特别是, 他指出了一个近似解法. 在著者看来, 对这个近似解法和奇异积分方程类似的近似解法的进一步的研究, 可說是这些方程理論中一个重要而明确的問題.

§108. 化为 Fredholm 方程. 例

在上一节中所得出的奇异积分方程(107.4),可以改写成

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\sin\alpha(t_0,\ t)\,e^{-i\alpha(t_0,\,t)}\mu(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0). \tag{108.1}$$

按照在 §105 中所指出的方法, 这个方程可以归結为这种或者那种 Fredholm 方程,而这是与在哪一类 h 中找解有关的,亦就是說,与应該找問題 A_1、問題 A_2 或者問題 A_3 中之一个的解是有关的. 在这种情况下,当然,决定于所感兴趣的具体情形的需要和可能来变更这个方法.

为确定起見, 我們停留在問題 A_1 上, 亦就是, 討論到要求在

---

① 这与所謂的 C. A. Чаплыгин 的假設有关,参看 M. A. Лаврентьев [2].

$h(a, b)$ 类中找方程 (108.1) 的解的情形．如果我們正好按照在 § 105 中所指明的規律来进行，那么，在現在的情形 (指标 $\varkappa=-1$) 下，我們正則化的結果，可以得出一个 Fredholm 方程以及一个形式为(105.10)的补充条件．

但是，我們假定，我們所感兴趣的是普通提法下的 Dirichlet 問題的求解，亦就是，要求根据边界条件

$$U^+=U^-=f(t_0) \quad \text{在 } L \text{ 上}, \tag{108.2}$$

确定一个在 S 内是調和的，处处都是有界的函数 $U(x, y)$．令

$$U=\operatorname{Re}\Phi(z)-C, \tag{108.3}$$

其中 $\Phi(z)$ 表示在无穷远处取値零的积分 (107.2)，而 C 是事先沒有給定的常数，我們就得出一个积分方程，这个方程可以从(108.1)中把 $f(t_0)$ 換成 $f(t_0)+C$ 而得出，亦就是說，我們可以得出方程

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dr}{r(t_0, t)} \equiv \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0}$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\sin\alpha(t_0, t)\,e^{-i\alpha(t_0, t)}\mu(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0)+C. \tag{108.1a}$$

我們現在提醒一下，根据 § 87 末尾所指出的，方程

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)}{t-t_0}\,dt=g(t_0)+C \tag{108.4}$$

(其中 C 是事先幷未給出的常数)在 $h(a, b)$ 类中(亦就是，在 H 类中)的(唯一)解具有形式

$$\mu(t_0)=-\frac{\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)}}{\pi}\int_L \frac{g(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}\,(t-t_0)}, \tag{108.5}$$

幷且常数 C 完全由

$$C=-\frac{1}{\pi}\int_L \frac{g(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \tag{108.6}$$

确定．在这里我們已利用了經过稍加变更后的公式 (87.16) 和 (87.17)；亦即，假定

$$\sqrt{(t-a)(t-b)}=i\sqrt{(t-a)(b-t)}, \tag{108.7}$$

我們用根式 $\sqrt{(t-a)(t-b)}$ 来替代根式 $\sqrt{(t-a)(b-t)}$；在 $L=ab$

是实軸上一段的情形下，$\sqrt{(t-a)(b-t)}$ 在 L 上取得实数值.

现在先把公式(108.1a)左端的第二項移到右端，再把所得出的方程的右端当作已知函数（精确到差一个常数），利用上面那些公式来求解这个方程. 亦就是說，完全类似于我們在一般情形下正則化奇异积分方程那样进行推导，我們便得出 Fredholm 方程

$$\mu(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L N(t_0,\ t_1)\mu(t_1)dt_1=f_0(t_0), \qquad (108.8)$$

这个 Fredholm 方程在 H 类中找解的意义下等价于原来的方程(108.1a)，并且它不包含任何未确定的常数；我們还曾引用了下面的記号：

$$N(t_0,\ t_1)=-\frac{\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)}}{\pi}\int_L\frac{\sin\alpha(t,\ t_1)e^{-i\alpha(t,\ t_1)}dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}\ (t_1-t)(t-t_0)}, \qquad (108.9)$$

及

$$f_0(t_0)=-\frac{\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)}}{\pi}\int_L\frac{f(t)dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}\ (t-t_0)}. \qquad (108.10)$$

容易看出，在我們所加的条件下，方程(108.8)是一个普通的正則型 Fredholm 积分方程，它的每一个（連續）解是属于 H 类的，而在端点处都取値零.

容易証明，与(108.8)对应的齐次方程不可能有 $h(a,\ b)$ 类的非零解. 事实上，假定 $\mu(t)$ 是这个齐次方程的解. 那么，根据(108.1a)有

$$\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\mu(t)dr}{r(t_0,\ t)}=\text{常数}. \qquad (*)$$

我們可以假定 $\mu(t)$ 是一个实函数，因为否則，我們可以分别討論 $\mu(t)$ 的实部和虛部. 由上述方程可知道，根据 $\mu(t)$ 由公式(107.2) 所确定的、在无穷远处取値零的函数 $\Phi(z)$[①] 之实部从 L

---

① 这个函数可以从左側及右側連續拓展到 L 上（亦包括端点在内，因为 $\mu(t)$ 在这些端点处取値零）.

的左侧和右侧而取的边值皆等于零，它在端点 a 及 b 处亦取值零，但是，这样的函数必然等于零，因此，$\mu(t)=0$.

但是，这样一来，容易証明，方程(108.8)只可能有实解；当然，我們假定 $f(t_0)$ 是实函数．事实上，容易証明，解的虚部适合方程(*)，并且因此，它必然等于零．

因为与 Fredholm 方程(108.8)对应的齐次方程沒有非零解，因此，方程(108.8)总是可解的；解 $\mu(t)$ 是实函数，与这个解对应的函数 $U=\operatorname{Re}\Phi(z)$ 适合边界条件

$$U^{+}=U^{-}=f(t_0)+\text{常数},$$

并且我們的問題可以通过 Fredholm 方程解决．

当方程(108.8)具有复数形式，而 Dirichlet 問題是在实变函数范圍内来考虑时，产生某些麻煩．

但是，这些麻煩是容易克服掉的．事实上，在(108.8)中分出实部和虚部(假定了 $\mu(t)$ 是实函数)，我們便得出两个分别是第二类和第一类的实的 Fredholm 方程，它們是

$$\mu(s_0)+\int_L M(s_0, s_1)\mu(s_1)ds_1=F(s_0), \qquad (108.11)$$

$$\int_L M_1(s_0, s_1)\mu(s_1)ds_1=F_1(s_0), \qquad (108.12)$$

其中 s_0 和 s_1 是点 t_0 和 t_1 的弧坐标，而

$$(M+iM_1)ds_1=\frac{1}{\pi i}N(t_0, t_1)dt_1, \quad F+iF_1=f_0(t_0).$$

容易証明，方程(108.11)的每一个(实)解亦是方程(108.8)的解，亦就是說，方程(108.12)是方程(108.11)之推論，而这样一来，原来問題就归結为求解实的 Fredholm 方程(108.11).

事实上，如果假定 μ' 是方程(108.11)的任一个实解，又若假定 μ 仍然是方程(108.8)的解，μ 必然是实解，那么，$\mu''=\mu-\mu'$ 显然适合齐次方程

$$\mu''(s_0)+\int_L M(s_0, s_1)\mu''(s_1)ds_1=0; \qquad (**)$$

容易看出，μ'' 是属于 H 类的并且在端点处都取値零.

現在我們令

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu''(t)\frac{dr}{r(t_0,\ t)}=\chi(t_0). \qquad (***)$$

将我們曾經用来把方程 (108.1a) 正则化为方程(108.8)的同样的正則化过程应用到上一个等式上，并且注意到(**)，我們便得出

$$\chi_0(t_0)\equiv-\frac{\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)}}{\pi}\int_L\frac{\chi(t)dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}(t-t_0)}$$

$$=i\nu(t_0),$$

其中 $\nu(t_0)$ 是 H 类中某一个实函数；由此，根据等式 (108.4) 和 (108.5) 之等价性，我們可以断言

$$\chi(t_0)=\frac{1}{\pi}\int_L\frac{i\nu(t)dt}{t-t_0}+\text{常数};$$

在积分中分出虛部，并注意到 $\chi(t)$ 是一个实函数，我們可得出

$$\int_L\nu(t)\frac{dr}{r(t_0,\ t)}=\text{常数},$$

由此知道，$\nu(t)=0$. 因此，$\chi(t)=$ 常数，而最后，根据 (***)，$\mu''(t)=0$，而这就証明了我們的結論.

实例.

1. 假定 $L=ab$ 是一直綫段. 这时

$$\sin\alpha(t,\ t_1)=0,\quad N(t_0,\ t_1)=0,$$

并且因此，根据(108.8)及(108.10)

$$\mu(t_0)=-\frac{\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)}}{\pi}\int_L\frac{f(t)dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}(t-t_0)}. \qquad (108.13)$$

2. 假定 $L=ab$ 是中心在坐标原点的一个圓弧. 容易驗証，在这种情形下 $N(t_0,t_1)=0$，因此，正好象直綫段的情形那样，$\mu(t_0)$ 亦可以由同一个公式(108.13)給出.

§109. 在沿着有限多条任意形状的弧而割开的平面上的 Dirichlet 問題

沒有困难地可以把§107中的問題A的解法推广到当 L 由任意(有限)多条沒有公共点的弧 $L_j=a_jb_j$ 构成的情形，亦就是，

$$L=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_pb_p=L_1+L_2+\cdots+L_p$$

的情形；正象在§107中那样，我們假定 L_j 有适合 H 条件的曲率．用 S 表示沿着 L 而割开的平面．

为了明确起見，我們討論普通提法下的 Dirichlet 問題，亦就是，討論下述問題：根据边界条件

$$U^+=U^-=f(t_0)\quad 在 L 上，\tag{109.1}$$

要求找一个在 S 内是調和的，在无穷远处是有界的，可以从 L 的左側和右側連續拓展到 L 上(亦可以連續拓展到端点上)的函数 $U(x, y)$，这里 $f(t_0)$ 是 H 类中已知的实函数．

正和我們在一些封閉圍綫的情形下所进行的討論类似，我們从求解变态的 Dirichlet 問題开始，亦就是，首先求解下列問題：要求根据边界条件

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\Phi^+(t_0)=\operatorname{Re}\Phi^-(t_0)=f(t_0)+C_k\\ 在 L_k 上，\quad k=1, 2, \cdots, p,\end{gathered}\tag{109.2}$$

来找一个在 S 内是全純的，在无穷远处取值零的，可以从 L 的左側和右側連續拓展到 L 上(亦可以連續拓展到端点上)的函数 $\Phi(z)$，这里 $f(t_0)$ 是 H 类中已知的实函数，而 C_k 是一些实的常数，C_k 是事先并沒有給定而是需要确定的常数．

这个問題不可能有多于一个的解(容易看出，§60的証明可以适用于目前的情形)．正象在§107中那样，我們可以找形式为

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\mu(t)\,dt}{t-z}\tag{109.3}$$

的函数 $\Phi(z)$，其中 $\mu(t)$ 是 H 类中未知的实函数．边界条件

(109.2)可以归結为积分方程(参照上一节)

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\sin\alpha(t_0,\ t)e^{-i\alpha(t_0,t)}\mu(t)\,dt}{t-t_0} = f(t_0)+C_j, \quad 当\ t_0\in L_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p, \tag{109.4}$$

这些方程包含了未定常数 C_j.

我們現在回想一下,根据在 §88 中所指出的結果,积分方程

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0)+C_j,\ 当\ t_0\in L_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p \tag{109.5}$$

(其中 C_j 是事先沒有給定的一些常数)的解由公式[①]

$$\mu(t_0)=-\frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi}\int_L \frac{f(t)}{\sqrt{R(t)}}\left\{\frac{1}{t-t_0} + \sum_{j=1}^{p}\omega_j(t)\int_{L_j}\frac{dt_1}{\sqrt{R(t_1)}\,(t_1-t_0)}\right\}dt \tag{109.6}$$

給出,其中 $\omega_j(t)$ 是次数不超过 $p-1$ 的确定的多項式,而

$$R(t)=\prod_{j=1}^{p}(t-a_j)(t-b_j); \tag{109.7}$$

不止一次指出过,应該怎样理解根式 $\sqrt{R(t)}$.

正好和我們在 §108 中所做过的完全类似,利用反演公式(109.6),可以将方程(109.4)归結为(在 H 类中找解的意义下)等价的 Fredholm 方程(此方程已經不包含未定常数 C_j),我們认为写出这个方程是多余的. 正好如上一节中那样,容易証明,这样所得出的 Fredholm 方程总有且只有一个解,这个解必然是属于 H 类的,并且它在端点处都取値零. 这样一来,可以认为变态的 Dirichlet 問題是解决了.

在这以后,亦容易得出 Dirichlet 問題(109.1)的解 $U(x,\ y)$. 此时,当然,只需要找出一个适合边界条件

$$U^{+}=U^{-}=f(t_0)+C \tag{109.1a}$$

---

① 参看公式(88.9).

的解就够了，其中 C 是某一个事先并未给定的常数． 为此，例如，可以这样来进行．令

$$U=u+\sum_{j=1}^{p}\alpha_j u_j, \tag{109.8}$$

其中 u 表示可以表成形式

$$u=\operatorname{Re}\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\mu(t)\,dt}{t-z} \tag{109.9}$$

的調和函数，其中 $\mu(t)$ 是 H 类中实的未知函数，α_j 暂时是一些未定的常数，而 u_j 是一些展布在 L_j 上的单层势：

$$u_j=\int_{L_j}\sigma_j(t)\ln\frac{1}{r}\,ds, \tag{109.10}$$

并且把 $\sigma_j(t)$ 理解为任意取定的这样的实函数，使 u_j 在 L 上的値适合 H 条件①，并且要求

$$e_j=\int_L\sigma_j ds\neq 0. \tag{109.11}$$

为了保証 U 在无穷远处是有界的，常数 α_j 必須适合条件

$$\sum_{j=1}^{p}\alpha_j e_j=0 \tag{109.12}$$

(于是，U 显然是一个在无穷远处取値零的函数)．

我們現在可以通过求解与边界条件

$$u^+=u^-=f(t)-\sum_{j=1}^{p}\alpha_j u_j(t)+C_j \quad 在\ L_j\ 上,\quad j=1,\,2,\,\cdots,\,p \tag{109.13}$$

对应的变态的 Dirichlet 問題来确定 u，其中 α_j 是任意选定的一些常数．

求出后一个变态的 Dirichlet 問題的解以后，我們便得出常数 C_j 的确定的値，并且容易看出，C_j 都是常数 α_j 的綫性函数．

① 容易看出，为此只需使得函数 $\sigma_j(t)$ 是連續的，并且是正的（"正的"是由譯者添的）就够了，例如，可以取 $\sigma_j(t)=1$．在著者的論文 [6] 中，不恰当地提出了函数 u_j（在那篇論文中曾将它記作 ω_j）的一个不正确的选法；那个选法仅能适用于当 L 由直綫段构成的情形．

我們現在如此选取这些常数 α_j，使得条件

$$C_1=C_2=\cdots=C_p \tag{109.14}$$

成立，同时使得条件 (109.12) 亦是成立的，因为条件 (109.12)，(109.14) 是对于 α_j 的 p 个綫性方程的方程組，并且不难驗証这个方程組总是唯一可解的，因此，用上法总可以唯一地选定常数 α_j.

在这样选定常数 α_j 的值后，Dirichlet 問題的解就由公式 (109.8) 給出.

III. 包含未知函数及其复值共軛函数的奇异积分方程

前面用过的类似的方法亦可以用来求解其他类型的奇异积分方程.

在这一部分中，我們来考察这样类型的一种方程：这种方程包含了未知函数 $\varphi(t)$，同时又包含了 $\varphi(t)$ 的复值共軛函数 $\overline{\varphi(t)}$. 如果把給定的方程以及由这个方程取复值共軛而得出的方程联立，那么，这样形式的方程可以直接归結为包含两个未知函数 $\varphi(t)$，$\overline{\varphi(t)}$ 的两个奇异积分方程的方程組.

但是，事实上在求解上述类型的方程时，可以設法用上述(形式作了适当修改后的)方法，而不把給定的方程归結为奇异积分方程組.

在这一部分中，我們来考察一种在应用上具有重要意义的情形.

我們还是要利用到积分方程組的理論，但是，这个积分方程組不是奇异积分方程組，而是众所熟悉的 Fredholm 方程組. 在 § 110 中，我們引进这种类型的方程組对于我們来讲是必要的一些性质，在叙述时和通常的讲法略有些不同.

这一部分其余各节 (§§ 111～114) 所叙述到的結果基本上是

属于 Г. Ф.Манджавидзе [1]～[3] 的.

§ 110. Fredholm 方程組

在这一节内，我們要回忆有关 Fredholm 积分方程組的某些結果,这些結果我們在以后各节以及在第六章(在稍有不同的条件下）中要用到．在此处我們只討論包含两个未知函数由两个方程构成的方程組的情形,但是,这种限制完全不是实质的.

1°. 我們来規定一些在最近几节中要用到的术語和記号.

我們来考虑某个变量 t 的一对对有确定次序的函数（一般讲来,它們都是复的）．如果 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 是这样的一对函数,我們便把这一对函数叫做是以 $\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$ 为支量的向量;我們用 φ 或 $\varphi(t)$ 来表示这个向量,并且写成

$$\varphi(t)=(\varphi_1,\ \varphi_2).$$

向量 $\varphi(t)$ 是变量 t 的函数．为了和向量有区别起見,我們有时把普通的函数(例如，$\varphi_1(t)$ 和 $\varphi_2(t)$)叫做数量函数或純量函数．如果两个向量的对应支量是相等的,那么,我們就把它們看成是相等的．两个向量 $\varphi(t)=(\varphi_1,\ \varphi_2)$ 和 $\psi(t)=(\psi_1,\psi_2)$ 的乘积 $\varphi(t)\psi(t)$（或簡单地用 $\varphi\psi$ 来表示）是指由下式所确定的数量函数（有时把这种乘积叫做内积)：

$$\varphi\psi=\varphi_1\psi_1+\varphi_2\psi_2;$$

可以看出，$\varphi\psi=\psi\varphi$．我們不拟停留在与向量有关的另一些初等运算和概念(向量的加法,向量和純量的乘积)上,并且认为它們是我們已熟悉的.

有时我們所考虑的向量不仅依賴于一个变量，而是依賴于两个变量,但是,这当然不致会引起任何变化.

現在假定

$$A=\|A_{ij}\|=\begin{Vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{Vmatrix}$$

是以 $A_{ij}(i, j=1, 2)$ 为元素的(二阶)矩陣.

在这里我們所感兴趣的是元素皆为两个变量 t_0 和 t 的(数量)函数矩陣的情形，即 $A_{ij}=A_{ij}(t_0, t)$；与此对应，我們有时可以写 $A=A(t_0, t)$. 我們认为矩陣的初等性质以及与此有关的概念是众所熟悉的.

我們仅指出，正如往常一样，两个矩陣 A 和 B 的乘积 AB 是指以 $C_{ij}=\sum_{k=1}^{2} A_{ik}B_{kj}$ 为元素的矩陣 $C=\|C_{ij}\|$ $(i, j=1, 2)$，C_{ij} 是由矩陣 A 的一行和矩陣 B 的一列相乘而得到的. 把 A 的轉置矩陣記作 A'，那么，我們有 $A'=\|A'_{ij}\|$，其中 $A'_{ij}=A_{ji}$.

我們来考察具有矩陣 A 的綫性变換

$$\psi_1=A_{11}\varphi_1+A_{12}\varphi_2, \quad \psi_2=A_{21}\varphi_1+A_{22}\varphi_2,$$

这个变換把向量 $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2)$ 变成向量 $\psi=(\psi_1, \psi_2)$；我們可以把这个变換記作

$$\psi=A\varphi.$$

如果同时又有 $\varphi=B\omega$，其中 ω 为某一个向量，而 B 为某一个矩陣，那么，有 $\psi=C\omega$，其中 $C=AB$，因此，有 $\psi=AB\omega$.

假定 φ 与 ψ 是某两个向量，而 A 与 B 是某两个矩陣. 我們用 $\psi A\varphi$ 来表示向量 ψ 和 $A\varphi$ 的乘积. 那么，容易驗証:

$$\psi A\varphi=\varphi A'\psi,$$

其中 A' 是矩陣 A 的轉置矩陣.

最后，若干个向量

$$\varphi^1=(\varphi_1^1, \varphi_2^1), \quad \varphi^2=(\varphi_1^2, \varphi_2^2), \cdots, \quad \varphi^\nu=(\varphi_1^\nu, \varphi_2^\nu)$$

(右上角的字碼我們用来表示向量的編号，而右下角的字碼 1 与 2 我們用来表示向量之支量的标号，这两种字碼是不相同的)的綫性組合是指向量

$$\psi=C_1\varphi^1+C_2\varphi^2+\cdots+C_\nu\varphi^\nu=\sum_{\alpha=1}^{\nu} C_\alpha\varphi^\alpha,$$

其中 C_α 皆为常数，一般讲来，它們都是复数，这亦就是指支量为

$$\psi_1=\sum_{\alpha=1}^{\nu}C_\alpha\varphi_1^\alpha,\qquad \psi_2=\sum_{\alpha=1}^{\nu}C_\alpha\varphi_2^\alpha$$

的向量 $\psi=(\psi_1, \psi_2)$；与此对应，我們可以定义向量的綫性相关和綫性无关的概念．亦就是，如果存在不全为零的常数 C_α，使对所考虑的向量之自变量的所有值均有

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu}C_\alpha\varphi^\alpha=0,$$

或者同样地有

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu}C_\alpha\varphi_1^\alpha=0,\qquad \sum_{\alpha=1}^{\nu}C_\alpha\varphi_2^\alpha=0,$$

那么，我們便称所考虑的向量 φ^α 是綫性相关的．在相反的情形，我們便說向量 φ^α 是綫性无关的．

2°．为了避免重复起見，我們再作下述的規定．此处我們所考虑的是一个或者两个变量（用 t_0 与 t 来表示）的函数，并且 t_0 与 t 表示已給的逐段光滑曲綫 L 上的点．我們可以假定，此处所考虑的函数对 t_0 与 t 所有的值（与曲綫 L 之結点所对应的值可能除外）都是有界的和連續的；在結点处所考虑的函数甚至可以是沒有定义的．

对于向量和矩陣亦是同样的．当我們說到向量或者矩陣是有界的，連續的等等时，我們是指它們的支量是有界的，連續的等等．

3°．我們来考察下列包含两个未知函数由两个（第二类的）Fredholm 方程所构成的（正則型）方程組：

$$\varphi_1(t_0)+\int_L n_{11}(t_0, t)\varphi_1(t)dt+\int_L n_{12}(t_0, t)\varphi_2(t)dt=f_1(t_0),$$
$$(110.1)$$
$$\varphi_2(t_0)+\int_L n_{21}(t_0, t)\varphi_1(t)dt+\int_L n_{22}(t_0, t)\varphi_2(t)dt=f_2(t_0),$$

其中 L 是一条已給的逐段光滑曲綫，t_0 与 t 都是这一条曲綫上的点，而 $n_{ij}(t_0, t)$ 及 $f_1(t_0)$，$f_2(t_0)$ 都是已給定的函数；对 t_0 所有的值，除了結点所对应的值可能例外外，都应該适合这些方程．

利用在这一节 1° 段所采用的記号，我們显然可以把方程組

(110.1)写成形式:

$$\varphi(t_0)+\int_L n(t_0,\ t)\varphi(t)dt=f(t_0), \tag{110.2}$$

其中 $\varphi(t)=(\varphi_1,\ \varphi_2)$是未知向量，而$f(t)=(f_1,\ f_2)$是已知向量，又其中$n(t_0,\ t)$表示已知矩陣

$$n(t_0,\ t)=\|n_{ij}(t_0,\ t)\|=\begin{Vmatrix} n_{11}(t_0,\ t) & n_{12}(t_0,\ t) \\ n_{21}(t_0,\ t) & n_{22}(t_0,\ t) \end{Vmatrix}, \tag{110.3}$$

我們把这个矩陣叫做方程(110.2)或方程組(110.1)的核.

这样一来,我們看到，Fredholm 方程組可以写成一个方程的形式,我們把后一种形式的方程叫做向量方程(因为这个方程的两端都是向量)，它和普通一个未知函数的 Fredholm 方程 (我們現在把它叫做数量方程) 在形式上幷沒有什么区别. 这种相似之处不仅是表面上的; 有关普通的 (数量的) Fredholm 方程的已知結果，几乎不必作任何改变，便可以移植到由方程組(110.1)改写而得到的方程(110.2)上. 因此，我們把形式为(110.2)的向量方程亦叫做 Fredholm 方程.

我們提醒一下以后要用到的一些基本命題.

假定 **N** 是由下述公式所确定的算子:

$$\mathbf{N}\ \varphi\equiv\varphi(t_0)+\int_L n(t_0,\ t)\varphi(t)dt. \tag{110.4}$$

那么，方程 (110.2) 可以写成 $\mathbf{N}\ \varphi=f(t_0)$. 我們把由下述公式所确定的算子 $\mathbf{N}'$ 叫做 **N** 的相联算子:

$$\mathbf{N}'\ \psi\equiv\psi(t_0)+\int_L n'(t,\ t_0)\psi(t)dt, \tag{110.5}$$

它是由算子 **N** 将矩陣 $n(t_0,\ t)$ 用它的轉置矩陣来替代，同时交換变量 t_0 与 t 而得出的.

对于无論怎样的右端 $f(t_0)$ 与 $g(t_0)$，我們都把方程 $\mathbf{N}'\ \psi=g(t_0)$ 叫做方程 $\mathbf{N}\ \varphi=f(t_0)$的相联方程; 我們提醒一下，它們的右端和左端同时都是向量. 与向量方程 $\mathbf{N}'\ \psi=g$ 对应的方程組[①]叫

① 在方程組(110.1)对应于方程(110.2)的同样意义下.

做方程組(110.1)的相联方程組．

容易驗証，如果 $\varphi(t)$，$\psi(t)$是变量 t 的两个任意向量，那么，有

$$\int_L \psi(t)\mathbf{N}\varphi(t)dt=\int_L \varphi(t)\mathbf{N}'\psi(t)dt. \qquad (110.6)$$

再者，与一个普通的数量 Fredholm 方程有关的結論完全类似的下述命题都是成立的．

齐次方程 $\mathbf{N}\varphi=0$ 只有有限多个綫性无关解，与它相联的齐次方程 $\mathbf{N}'\psi=0$ 亦具有同样个数的綫性无关解．

如果齐次方程 $\mathbf{N}\varphi=0$ 沒有非零解，那么，方程 $\mathbf{N}\varphi=f$ 对于每一个右端 f 都是单值可解的．但是，如果齐次方程 $\mathbf{N}\varphi=0$ 有非零解，那么，仅当适合下列条件：

$$\int_L f(t)\psi^\alpha(t)dt=0 \quad (\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu) \qquad (110.7)$$

时，方程 $\mathbf{N}\varphi=f$ 才是可解的，其中 $\psi^\alpha(t)\,(\alpha=1,\ 2,\cdots,\ \nu)$ 是相联齐次方程 $\mathbf{N}'\psi=0$ 的綫性无关解的完备系．我們提醒一下，$f(t)\psi^\alpha(t)$ 是向量 $f(t)=(f_1,\ f_2)$ 和 $\psi^\alpha(t)=(\psi_1^\alpha,\ \psi_2^\alpha)$ 的乘积，因此，$f(t)\psi^\alpha(t)=f_1(t)\psi_1^\alpha(t)+f_2(t)\psi_2^\alpha(t)$．

当 $\nu=0$ 时，亦就是，在齐次方程沒有非零解的情形下，存在着叫做方程(110.2)或者方程組(110.1)的豫解式的矩陣

$$\gamma(t_0,\ t)=\|\gamma_{ij}(t_0,t)\|=\begin{Vmatrix}\gamma_{11}(t_0,\ t) & \gamma_{12}(t_0,\ t)\\ \gamma_{21}(t_0,\ t) & \gamma_{22}(t_0,\ t)\end{Vmatrix}, \qquad (110.8)$$

这个方程的(唯一)解可以通过它表成

$$\varphi(t_0)=f(t_0)+\int_L \gamma(t_0,\ t)f(t)dt \qquad (110.9)$$

的形式，或者如果注意到，$\varphi(t)=(\varphi_1,\ \varphi_2)$，$f(t)=(f_1,\ f_2)$，那么，可以把它写成另一种形式

$$\varphi_1(t_0)=f_1(t_0)+\int_L \gamma_{11}(t_0,\ t)f_1(t)dt+\int_L \gamma_{12}(t_0,\ t)f_2(t)dt,$$
$$(110.9a)$$
$$\varphi_2(t_0)=f_2(t_0)+\int_L \gamma_{21}(t_0,\ t)f_1(t)dt+\int_L \gamma_{22}(t_0,\ t)f_2(t)dt.$$

由矩陣 $\gamma(t_0, t)$ 轉置并且交換变量 t_0 与 t 而得出的矩陣 $\gamma'(t, t_0)$ 是相联方程 $\mathbf{N}'\psi=g$ 的豫解式，因此，方程 $\mathbf{N}'\psi=g$ 的解可以由公式

$$\psi(t_0)=g(t_0)+\int_L \gamma'(t, t_0)g(t)dt \tag{110.10}$$

給出。

例如，利用 Fredholm 本人所提出的下述簡单的方法，可以得出这些命題的証明：把形式为(110.1)的方程組归結为一个普通的(数量的)并且积分曲綫由两条同样的曲綫 L 而构成的方程来考虑；我們认为这个方法是众所熟悉的[①]，不再来介紹它.

4°. 在 $\nu>0$ 的情形，亦就是，在齐次方程 $\mathbf{N}\varphi=0$ 及 $\mathbf{N}'\psi=0$ 有非零解的情形，正如在一个 Fredholm 方程的情形下那样(参照 §52 及 §101, 1° 段)，存在广义的豫解式，我們仍然用 $\gamma(t_0, t)$ 来表示它，这样的广义豫解式 $\gamma(t_0, t)$ 具有下列性质：仅当适合条件(110.7)时，由公式(110.9)所确定的向量 $\varphi(t_0)$ 才是方程(110.2)的解(更确切地說，$\varphi(t_0)$是这个方程的一个解). 这个广义的豫解式可以仿照一个方程情形的广义豫解式 (§52 及 §101, 1° 段) 那样来构造.

这就是，假定

$$\varphi^\alpha(t)=(\varphi_1^\alpha, \varphi_2^\alpha) \text{ 及 } \psi^\alpha(t)=(\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha), \quad \alpha=1, 2, \cdots, \nu \tag{110.11}$$

分别是齐次方程 $\mathbf{N}\varphi=0$ 及 $\mathbf{N}'\psi=0$ 的綫性无关解之完备系. 此外，又假定

$$\xi^\alpha(t)=(\xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha) \text{ 及 } \eta^\alpha=(\eta_1^\alpha, \eta_2^\alpha), \quad \alpha=1, 2,\cdots, \nu \tag{110.12}$$

是两組具有性质

$$\int_L \varphi^\alpha(t)\xi^\beta(t)dt=\delta_{\alpha\beta}, \quad \int_L \psi^\alpha(t)\eta^\beta(t)dt=\delta_{\alpha\beta} \tag{110.13}$$

的向量 (t 的函数)，其中 $\delta_{\alpha\alpha}=1$，当 $\alpha\neq\beta$ 时，$\delta_{\alpha\beta}=0$. 这样的两

---

① 例如，可以参看 В. И. Смирнов[4], т. IV, §14; É. Goursat[1], n°. 562.

組向量总可以用无穷多种方法来作出；特别是，可以要求使得这些向量的支量在 L 上是属于 H 类的①．

其次，作出矩陣

$$n^{\alpha}(t_0,\ t)=\|\eta_i^{\alpha}(t_0)\xi_j^{\alpha}(t)\|=\begin{Vmatrix}\eta_1^{\alpha}(t_0)\xi_1^{\alpha}(t) & \eta_1^{\alpha}(t_0)\xi_2^{\alpha}(t)\\ \eta_2^{\alpha}(t_0)\xi_1^{\alpha}(t) & \eta_2^{\alpha}(t_0)\xi_2^{\alpha}(t)\end{Vmatrix}, \tag{110.14}$$

$$\alpha=1,\ 2,\cdots,\ \nu.$$

如果 $\varphi(t)=(\varphi_1,\ \varphi_2)$ 是某一个向量，那么，$n^{\alpha}(t_0,\ t)\varphi(t)$ 是以

$$\eta_1^{\alpha}(t_0)\,[\xi_1^{\alpha}(t)\,\varphi_1(t)+\xi_2^{\alpha}(t)\,\varphi_2(t)]$$

及

$$\eta_2^{\alpha}(t_0)\,[\xi_1^{\alpha}(t)\,\varphi_1(t)+\xi_2^{\alpha}(t)\,\varphi_2(t)]$$

为支量的向量，亦就是說，它是由向量 $\eta^{\alpha}(t_0)=(\eta_1^{\alpha},\ \eta_2^{\alpha})$ 和数量函数 $\xi^{\alpha}(t)\varphi(t)$ 相乘而得出的向量．这样一来，可以有

$$n^{\alpha}(t_0,\ t)\,\varphi(t)=[\xi^{\alpha}(t)\,\varphi(t)]\,\eta^{\alpha}(t_0). \tag{110.15}$$

我們現在代替积分方程(110.2)而考察另一个积分方程

$$\mathbf{M}\,\varphi\equiv\varphi(t_0)+\int_L m(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt=f(t_0), \tag{110.16}$$

它和方程(110.2)的区别在于：核 $n(t_0,\ t)$ 已經用核

$$m(t_0,\ t)=n(t_0,\ t)+\sum_{\alpha=1}^{\nu}n^{\alpha}(t_0,\ t) \tag{110.17}$$

来替代．

依据上面所讲过的，容易看出

$$\mathbf{M}\,\varphi(t_0)=\mathbf{N}\,\varphi(t_0)+\sum_{\alpha=1}^{n}a_{\alpha}\eta^{\alpha}(t_0),$$

其中

$$a_{\alpha}=\int_L \xi^{\alpha}(t)\,\varphi(t)\,dt,\quad \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu.$$

在这以后，便变成了和在§52中所討論过的差不多完全类似的情形，我們不停留在証明(这个証明几乎完全重复在§52中所讲过的)上，就可以写出下述最后的結果．

① 参看本书末尾的附录三；那里只談到了数量函数，而沒有討論到向量函数，但是，其結果和推导不作任何修改都可以移植到我們这里的情形．

与方程(110.16)对应的齐次方程 $\mathbf{M}\,\varphi=0$ 沒有非零解，从而方程(110.16)对每一个右端 $f(t_0)$ 是单值可解的. 只要 $f(t_0)$ 适合方程(110.2)的可解性(充分和必要)条件(110.7)，那么，方程(110.16)的解同时又是方程(110.2)的解(更确切地說，是它的一个解).

把与方程(110.2)对应的齐次方程之解 $\varphi^\alpha(\alpha=1, 2, \cdots, \nu)$ 的綫性組合加到上述解上，我們便可以得出方程(110.2)的一般解.

方程(110.16)的豫解式 $\gamma(t_0, t)$ 亦是方程(110.2)的广义豫解式.

正象在一个方程的情形那样，方程(110.16)的豫解式适合下列(用矩陣表出的)和§101, 1°段中的关系式(D)与(D')完全类似的关系式:

$$
\begin{aligned}
\gamma(t_0, t)+m(t_0, t) &= -\int_L m(t_0, t_1)\gamma(t_1, t)\,dt_1, \\
\gamma(t_0, t)+m(t_0, t) &= -\int_L \gamma(t_0, t_1)m(t_1, t)\,dt_1;
\end{aligned}
\tag{110.18}
$$

在现在的情形下，积分号下因子的次序，并不是无关紧要的.

矩陣 $\gamma'(t, t_0)$ 是方程(110.16)的相联方程的豫解式，又是方程(110.2)的相联方程的广义豫解式. 对豫解式 $\gamma'(t, t_0)$ 而建立的类似于关系式(110.18)的关系式，并不給出任何新的东西，只要在关系式(110.18)中都用轉置矩陣来代替原来的矩陣，便可以得出这些关系式来.

§111. 一个 Fredholm 型积分方程

1°. 現在我們討論下述(数量)方程:

$$
\mathbf{N}\,\varphi \equiv \varphi(t_0)+\int_L n_1(t_0, t)\varphi(t)\,dt+\int_L \overline{n_2(t_0, t)\varphi(t)\,dt} = f(t_0), \tag{111.1}
$$

其中 L 是一条逐段光滑曲綫，$n_1(t_0, t)$, $n_2(t_0, t)$, $f(t_0)$ 都是曲綫

L 上点 t_0 与 t 的已知函数，而 $\varphi(t)$ 是未知函数①.

我們把上一节 ($2°$ 段) 中的同样的条件加至在这一节中所討論的函数上.

因为，正象我們現在要指出的那样，可以把方程(111.1)的理論直接归結为 Fredholm 方程的理論，因此，我們把方程(111.1)列入 Fredholm 方程同一类型之中.

因为我們常常要利用到与前一个方程对应的齐次方程，因此，我們在这里把它写出来：

$$\mathbf{N}\,\varphi \equiv \varphi(t_0) + \int_L n_1(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt + \int_L \overline{n_2(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt} = 0. \tag{111.1°}$$

我們指出，在上式第二个积分中，

$$\overline{dt} = \frac{dt}{t'^2} = \overline{t'^2}\,dt,$$

其中 $t' = \dfrac{dt}{ds}$；正象往常那样，总用 s 表示 L 上的弧坐标②.

我們把方程

$$\mathbf{N}'\,\psi \equiv \psi(t_0) + \int_L n_1(t,\ t_0)\,\psi(t)\,dt + \int_L n_2(t,\ t_0)\,\overline{\psi(t)\,dt} = g(t_0), \tag{111.2}$$

叫做方程(111.1)的**相联方程**，其中 $\psi(t)$ 和 $g(t)$ 分别是未知函数和已知函数. 在此处我們再来写出与方程 (111.2) 对应的齐次方程

$$\mathbf{N}'\,\psi \equiv \psi(t_0) + \int_L n_1(t,\ t_0)\,\psi(t)\,dt + \int_L n_2(t,\ t_0)\,\overline{\psi(t)\,dt} = 0. \tag{111.2°}$$

---

① 公式(111.1)中的算子 $\mathbf{N}$ 与上节中的算子 $\mathbf{N}$ 是不同的.

② 改变記号后，我們可以把公式 (111.1) 与(111.1°)中的第二个积分改写成形式

$$\int_L n_2(t_0,\ t)\,\overline{\varphi(t)}\,dt,$$

但是，用本书中所采用的表示法（借用 Г. Ф. Манджавидзе [3]中的），可以得出更为对称的公式来.

我們把算子 $\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{N}'$ 叫做相联的算子. 相联算子的这样定义之合理性显然是基于公式

$$\mathrm{Re}\int_L \psi(t)\mathbf{N}\varphi(t)dt=\mathrm{Re}\int_L \varphi(t)\mathbf{N}'\psi(t)dt \qquad (111.3)$$

对于任意两个函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都是成立而作出的，公式(111.3)的成立是容易直接驗証的[①].

現在把另一个由方程 (111.1) 取复值共軛而得出的方程和方程(111.1)联立，并在这两个方程中用 $\varphi^*(t)$ 来替代 $\overline{\varphi(t)}$. 那么，我們便可以得到由两个方程构成的方程組:

$$\begin{aligned}\varphi(t_0)+\int_L n_1(t_0,\ t)\varphi(t)dt&\\ +\int_L \overline{t'^2 n_2(t_0,\ t)}\varphi^*(t)dt&=f(t_0),\\ \varphi^*(t_0)+\int_L n_2(t_0,\ t)\varphi(t)dt&\\ +\int_L \overline{t'^2 n_1(t_0,\ t)}\varphi^*(t)dt&=\overline{f(t_0)}.\end{aligned} \qquad (111.4)$$

如果再加上一个补充条件:要求未知函数 φ 与 φ^* 彼此是复值共軛的，亦就是，要求

$$\varphi^*(t)=\overline{\varphi(t)}, \qquad (111.5)$$

那么，上述方程組显然与单个方程(111.1)是等价的.

但是，我們暂且不考虑这个条件，而把 φ 与 φ^* 当作是适合方程組(111.4)的两个未知函数；那么，后一个方程組应該是一个普通的 Fredholm 方程組，并且还可以把它写成一个向量方程的形式(参看上一节):

$$\Phi(t_0)+\int_L n(t_0,\ t)\Phi(t)dt=F(t_0), \qquad (111.6)$$

---

① 在 $n_2(t_0,\ t)=0$ 的情形，亦就是，在 Fredholm 方程的情形下，公式(111.3)等价于已知的公式

$$\int_L \psi(t)\mathbf{N}\varphi(t)dt=\int_L \varphi(t)\mathbf{N}'\psi(t)dt. \qquad (*)$$

事实上，在所討論的情形下，$\mathbf{N}i\varphi=i\mathbf{N}\varphi$. 因此，在公式(111.3)中把 $\varphi(t)$ 换成 $i\varphi(t)$，并将所得出的公式和公式(111.3)相加，便可以得出公式(*).

其中

$$\Phi(t)=(\varphi,\ \varphi^*),\quad F(t)=(f,\bar{f})$$

分别是未知向量和已知向量，而

$$n(t_0,\ t)=\begin{Vmatrix} n_1(t_0,\ t) & \overline{t'^2 n_2(t_0,\ t)} \\ n_2(t_0,\ t) & \overline{t'^2 n_1(t_0,\ t)} \end{Vmatrix} \tag{111.7}$$

是一个已知矩陣（方程(111.6)的核）.

和方程組(111.4)或方程(111.6)同时，我們討論对应的齐次方程組

$$\begin{aligned} \varphi(t_0)+\int_L n_1(t_0,\ t)\varphi(t)dt & \\ +\int_L \overline{t'^2 n_2(t_0,\ t)}\varphi^*(t)dt&=0, \\ \varphi^*(t_0)+\int_L n_2(t_0,\ t)\varphi(t)dt & \\ +\int_L \overline{t'^2 n_1(t_0,\ t)}\varphi^*(t)dt&=0, \end{aligned} \tag{111.4°}$$

或者方程

$$\Phi(t_0)+\int_L n(t_0,\ t)\Phi(t)=0. \tag{111.6°}$$

和方程(111.6)或者(111.6°)相联的齐次方程是方程（参看上一节）

$$X(t_0)+\int_L n'(t,\ t_0)X(t)dt=0, \tag{111.8}$$

其中 $X(t)$ 是未知向量，而

$$n'(t,\ t_0)=\begin{Vmatrix} n_1(t,\ t_0) & n_2(t,\ t_0) \\ \overline{t_0'^2 n_2(t,\ t_0)} & \overline{t_0'^2 n_1(t,\ t_0)} \end{Vmatrix}; \tag{111.9}$$

t_0' 是 $t'=\dfrac{dt}{ds}$ 在 $t=t_0$ 处的值.

我們用向量 $X(t)$ 来表示支量分别为 $\psi(t)$ 和 $\overline{t'^2}\psi^*(t)$ 的向量，即

$$X(t)=(\psi,\ \overline{t'^2}\psi^*), \tag{111.10}$$

再引进記号

$$\Psi(t)=(\psi,\ \psi^*). \tag{111.11}$$

那么,容易看出,方程(111.8)可以化为方程

$$\Psi(t_0)+\int_L n_0'(t, t_0)\Psi(t)dt=0, \tag{111.12}$$

其中

$$n_0'(t, t_0)=\left\|\begin{matrix}n_1(t, t_0) & \overline{t'^2 n_2(t, t_0)} \\ \overline{n_2(t, t_0)} & t'^2 n_1(t, t_0)\end{matrix}\right\|. \tag{111.13}$$

方程(111.12)和方程(111.1°)的相联方程(111.2°)之間的联系正好与方程(111.6°)和(111.1°)之間的联系是一样的.

2°. 我們轉到討論方程(111.1)以及与它对应的方程組(111.4),我們証明,从方程(111.1)的解直接可以得出方程組(111.4)的解,反之亦然.

我們首先指出,方程(111.1)以及方程組(111.4)或者由它归結得到的同样的向量方程(111.6)的解的一些几乎十分明显的性质.亦就是,显然,如果 $\varphi(t)$ 是方程(111.1)的解,那么,向量 $\Phi(t)=(\varphi, \overline{\varphi})$ 是方程(111.6)的解.其次,如果向量 $\Phi(t)=(\varphi, \varphi^*)$ 是方程(111.6)的解,那么,向量 $\widetilde{\Phi}=(\overline{\varphi^*}, \overline{\varphi})$,以及向量

$$\Omega(t)=\frac{1}{2}[\Phi(t)+\widetilde{\Phi}(t)]=(\omega, \overline{\omega})$$

亦都是这同一个方程的解,其中

$$\omega=\omega(t)=\frac{1}{2}[\varphi(t)+\overline{\varphi^*(t)}].$$

因为向量 $\Omega(t)=(\omega, \overline{\omega})$ 的支量彼此是复值共軛的,因此,函数 $\omega=\omega(t)$ 是方程(111.1)的解.

3°. 我們現在討論齐次方程(111.1°)以及与之对应的方程組(111.4°)或者同样的方程(111.6°).

首先我們指出下述結論.如果 $\varphi(t)$ 是方程(111.1°)的解,那么,$C\varphi(t)$ 亦是解,这里 C 是一个**实的常数**;当 C 是复数时,一般讲来,这并不正确.

因此,今后我們把方程(111.1°)之解的綫性組合理解为解的

实系数之綫性組合；我們亦将这样理解解的綫性无关性或者綫性相关性．

为了避免混淆起見，我們有时把这种情形叫做狹义的綫性組合、綫性相关性或者綫性无关性．

但是，对于（向量）方程（111.6°）的解，我們把綫性組合的概念仍然按照通常的意义来理解（亦就是說，可以允許系数为复数），把綫性无关性或者綫性相关性亦作同样的理解．

現在我們証明：齐次方程（111.1°）的綫性无关（狹义的）解的个数和方程（111.6°）的綫性无关（通常意义下的）解的个数是相同的．

假定方程（111.1°）有 ν 个綫性无关（狹义的）解 $\varphi^\alpha(t)$, $\alpha=1, 2, \cdots, \nu$．那么，方程（111.6°）有解 $\Phi^\alpha(t)=(\varphi^\alpha, \bar{\varphi}^\alpha)$；这些解在通常意义下是綫性无关的．实际上，如果

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} C_\alpha \Phi^\alpha(t)=0,$$

其中 C_α 为复的常数，即如果

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} C_\alpha \varphi^\alpha(t)=0, \quad \sum_{\alpha=1}^{\nu} C_\alpha \overline{\varphi^\alpha(t)}=0,$$

那么，把第二个等式取复值共軛后，和第一个等式相加，再由函数 $\varphi^\alpha(t)$ 在狹义下的綫性无关性可以知道，实数 $C_\alpha+\bar{C}_\alpha$ 都应該等于零；类似地可以得到，$C_\alpha-\bar{C}_\alpha=0$，从而由此可以推出，所有的 C_α 都等于零．

于是，如果 μ 是方程（111.6°）的綫性无关（狹义的）解的个数，那么，$\nu\leqslant\mu$．

現在假定

$$\Phi^\alpha(t)=(\varphi^\alpha, \varphi^{*\alpha}), \quad \alpha=1, 2, \cdots, \mu$$

是方程（111.6°）的綫性无关（通常意义下的）解．

我們証明：利用这些解可以造出方程（111.1°）的同样多的（狹义意义下的）綫性无关解．

事实上,我們知道,向量

$$\widetilde{\Phi}^{\alpha}(t)=(\overline{\varphi^{*\alpha}},\ \overline{\varphi^{\alpha}}),\quad \alpha=1,\ 2,\cdots,\ \mu$$

亦是方程(111.6°)的解. 因此,它們是向量 $\Phi^{\alpha}(t)$ 的綫性組合,即

$$\widetilde{\Phi}^{\alpha}(t)=\sum_{\beta=1}^{\mu}C_{\alpha\beta}\Phi^{\beta}(t),\quad \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ \mu. \tag{*}$$

現在指出,支量为彼此复值共軛的向量

$$\Omega^{\alpha}(t)=k\widetilde{\Phi}^{\alpha}(t)+\bar{k}\Phi^{\alpha}=(\omega^{\alpha},\ \bar{\omega}^{\alpha}) \tag{**}$$

亦是方程(111.6°)的解,其中 k 为异于零的一个任意常数,而

$$\omega^{\alpha}=\omega^{\alpha}(t)=k\overline{\varphi^{*\alpha}}+\bar{k}\varphi^{\alpha},\quad \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ \mu.$$

因此,函数 $\omega^{\alpha}(t)$ 是方程(111.1°)的解. 总能这样选取常数 k,使得函数 $\omega^{\alpha}(t)$ 是綫性无关的(在狭义意义下). 事实上,如果函数 $\omega^{\alpha}(t)$, $\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ \mu$ 可以用由不完全为零的实系数之綫性关系式相互联系,那么,这样的关系式(具有同样的系数)亦可以把函数 $\bar{\omega}^{\alpha}(t)$ 相互联系,在这种情形下,向量 $\Omega^{\alpha}(t)$ 是綫性相关的. 但是,此时,联系向量 $\Omega^{\alpha}(t)$ 和 $\Phi^{\alpha}(t)$ 的綫性变換之行列式应該等于零,并且由公式(*)及(**)知道,这个行列式等于

$$\begin{vmatrix} kC_{11}+\bar{k} & kC_{12} & \cdots & kC_{1\mu} \\ kC_{21} & kC_{22}+\bar{k} & \cdots & kC_{2\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ kC_{\mu1} & kC_{\mu2} & \cdots & kC_{\mu\mu}+\bar{k} \end{vmatrix} = k^{\mu}\begin{vmatrix} C_{11}+\varepsilon & C_{12} & \cdots & C_{1\mu} \\ C_{21} & C_{22}+\varepsilon & \cdots & C_{2\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{\mu1} & C_{\mu2} & \cdots & C_{\mu\mu}+\varepsilon \end{vmatrix},$$

其中 $\varepsilon=\dfrac{\bar{k}}{k}$. 然而,显然总能这样取定 k,使得这个行列式不等于零. 对于这样的 k 值,函数 $\omega^{\alpha}(t)$,$\alpha=1,\ 2,\cdots,\ \mu$ 是(狭义的)綫性无关的. 特别地,由此推知,$\mu\leqslant\nu$,由此連同上面所得出的不等

式，可以得出 $\mu=\nu$，我們的結論得証①．

与此同时，我們証明了，求得齐次 Fredholm 方程(111.6°)的綫性无关(在通常意义下的)解的任何完备系(φ^α, $\varphi^{*\alpha}$)，$\alpha=1, 2, \cdots, \nu$ 以后，我們立即可造出同一方程的这样的完备系：在这个完备系中 $\overline{\varphi^{*\alpha}}=\varphi^\alpha$，即，可以造出形式为($\varphi^\alpha,\overline{\varphi^\alpha}$)，$\alpha=1,2,\cdots,\nu$ 的完备系，并且同时可以求得齐次方程(111.1°)的綫性无关(狭义的)解的完备系 $\varphi^\alpha, \alpha=1, 2, \cdots, \nu$．反之，确定了方程 $\mathbf{N}\varphi=0$ 的綫性无关(狭义的)解的完备系 φ^α 以后，我們亦可以得出方程(111.6°)的綫性无关(在通常意义下的)解(φ^α, $\overline{\varphi^\alpha}$)的完备系．

由上述可知道，正象前面已指出过的，解出了 Fredholm 方程(111.6)或者同样的方程組(111.4)以后，我們便可以求解方程(111.1)，反之亦然．

轉到齐次方程的情形．把上面已經得出的結果应用于方程(111.1°)的相联齐次方程(111.2°)以及与它对应的方程(111.12)，并且也注意到由公式(111.10)所确定的这后一个方程的解和方程(111.6)的相联方程(111.8)的解之間的联系，那么，可以得出下述結論．

如果 $\psi^\alpha(t)$，$\alpha=1, 2, \cdots, \nu$ 是方程(111.2°)的綫性无关(狭义的)解的完备系，那么，向量($\psi^\alpha,\overline{\psi^\alpha}$)，$\alpha=1,2,\cdots,\nu$ 是方程(111.12)的綫性无关(在通常意义下的)解的完备系；而向量(ψ^α, $\overline{t'^2\psi^\alpha}$)是

---

① 在 $n_2(t_0, t)=0$ 的情形，方程(111.1°)变成了普通的 Fredholm 方程

$$\varphi(t_0)+\int_L n(t_0, t)\varphi(t)dt=0$$

(我們已把 n_1 改写成 n)．在这种情形下，引进狭义的綫性組合的概念是不恰当的；但是，原文中所有叙述当然仍然适用于这个情形．如果 $\varphi^\alpha(t)$，$\alpha=1, 2, \cdots, \mu$ 是上述方程在通常意义下的綫性无关解的完备系，那么，例如，

$$\varphi^1(t), \varphi^2(t), \cdots, \varphi^\mu(t), i\varphi^1(t), i\varphi^2(t), \cdots, i\varphi^\mu(t)$$

便是狭义的綫性无关解的完备系．由方程組(111.4°)，当 $n_2(t_0, t)=0$ 而得出的方程組具有同样个数的綫性无关(在通常意义下的)解；例如，

$$(\varphi^1, \overline{\varphi^1}), (\varphi^2, \overline{\varphi^2}), \cdots, (\varphi^\mu, \overline{\varphi^\mu}), (i\varphi^1, -\overline{i\varphi^1}), \cdots, (i\varphi^\mu, -\overline{i\varphi^\mu})$$

便是这种解的完备系．在目前的情形下，在本书中用 ν 来表示的数等于 2μ．

方程(111.6)或(111.6°)的相联方程(111.8)的綫性无关解的完备系.

根据 Fredholm 方程已知的性质，相联的齐次方程(111.6°)与(111.8)有同样个数的綫性无关解. 因此,相联的方程(111.1°)与 (111.2°) 亦有同样个数的綫性无关 (狹义的) 解. 在这两种情形，我們用 ν 来表示这个数.

4°. 我們已經建立了方程(111.1)的求解問題和 Fredholm 方程組(111.4)或者同样的 Fredholm 向量方程(111.6)的求解問題之間的完全等价性. 但是,可以陈述出标志着方程(111.1)的基本性质的这样命题，使得在这些命題的叙述中不出現 Fredholm 方程組.

这些命題和 Fredholm 定理是类似的，有些在上面已經証明过,它們便是:

I. 齐次方程(111.1°)的綫性无关 (狹义的) 解的个数是有限的,并且这个个数等于相联齐次方程(111.2°)的綫性无关(亦是狹义的)解的个数.

II. 如果齐次方程(111.1°)沒有非零解,从而,方程(111.2°)亦沒有非零解，那么，非齐次方程(111.1)对每一个右端都是单值可解的.

III. 如果齐次方程(111.1°)有非零解，从而，相联齐次方程亦有非零解,那么,非齐次方程(111.1)当且仅当适合下列条件:

$$\operatorname{Re}\int_L f(t)\psi^\alpha(t)dt=0, \quad \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu \qquad (111.14)$$

时可解,其中 $\psi^\alpha(t)$,$\alpha=1,\ 2,\cdots,\ \nu$ 是相联齐次方程(111.2°)的綫性无关(狹义的)解的完备系.

在 3° 段中已經証明了命題 I. 命題 II 亦可以认为已經証明过,这是因为如果齐次方程(111.1°)沒有非零解，那么，与方程組(111.4)对应的齐次方程組亦沒有非零解. 但是，此时，方程組

(111.4)对每一个函数 $f(t_0)$ 都是单值可解的．如果 (φ, φ^*) 是这个方程組的解，那么，$(\overline{\varphi^*}, \overline{\varphi})$ 亦是它的解．根据解的唯一性，应該有 $\varphi^*=\overline{\varphi}$；从而 $\varphi=\varphi(t)$ 是方程 $\mathbf{N}\,\varphi=f$ 的(唯一)解．

轉到証明命題 III．为了要使方程(111.1)是可解的，必需而且只需方程組(111.4)或者同样的(向量)方程 (111.6) 是可解的．由上一节的等式 (110.7) 可推知，方程 (111.6) 可解的(充分和必要)条件由等式

$$\int_L F(t)\,X^\alpha(t)\,dt=0, \quad \alpha=1,\,2,\,\cdots,\,\nu \qquad (111.15)$$

表示，其中 $X^\alpha(t), \alpha=1,2,\cdots,\nu$ 是方程(111.6)的相联方程(111.8)的綫性无关(在通常意义下的)解的完备系．但是，$F(t)=(f, \overline{f})$，并且由上一段末尾所述，我們可以取向量 $X^\alpha(t)=(\psi^\alpha, \overline{t'^2\psi^\alpha})$ 当作 $X^\alpha(t)$，这里 $\psi^\alpha=\psi^\alpha(t), \alpha=1,\,2,\,\cdots,\,\nu$ 是齐次方程(111.2°)的綫性无关(狹义的)解的完备系．再者，因为

$$F(t)\,X^\alpha(t)=f(t)\,\psi^\alpha(t)+\overline{f(t)\,\psi^\alpha(t)}\,\overline{t'^2},$$

因此，有

$$\int_L F(t)\,X^\alpha(t)\,dt=\int_L f(t)\,\psi^\alpha(t)\,dt+\int_L \overline{f(t)\,\psi^\alpha(t)\,dt}$$

$$=2\mathrm{Re}\int_L f(t)\,\psi^\alpha(t)\,dt,$$

而由此得出条件(111.14) 和 (111.15) 的等价性，这样一来，命題 III 得証．

5°．正如在 Fredholm 方程的情形那样，利用豫解式，或者当对应的齐次方程有非零解①时利用广义的豫解式，可以把方程(111.1)的解表出．我們立可考虑齐次方程有非零解的一般情形．假定 $\varphi^\alpha(t)$ 与 $\psi^\alpha(t), \alpha=1,2,\cdots,\nu$ 分别是相联的齐次方程(111.1°)和(111.2°)的綫性无关(狹义的)解的完备系．我們作出两組属于

① 此处所用的广义豫解式的造法，是上一节 4° 段中所指出的 Fredholm 方程組情形的造法之特殊情形．

H 类[①]的具有下列性质的函数 $\xi^\alpha(t)$, $\eta^\alpha(t)$, $\alpha=1, 2, \cdots, \nu$:

$$\mathrm{Re}\int_L \varphi^\alpha(t)\xi^\beta(t)dt=\delta_{\alpha\beta}, \quad \mathrm{Re}\int_L \psi^\alpha(t)\eta^\beta(t)dt=\delta_{\alpha\beta},$$

其中 $\delta_{\alpha\alpha}=1$, 当 $\alpha\neq\beta$ 时 $\delta_{\alpha\beta}=0$, 和方程(111.1)一起，我們同时来考慮另一个方程

$$\varphi(t_0)+\int_L m_1(t_0, t)\varphi(t)dt+\int_L \overline{m_2(t_0, t)\varphi(t)dt}=f(t_0), \tag{111.16}$$

其中

$$\begin{aligned} m_1(t_0, t)&=n_1(t_0, t)+\sum_{\alpha=1}^{\nu}\eta^\alpha(t_0)\xi^\alpha(t), \\ m_2(t_0, t)&=n_2(t_0, t)+\sum_{\alpha=1}^{\nu}\overline{\eta^\alpha(t_0)}\xi^\alpha(t). \end{aligned} \tag{111.17}$$

完全类似于在 §52 中所做过的 (参照 §101, 1° 段)，容易証明，与方程 (111.16) 对应的齐次方程沒有非零解，因此，方程(111.16)对于每一个右端 $f(t)$，都是单值可解的；如果适合方程(111.4)的可解性(充分和必要)条件(111.14),那么,方程(111.16)的解同时又是原来方程(111.4)的解. 我們把証明留給讀者.

我們現在写出和方程 (111.16) 相联系的 Fredholm 方程組，这种联系正象方程組(111.4)和方程(111.1)的联系那样,或者,要写出和方程(111.6)类似的 Fredholm 向量方程

$$\Phi(t_0)+\int_L m(t_0, t)\Phi(t)dt=F(t), \tag{111.18}$$

其中 $\Phi(t)=(\varphi, \varphi^*)$, $F(t)=(f, \bar{f})$, 并且

$$m(t_0, t)=\begin{Vmatrix} m_1(t_0, t) & \overline{t'^2 m_2(t_0, t)} \\ m_2(t_0, t) & \overline{t'^2 m_1(t_0, t)} \end{Vmatrix}. \tag{111.19}$$

假定 $\gamma(t_0, t)=\|\gamma_{ij}(t_0, t)\|$, $i, j=1,2$, 是方程(111.18)的豫解式,于是,这个方程的(唯一)解可以由公式

① 在构造广义豫解式时并不用到 H 条件. 但是，在以后的推論中是要用到这个条件的.

$$\Phi(t_0)=F(t_0)+\int_L \gamma(t_0,\ t)F(t)dt$$

給出，或者把它写成数量形式

$$\varphi(t_0)=f(t_0)+\int_L \gamma_{11}(t_0,\ t)f(t)dt+\int_L \gamma_{12}(t_0,\ t)\overline{f(t)}dt,$$

$$\varphi^*(t_0)=\overline{f(t_0)}+\int_L \gamma_{21}(t_0,\ t)f(t)dt+\int_L \gamma_{22}(t_0,\ t)\overline{f(t)}dt.$$

因为方程(111.18)有唯一的解，因此，正如前面所指出过的那样，$\varphi^*(t)=\overline{\varphi(t)}$；此时 $\varphi(t)$ 同时是方程(111.16)的解．注意到上述两个等式的右端对所选取的每一个函数 $f(t)$ 彼此都应該是复值共軛的，容易断言，

$$\gamma_{21}(t_0,\ t)=\overline{\gamma_{12}(t_0,\ t)t'^2},$$
$$\gamma_{22}(t_0,\ t)=\overline{\gamma_{11}(t_0,\ t)t'^2}.$$

引进記号

$$\gamma_{11}(t_0,\ t)=\gamma_1(t_0,\ t),$$
$$\gamma_{12}(t_0,\ t)=\overline{\gamma_2(t_0,\ t)t'^2};$$

于是，矩陣 $\gamma(t_0,\ t)$ 可以表成形式

$$\gamma(t_0,\ t)=\left\|\begin{matrix}\gamma_1(t_0,\ t) & \overline{t'^2\gamma_2(t_0,\ t)}\\ \gamma_2(t_0,\ t) & \overline{t'^2\gamma_1(t_0,\ t)}\end{matrix}\right\|, \qquad (111.20)$$

这个矩陣与矩陣 $m(t_0,\ t)$ 在形式上是类似的．

与此相应，当条件(111.14)适合时，方程(111.1)的解(更确切地説，当 $\nu>0$ 时，它的一个解)可以由公式

$$\varphi(t_0)=f(t_0)+\int_L \gamma_1(t_0,\ t)f(t)dt+\int_L \overline{\gamma_2(t_0,\ t)f(t)dt} \qquad (111.21)$$

給出．

我們把两个函数 $\gamma_1(t_0,\ t)$ 及 $\gamma_2(t_0,\ t)$ 分别叫做方程(111.16)的豫解式及方程(111.1)的广义豫解式．

把上面的結果应用于方程(111.16)的相联方程

$$\psi(t_0)+\int_L m_1(t,\ t_0)\psi(t)dt+\int_L m_2(t,\ t_0)\overline{\psi(t)dt}=g(t_0) \tag{111.22}$$

上,幷注意到存在于相联的 Fredholm 方程組(或者相联的 Fredholm 向量方程)的(矩陣)豫解式之間的联系(参看上一节末尾),容易断言,方程(111.22)的(唯一)解由公式

$$\psi(t_0)=g(t_0)+\int_L \gamma_1(t,\ t_0)g(t)dt+\int_L \gamma_2(t,\ t_0)\overline{g(t)dt} \tag{111.23}$$

給出,幷且如果适合可解性(必要和充分)条件

$$\mathrm{Re}\int_L g(t)\varphi^\alpha(t)dt=0, \tag{111.24}$$

这个解同时又是(111.1)的相联方程(111.2)的解,其中 $\varphi^\alpha(t)$, $\alpha=1, 2, \cdots, \nu$ 是齐次方程(111.1°)的綫性无关(狭义的)解的完备系.

从上一节中的关系式(110.18)直接可以导出,函数 $m_1(t_0, t)$, $m_2(t_0,\ t)$, $\gamma_1(t_0,\ t)$ 及 $\gamma_2(t_0,\ t)$ 之間存在着关系式:

$$\begin{aligned}\gamma(t_0,\ t)+m(t_0,\ t)&=-\int_L m(t_0,\ t_1)\gamma(t_1,\ t)dt_1,\\ \gamma(t_0,\ t)+m(t_0,\ t)&=-\int_L \gamma(t_0,\ t_1)m(t_1,\ t)dt,\end{aligned} \tag{111.25}$$

其中 $\gamma(t_0,t)$ 及 $m(t_0,t)$ 在这一次表示由公式(111.19)及(111.20)所确定的矩陣. 上述两个矩陣关系式中的每一个都給出四个数量关系,但是,这四个关系式仅有两个是独立的;另外两个可以通过取复値共軛而得出. 我們不再写出它們.

§ 112. 在特征部分之外包含未知函数和它的复値共軛函数的奇异积分方程

1°. 現在我們轉向討論在这一部分引言中所提到的奇异积分

方程，亦就是，要討論下述形式的奇异积分方程：

$$\mathbf{K}\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\int_L k_1(t_0,\ t)\varphi(t)\,dt+\int_L\overline{k_2(t_0,\ t)\varphi(t)\,dt}=f(t_0),\qquad(112.1)$$

其中 L 是一条逐段光滑曲綫，$A(t_0)$，$B(t_0)$，$k_1(t_0,\ t)$，$k_2(t_0,\ t)$，$f(t_0)$都是給定在 L 上的 H_0 类函数，而 $\varphi(t)$是曲綫 L 上点的未知函数．

彈性理論中有些問題可以归結为这一类方程，在这些問題中有两个我們后面将要讲到．

利用这一章第一部分中所叙述过的方法（形式上作必要的修改），Г. Ф. Манджавидзе[1,3] 研究了这个方程．所得到的結果和那一部分中的結果是类似的，并且是它們的推广①；因此在此处并不会遇到多大困难，我們不推导詳細的証明．

我們把方程

$$\mathbf{K}'\psi\equiv A(t_0)\psi(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{B(t)\psi(t)\,dt}{t-t_0}+\int_L k_1(t,\ t_0)\psi(t)\,dt+\int_L k_2(t,\ t_0)\overline{\psi(t)\,dt}=g(t_0)\qquad(112.2)$$

叫做**方程**(112.1)的**相联方程**，其中 $g(t_0)$ 是給定的 H_0 类的函数；我們把算子 $\mathbf{K}$ 与 $\mathbf{K}'$ 叫做**相联的算子**②．

今后，我們假定导函数 $t'=\dfrac{dt}{ds}$ 是属于 H_0 类的，这里 s 是曲綫 L 的弧坐标，卽 L 是由 Ляпунов 弧所构成的．

我們将在 H^* 类中找方程 (112.1) 及 (112.2) 的解 $\varphi(t)$ 及 $\psi(t)$．

---

① Г. Ф. Манджавидзе 仅討論了 L 由一些光滑的且沒有公共点的封閉圍綫构成的情形（在这个情形下，“結点”是已給函数的間断点）；但是，其結果似乎不作任何改变便可以推广到本书所讲的情形．

② 这种定义的合理性可以参看在上一节所指出过的．

我們把由公式

$$\mathbf{K}^0\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} \tag{112.3}$$

所确定的算子叫做算子 $\mathbf{K}$ 的特征部分. 算子 $\mathbf{K}^0$ 的相联算子(在这种情形下,相联算子的定义与前面是一致的)是算子 $\mathbf{K}^{0\prime}$, 它由以前的公式

$$\mathbf{K}^{0\prime}\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\,dt}{t-t_0} \tag{112.4}$$

确定.

直接驗証,容易断定,如果 φ 与 ψ 是 L 上 H^* 类中的任意两个函数,又若在已給的每个結点之邻域內它們之中有一个是属于 H_ε^* 类的,那么,下述等式是成立的:

$$\mathrm{Re}\int_L \psi\,\mathbf{K}\,\varphi\,dt = \mathrm{Re}\int_L \varphi\,\mathbf{K}'\,\psi\,dt. \tag{112.5}$$

容易看出,在 $k_2(t_0, t)=0$ 的情形, 亦就是在所討論的奇异积分方程归結为在第一部分中已討論过的方程的情形下, 这个公式归結为公式(96.10)[①].

我們假定算子 $\mathbf{K}^0$ 与 $\mathbf{K}^{0\prime}$ 是正則型的, 与此相应, 我們认为方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 及 $\mathbf{K}'\psi=g$ 或者算子 $\mathbf{K}$ 及 $\mathbf{K}'$ 是正則型的.

2°. 齐次方程 $\mathbf{K}\varphi=0$ 解的任何实(常数)系数的綫性組合亦都是解,但是,一般讲来,当系数是复数时,这結論并不成立. 对于方程 $\mathbf{K}'\psi=0$ 亦是类似的.

由于这个理由,亦象在上一节中所討論的类似的情形那样,在整个这一节中, 我們把綫性組合理解为实(常数)系数的綫性組合(卽狹义的綫性組合,不再特别指出这一点),綫性相关性与綫性无关性亦按照这样来理解.

3°. 我們可以利用与在第一部分中用来求解方程(96.1)与(96.2)完全类似的方法, 来求解和研究方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 及 $\mathbf{K}'\psi=g$.

---

① 参照第 501 頁的脚注.

亦即，把方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 及 $\mathbf{K}'\psi=g$ 分别改写成

$$\mathbf{K}^0\varphi=f-\mathbf{k}\varphi \tag{112.6}$$

及

$$\mathbf{K}^{0\prime}\psi=g-\mathbf{k}'\psi, \tag{112.7}$$

其中

$$\mathbf{k}\varphi\equiv\int_L k_1(t_0, t)\varphi(t)dt+\int_L \overline{k_2(t_0, t)\varphi(t)dt} \tag{112.8}$$

及

$$\mathbf{k}'\psi\equiv\int_L k_1(t, t_0)\psi(t)dt+\int_L k_2(t, t_0)\overline{\psi(t)dt}, \tag{112.9}$$

我們暂时把方程(112.6)及(111.7)的右端考虑成已知函数．

正如在第一部分(§§ 99,100)中那样，可以将方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 及 $\mathbf{K}'\psi=g$ 的解分成类，并且定义**相联类** $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 及 $h'=h(c_{q+1}, c_{q+2}, \cdots, c_m)$ 的概念．我們把算子 $\mathbf{K}^0$ 的指标叫做已給方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 或算子 $\mathbf{K}$ 的**指标**；同样地，我們把算子 $\mathbf{K}^{0\prime}$ 的指标叫做方程 $\mathbf{K}'\psi=g$ 或者算子 $\mathbf{K}'$ 的指标． 相联的方程相联类的指标 $\varkappa$ 与 $\varkappa'$ 由关系式

$$\varkappa'=-\varkappa$$

联系．

我們把算子 $\mathbf{K}^0$ 或方程 $\mathbf{K}^0\varphi=f$ 在 h 类中的典則函数 $Z(t)$ 叫做算子 $\mathbf{K}$ 或者方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 在已給类 h 中的典則函数．

4°. 如果把方程(112.6)的右端視作已知函数，利用 § 97 中的公式求解方程(112.6)，我們便导出下述与 § 99 中类似的結果．

当 $\varkappa\geqslant 0$ 时，方程(112.1)在已給类 $h(c_1, c_2, \cdots, c_q)$ 中寻找解的意义下等价于 Fredholm 型方程

$$\mathbf{N}\varphi\equiv\varphi(t_0)+\int_L N_1(t_0, t)\varphi(t)dt+\int_L \overline{N_2(t_0, t)}\overline{\varphi(t)dt}$$
$$=f^*(t_0), \tag{112.10}$$

其中

$$N_1(t_0, t)=A^*(t_0)k_1(t_0, t)-\frac{B^*(t_0)Z(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{k_1(t_1, t)dt_1}{Z(t_1)(t_1-t_0)},$$
$$N_2(t_0, t)=\overline{A^*(t_0)}k_2(t_0, t)+\frac{\overline{B^*(t_0)Z(t_0)}}{\pi i}\int_L\frac{k_2(t_1, t)\overline{dt_1}}{\overline{Z(t_1)}(\bar{t}_1-\bar{t}_0)},\tag{112.11}$$

$$f^*(t_0)=\mathbf{K}^*f(t_0)+B^*(t_0)Z(t_0)P_{\varkappa-1}(t_0)\tag{112.12}$$

而这里，亦象在§97中那样，

$$A^*(t)=\frac{A(t)}{A^2(t)-B^2(t)},\quad B^*(t)=\frac{B(t)}{A^2(t)-B^2(t)},\tag{112.13}$$

$$\mathbf{K}^*f(t_0)\equiv A^*(t_0)f(t_0)-\frac{B^*(t_0)Z(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{f(t)dt}{Z(t)(t-t_0)};\tag{112.14}$$

$P_{\varkappa-1}(t_0)$ 表示次数不超过 $\varkappa-1$ 的具有任意复系数的多项式；当 $\varkappa=0$ 时，$P_{\varkappa-1}(t_0)\equiv0$。

当 $\varkappa<0$ 时，方程 (112.1)(在同一个意义下)等价于方程 (112.10)(在这个方程的右端应该认为 $P_{\varkappa-1}(t_0)=0$) 以及补充条件

$$\int_L a_j(t)\varphi(t)dt+\int_L b_j(t)\overline{\varphi(t)}dt=\int_L\frac{t^j f(t)}{Z(t)}dt,\tag{112.15}$$
$$j=0, 1, \cdots, -\varkappa-1,$$

其中

$$a_j(t)=\int_L\frac{k_1(t_1, t)t_1^j}{Z(t_1)}dt_1,$$
$$b_j(t)=\overline{t'^2}\int_L\frac{\overline{k_2(t_1, t)t_1^j}}{\overline{Z(t_1)}}dt_1.\tag{112.16}$$

类似地处置相联方程(112.2)，亦就是，如果把右端当作是已知的，用§98中的公式来求解方程(112.7)，那么，容易得出与前面以及与§100中同样結果相类似的結果，我們让讀者来进行推导.

5°. 如果假定多項式 $P_{\varkappa-1}(t_0)$ 是給定的，那么方程(112.10)便属于在§111中所考虑过的那一类型的方程，所不同的只是在于

函数 $N_1(t_0, t)$, $N_2(t_0, t)$ 以及函数 $f^*(t_0)$ 在某些結点的邻域內可能是无界的. 但是,和在 §101 中所做过的完全类似,这个方程可以化为另一个形式,在其中 $N_1(t_0, t)$, $N_2(t_0, t)$, $f^*(t_0)$ 已經用象 §111 中方程 (111.1) 內 $n_1(t_0, t)$, $n_2(t_0, t)$, $f(t_0)$ 那样的有界函数来替代.

在討論方程(112.10)的同时,我們还討論它的相联齐次方程 $\mathbf{N}'\psi=0$, 其中 $\mathbf{N}'$ 是 $\mathbf{N}$ 的相联算子,它由公式(参看 §111)

$$\mathbf{N}'\psi\equiv\psi(t_0)+\int_L N_1(t, t_0)\psi(t)dt+\int_L N_2(t, t_0)\overline{\psi(t)dt} \tag{112.17}$$

确定.

和在 §101 中所做的类似,这个方程的討論亦可以归結为这样的方程的討論,在其中已用有界函数 $n_1(t, t_0)$ 及 $n_2(t, t_0)$ 来替代 $N_1(t, t_0)$ 及 $N_2(t, t_0)$.

进行和 §101 类似的推理,在这一次并利用 §111 中的結果,我們便可以导得下述結論.

齐次方程 $\mathbf{N}\varphi=0$ 的綫性无关[①](絕对可积的)解的个数 ν(这些解是属于 h 类的,另外,在特殊結点的邻域內是属于 H_s^* 类的)是有限的,它等于相联齐次方程 $\mathbf{N}'\psi=0$ 的綫性无关(有界)解的个数(这些解是属于 H_s^* 类的,并且它們在所有普通結点的邻域內是属于 H_0 类的).

其次,再假設 $f^*(t)$ 是表示 h 类的函数,并且 $f^*(t)$ 在所有特殊結点的邻域內是属于 H_s^* 类的.

方程 $\mathbf{N}\varphi=f^*$(在絕对可积的函数类中)可解的充分和必要条件是

$$\mathrm{Re}\int_L f^*(t)\psi_j(t)dt=0, \quad j=1, 2, \cdots, \nu, \tag{112.18}$$

① 正如前面所規定的那样,綫性无关性是按照狹义的来理解.

其中 $\psi_j(t)$, $j=1, 2, \cdots, \nu$ 是方程 $\mathbf{N}'\psi=0$ 綫性无关解的完备系.

方程 $\mathbf{N}\varphi=f^*$ 的所有(絕对可积的)解都是属于 h 类的,此外,它們在特殊結点之邻域內都是属于 H_s^* 类的.

对于方程 $\mathbf{N}\varphi=f^*$ 的相联方程 $\mathbf{N}'\psi=g^*$, 容易得出类似的結果.

6°. 和 § 101 所做过的类似,根据 § 111, 5° 段的結果,容易断定,存在具有下述性质的函数 $\Gamma_1(t_0, t)$ 与 $\Gamma_2(t_0, t)$: 由公式

$$\mathbf{\Gamma} f^* \equiv f^*(t_0)+\int_L \Gamma_1(t_0, t) f^*(t)\,dt+\int_L \overline{\Gamma_2(t_0, t) f^*(t)\,dt} \tag{112.19}$$

所确定的算子 $\mathbf{\Gamma}$, 把 h 类中的每一个函数 f^* 变成此同一类中的函数,而由公式

$$\mathbf{\Gamma}' g^* \equiv g^*(t_0)+\int_L \Gamma_1(t, t_0) g^*(t)\,dt+\int_L \Gamma_2(t, t_0)\overline{g^*(t)\,dt} \tag{112.20}$$

确定的 $\mathbf{\Gamma}$ 的相联算子 $\mathbf{\Gamma}'$ 把 h' 类 (h 类的相联类) 中的每一个函数 g^* 变成此同一类中的函数.

再者,如果适合条件(112.18),那么,方程(112.10)的解(更确切地說,它的一个解)由公式

$$\varphi(t_0)=\mathbf{\Gamma} f^*(t_0) \tag{112.21}$$

給出. 对相联方程 $\mathbf{N}'\psi=g^*$ 亦成立着类似的結果.

7°. 我們已經看到, 当 $\varkappa\geqslant 0$ 时, 方程(112.1)(在 h 类中找解的意义下) 等价于在右端中包含任意的复系数多項式 $P_{\varkappa-1}(t_0)$ 之方程(112.10). 現在我們把这个多項式表成函数 t_0^j 和 it_0^j, $j=0, 1, \cdots, \varkappa-1$ 的实系数的綫性組合的形式:

$$P_{\varkappa-1}(t_0)=A_1\alpha_1(t_0)+A_2\alpha_2(t_0)+\cdots+A_{2\varkappa}\alpha_{2\varkappa}(t_0), \tag{112.22}$$

其中 $\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0), \cdots, \alpha_{2\varkappa}(t_0)$ 是函数 t_0^j, it_0^j, $j=0, 1, \cdots, \varkappa-1$ 按某种次序而取的一个排列,而 $A_1, A_2, \cdots, A_{2\varkappa}$ 都是任意实常数.

其次，我們再引进記号

$$\delta_j=\operatorname{Re}\int_L \psi_j(t)\mathbf{K}^* f(t)dt,\quad \delta=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu, \tag{112.23}$$

其中 $\mathbf{K}^* f$ 由公式(112.14)确定，而 $\psi_j(t)$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu$ 是方程 $\mathbf{N}'\psi=0$ 的綫性无关解的完备系．在这些記号下，方程(112.10)的可解性条件(112.18)可以表成形式：

$$\sum_{j=1}^{2\varkappa}\gamma_{kj}A_j=\delta_k,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu, \tag{112.24}$$

其中 γ_{kj} 都是确定的实常数，它們不依賴于函数 $f(t)$；我們用 ρ 表示矩陣 $\|\gamma_{kj}\|$ 的秩．

仿照§102中那样推导，可以断言，方程組(112.24)的可解性条件，因而，方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 在 h 类中的可解性条件具有形式

$$\operatorname{Re}\int_L \lambda_j(t)f(t)dt=0,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu-\rho, \tag{112.25}$$

其中 $\lambda_j(t)$ 是 h' 类中确定的綫性无关的函数，又齐次方程 $\mathbf{K}\varphi=0$ 在 h 类中綫性无关解的个数 l 由公式

$$l=2\varkappa+\nu-\rho \tag{112.26}$$

确定．

在 $\varkappa<0$ 的情形，方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 在 h 类中的可解性条件亦可以归結为形如(112.25)的条件，但是，在这一次应該取 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu,\ \nu+1,\ \cdots,\ \nu+\sigma$，其中 $0\leqslant\sigma\leqslant-2\varkappa$．

对方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 的相联方程 $\mathbf{K}'\psi=g$ 亦成立类似的結果．

特别是，我們要指出，依据上述，齐次方程 $\mathbf{K}\varphi=0$ 的綫性无关解的个数是有限的．对相联齐次方程 $\mathbf{K}'\psi=0$ 亦有同样的結果．

8°．現在容易証明和方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 及 $\mathbf{K}'\psi=g$ 有关的基本定理，这些定理在目前的情形下可以代替在§102中的定理．

定理 I　*为使方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 在已給的 h 类中为可解，必須而*

且只須是

$$\operatorname{Re}\int_L \psi_j(t) f(t)\,dt=0, \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ l', \tag{112.27}$$

其中 ψ_j, $j=1, 2, \cdots, l'$ 是相联齐次方程 $\mathbf{K}'\psi=0$ 在 h 类的相联类 h' 中綫性无关解的完备系.

定理 II 相联的齐次方程 $\mathbf{K}\varphi=0$ 及 $\mathbf{K}'\psi=0$ 在相联类 h 及 h' 中綫性无关解的个数 l 及 l' 之差等于方程 $\mathbf{K}\varphi=0$ 的 h 类之指标 $\varkappa$ 的两倍:

$$l-l'=2\varkappa. \tag{112.28}$$

如果交換方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 及 $\mathbf{K}'\psi=g$ 所处的地位,那么,亦有同样的結論.

首先証明定理 I. 对于方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 在 h 类中的解 $\varphi(t)$, 依据公式(112.5), 可以得出

$$\operatorname{Re}\int_L f(t)\psi_j(t)\,dt=\operatorname{Re}\int_L \psi_j(t)\mathbf{K}\varphi(t)\,dt$$
$$=\operatorname{Re}\int_L \varphi(t)\mathbf{K}'\psi_j(t)\,dt=0,$$

因此,由公式(112.5)可以直接导出条件(112.27)的必要性.

我們証明这些条件的充分性. 正如在 7° 段中已經指明的,方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 在 h 类中的可解性的充分和必要条件,可以归結为某 k 个形式为

$$\operatorname{Re}\int_L \lambda_j(t) f(t)\,dt=0, \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ k \tag{112.29}$$

的关系式, 其中 $\lambda_j(t)$ 是 h' 类中的某些函数. 如果我們能够証明条件(112.29)是条件(112.27)的推論,那么,条件(112.27)的充分性便得到了証明. 为此目的,我們要利用曾經多次利用过的方法. 亦就是,假定 $g(t)$ 是 H 类中的任意函数. 方程 $\mathbf{K}\varphi=\mathbf{K}g$ 在 h 类(甚至在 H 类)中是可解的. 因此,必然有

$$0=\operatorname{Re}\int_L \lambda_j(t)\mathbf{K}g(t)\,dt=\operatorname{Re}\int_L g(t)\mathbf{K}'\lambda_j(t)\,dt.$$

由此再依据函数 $g(t)$ 的任意性，易見 $\mathbf{K}'\lambda_j(t)=0$．因此，函数 $\lambda_j(t)$ 是函数 $\psi_j(t)$ 的綫性組合，而这就証明了我們的結論．

轉向証明定理 II．首先考虑 $\varkappa\geqslant 0$ 的情形．在这种情形下，方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 在 h 类中可解的充分和必要条件具有形式 (112.25)，其中 $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, …, $\lambda_{\nu-\rho}(t)$ 是 h' 类中的綫性无关的函数．另一方面，在 h 类中可解性的充分和必要条件是条件(112.27)．

这样一来，如果 $f(t)$ 是 H_0 类中适合条件(112.25)的任意函数，那么，它亦适合条件(112.27)，反之亦然．由此，容易断言[①]：函数 $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, …, $\lambda_{\nu-\rho}(t)$ 是函数 $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, …, $\psi_\nu(t)$ 的(实系数)綫性組合，反之亦然．于是，$l'=\nu-\rho$．由这一个等式連同早已証明过的等式 (112.26)，便可以导出所要証明的等式 (112.28)．

在 $\varkappa<0$ 的情形下，我們可以对方程 $\mathbf{K}\varphi=0$ 的相联方程 $\mathbf{K}'\psi=0$ (它的指标 $\varkappa'=-\varkappa$ 是正的)进行类似的議論，便得出所要求的結果．这样一来，我們可以认为定理 II 已經得証．

注釋　在函数 $k_2(t_0, t)$ 恒等于零的特殊情形下，这些結果必然和 § 102 的結果是一致的，不过在表面形式上它們稍有不同．表面上的区别是由于綫性无关性在此处和在 § 102 中理解得有所不同而产生的，在此处是按照狭义的綫性組合来理解的．

实际上[②]，假定 $k_2(t_0, t)=0$，又假定 φ_1, φ_2, …, φ_k 是方程 $\mathbf{K}\varphi=0$ 在 h 类中在通常意义下为綫性无关的解．那么，显然 φ_1, φ_2, …, φ_k, $i\varphi_1$, $i\varphi_2$, …, $i\varphi_k$ 是这个类中为狭义綫性无关的解，因此，它們的个数是 $l=2k$．

类似地，如果 ψ_1, ψ_2, …, $\psi_{k'}$ 是方程 $\mathbf{K}'\psi=0$ 在 h' 类中在通常意义下为綫性无关的解，那么，ψ_1, ψ_2, …, $\psi_{k'}$, $i\psi_1$, $i\psi_2$, …, $i\psi_{k'}$ 是这个类中为狭义綫性无关的解．于是，其个数是 $l'=2k'$．

---

① 参看附录三，注釋 2．

② 参看第 506 頁的脚注．

与此相应,条件(112.27)与下列条件是等价的:

$$\int_L \psi_j(t) f(t) dt = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, k',$$

而等式(112.28)变成了等式 $k - k' = \varkappa$.

IV. 在彈性理論的某些混合問題中的应用

我們把在 §§ 113, 114 中所讲述的彈性理論中两个重要混合問題的求解,作为前一部分中所得出的結果的应用;在推导§§ 113, 114 中的結果时,我們主要根据了 Г. Ф. Манджавидзе 的論文[3].

为了不破坏叙述上的連貫性, 在 §§ 113, 114 中, 我們将先不进一步論証与所討論函数在边界附近的性质有关的結論. 在附加的 § 115 中,在推导出一系列的估計式之后, 我們再来严格地論証所有这些結論.

§ 113. 平面彈性理論中的基本混合問題的求解

1° 为便于讀者参考,我們提醒一下平面彈性靜力学中的某些基本公式和基本命題,为了簡单起見,我們仅討論当彈性体所占的区域是由 $z = x + iy$ 平面① 上一条簡单的光滑封閉圍綫 L 所圍成的有界区域 S 的情形.

我們将假定不存在体积力,此时,平面彈性理論的基本方程可归結为下列方程:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0, \\ &X_x = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_y = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ &X_y = Y_x = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \tag{113.1}$$

① 应該怎样理解物体占有平面区域的意义,例如,可以参考著者的著作[9]. 在这一节中所引用的公式和命題的証明亦可以参看同一个著作.

此处 $X_x, Y_y, X_y=Y_x$ 是应力分量，u,v 是位移分量，$\lambda>0$, $\mu>0$ 都是 Lamé 常数，为了简单起見，此处已令

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{113.2}$$

基本方程(113.1)的一般（正規）解可以通过在 S 内为全純的两个任意函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$，由下式表出：

$$\left.\begin{aligned} X_x+Y_y&=4\operatorname{Re}\varphi'(z),\\ Y_y-X_x+2iX_y&=2[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)],\end{aligned}\right\} \tag{113.3}$$

$$2\mu(u+iv)=\varkappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}, \tag{113.4}$$

其中

$$\varkappa=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}=3-4\sigma>1; \tag{113.4a}$$

用

$$\sigma=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

表示 Poisson 系数 $\left(0<\sigma<\frac{1}{2}\right)$.

我們再指出可以替代公式(113.3)的一个重要公式：

$$\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}=i\int_{z_0}^{z}(X_n+iY_n)ds+\text{常数}, \tag{113.5}$$

此处积分是展布在任何一条联結 S 内的任意定点 z_0 与动点 z，并且不越出 S 的光滑弧上的积分；X_n, Y_n 表示在弧 l 上沿着正法綫方向[亦即，从 l 的正方向(从 z_0 到 z)来看时，指向 l 右側的法綫方向]作用的应力分量．如所周知，

$$\left.\begin{aligned} X_n&=X_x\cos(n,x)+X_y\cos(n,y),\\ Y_n&=Y_x\cos(n,x)+Y_y\cos(n,y).\end{aligned}\right\} \tag{113.6}$$

右端的积分不依賴于联結点 z_0 与点 z 的积分路徑．这是容易直接驗証的，并且从力学角度来看[①]，这亦是显然的．

我們再对上述結果补充下述在今后是很重要的注釋．

① 由于作用在处于平衡状态下的物体的边界上的外应力之主向量等于零，因此，展布在任何一条封閉圍綫上的这一个积分应該等于零．

对于給定的应力状态，函数 $\varphi(z)$ 被确定精确到差一个形式为 $Ciz+\gamma$ 之項，其中 C 是实的任意常数，而 γ 是复的任意常数；同样，函数 $\psi(z)$ 被确定精确到差一个复的任意常数 γ'，因此，用 $\varphi(z)+Ciz+\gamma$ 替代 $\varphi(z)$，同时用 $\psi(z)+\gamma'$ 替代 $\psi(z)$ 时，不改变应力状态，并且亦只有作这样的替代才不改变应力状态．特别是，如果应力都等于零，那么，$\varphi(z)=Ciz+\gamma$，$\psi(z)=\gamma'$．后两个公式表示整个物体的（无穷小的）剛性位移，正如公式(113.3)所指明的，这种位移对应力沒有影响．

对于給定的位移（由此亦給出应力），有

$$C=0, \quad \gamma\varkappa-\overline{\gamma'}=0.$$

如果給定了应力，此外，还取定了公式(113.5)右端的常数，那么，实常数 C 仍然是任意的，但是，γ 与 γ' 之間有关系式

$$\gamma+\overline{\gamma'}=0.$$

最后，如果給定了位移，并且取定了(113.5)右端的常数，那么，有

$$C=\gamma=\gamma'=0.$$

2°. 在彈性静力学理論（在現在考虑平面情形）中的基本边值問題是指按下列边界条件确定物体的彈性平衡問題．

在第一个基本問題中給定了作用在边界上的外应力．在第二个基本問題中給定了边界上各点的位移．最后，在基本混合問題中，在一部分边界上給定了应力，而在另一部分边界上給定了各点的位移．

这些問題中每一个問題之解的唯一性，都可以从著名的公式（这个公式容易从 Остроградский-Green 公式导出）：

$$\int_L (X_n u+Y_n v)\,ds = \iint_S [\lambda(e_{xx}+e_{yy})^2+2\mu(e^2_{xx}+e^2_{yy}+2e^2_{xy})]\,dx\,dy, \tag{113.7}$$

导出，其中

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad e_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

是形变分量．

在用通常的簡单方法推导出这个公式时，要假定位移分量及应力分量可以連續拓展到边界 L 的所有点上．在更一般的条件下，亦可以应用这公式，这些更一般的条件我們在后面要談到(参看本段末尾的注釋 2)．

在所有这三个基本問題中，对于两个可能的解之差在边界上有

$$X_n u+Y_n v=0,\quad \text{在 } L \text{ 上}.$$

因此，由于右端二重积分积分号下变量 e_{xx},e_{yy},e_{xy} 之二次式是正定的，对于两个解之差，我們应該有 $e_{xx}=e_{yy}=e_{xy}=0$，从而容易导出

$$u=-\varepsilon y+\alpha,\quad v=\varepsilon x+\beta,$$

此处，ε, α, β 都是(实)常数；后面两个公式所表示的是整个物体的(无穷小的)剛性位移．

在第一个基本問題中，这些常数仍然是任意的，因为，具有不同于剛性位移的解并不认为是不同的解．在第二个基本問題中以及在基本混合問題中，$\varepsilon=\alpha=\beta=0$；直接代入边界条件便可以知道这一点；这一点从力学观点来看亦是显然的，因为，如果即使在边界的一部分上位移等于零，剛性位移亦必然等于零．

注釋 1 注意到公式(113.4)及(113.5)，我們还可以把公式(113.7)改写成

$$\begin{aligned}&-2\mu\,\mathrm{Im}\int_L[\varkappa\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}]\,d[\overline{\varphi(t)}+\bar{t}\varphi'(t)+\psi(t)]\\&=2\mu\,\mathrm{Im}\int_L[\overline{\varphi(t)}+\bar{t}\varphi'(t)+\psi(t)]\,d[\varkappa\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}]\\&=\iint_S[(\lambda+2\mu)e_{xx}^2+2\lambda e_{xx}e_{yy}+(\lambda+2\mu)e_{yy}^2+4\mu e_{xy}^2]\,dx\,dy\end{aligned}\tag{113.8}$$

(第二个积分是由第一个积分經过分部积分而得出的),此处,我們提醒一下,u 及 v 表示与 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 由关系式

$$2\mu(u+iv)=\varkappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}$$

联系的两个实函数,其中

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad e_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

依据我們对这一个公式所进行过的推导,容易看出,这个公式对于任意两个在 S 内为全純的函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 都是成立的,只要这两个函数在边界附近是相当正规的,而常数 λ, μ, $\varkappa$ 可以用关系式

$$\varkappa=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}=1+\frac{2\mu}{\lambda+\mu}$$

联系;不利用彈性理論中的公式,亦容易直接驗証公式(113.8)的正确性.

另外,还容易看出,公式(113.8)对于由一些光滑的封閉圍綫所圍成的有界或无界的多連通域 S 亦是正确的,只要在无界区域的情形下,函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 就連在无穷远点处亦是全純的.容易驗証,对于无界区域 S,公式(113.8)亦是正确的;驗証时,先对区域 S 在圓周 $|z|=R$ 内的有界部分应用此公式(此处 R 是充分大的正数),再让 $R\to\infty$ 而取极限.容易看出,此时,公式左端展布在这个圓周上的积分趋于零①.

我們再指出下列一点.当 $\lambda<0$ 时,只要 $\lambda+\mu>0$,換句話說,当 $\mu>0$, $\varkappa>1$ 时,出現在二重积分号下的二次型亦是正定的.事实上,在这种情形下,二次型 $(\lambda+2\mu)e_{xx}^2+2\lambda e_{xx}e_{yy}+(\lambda+2\mu)e_{yy}^2$ 是

① 因为,根据条件,$\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 在无穷远点的邻域内是全純的,因此,在这个邻域内,

$$\varphi(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots,\qquad \psi(z)=b_0+\frac{b_1}{z}+\cdots,$$

$$\varphi'(z)=O\left(\frac{1}{z^2}\right),\qquad \psi'(z)=O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

正定的，因为 $\lambda+2\mu>0$ 以及判别式 $\lambda^2-(\lambda+2\mu)^2=-4\mu(\lambda+\mu)$ 是負的．

如果把 λ 視为弹性理論中的 Lamé 系数，那么，$\lambda<0$ 的情形在物理上是不可能的．但是，我們在下一节中要把公式(113.8)应用于其他的情形．

注釋 2　在下述情形下，我們亦需要引証由公式(113.7)或者(113.8)导出的唯一性定理：亦即，当紧接着公式(113.7)之后所讲到的，能够保証用簡单方法推导公式(113.7)及(113.8)的条件不滿足时的情形．但是，在我們要遇到的那些情形下，情况都是这样的：上述条件对于区域 S' 是适合的，S' 是从区域 S 去掉无穷小部分而得出的，而这无穷小部分是从 S 用中心在边界 L 上的有限个点处、半徑为无穷小的圓周切下来的．因此，我們可以把公式(113.7)或者(113.8)应用到区域 S' 上，然后再让上述圓周的半徑都趋于零来取极限．此时，在我們要遇到的所有情形下，左端展布在这些圓周含于 S 内的弧上的积分将趋于零①，因此，我們的公式对于区域 S 亦是正确的．

3°．第一个基本問題和第二个基本問題的解法是众所周知的，例如，在著者的著作[9]中曾經介紹过这些解法．在这一个著作中，仅对某些可以用比較初等的方法得出有效解案的特殊情形，才叙述到了基本混合問題的求解．

但是，在这里我們要指出在一般情形下基本混合問題的求解，可是，为了簡单起見，我們仅討論有界单連通区域的情形．对于多連通(有界或无界)区域，求解过程亦是同样的，但是，在这一种情形下，需要某些附加的討論②．

---

①　亦就是說，在我們要遇到的情形下，对于展布在中心在点 c 处的圓弧上的积分之被积式 Fds(s 是弧坐标)，我們可以有估計式 $|F|<$常数$\cdot|z-c|^{-\alpha}$，α 为小于 1 的常数．

②　参看 Д. И. Шерман[3]，Г. Ф. Манджавидзе[3]．

因此，假定物体占有的有界区域 S 由一条簡单的封閉圍綫 L 所圍成．我們現在假定圍綫 L 不仅是光滑的，并且它具有适合 $H(1)$ 条件(亦就是,适合 Lepschitz 条件)的曲率①．

在 L 上取定弧 $L'_j=a_jb_j$, $j=1, 2, \cdots, p$; 这些弧彼此沒有公共的端点，这些弧的正方向与 L 的正方向是一致的，而当沿着 L 之正方向移动时，区域 S 保持在 L 之左側，并且这些弧一个接着一个．弧 b_ja_{j+1}, $j=1, 2, \cdots, p$ (把 a_{p+1} 理解为 a_1) 我們用 L''_j 来表示．我們用 L' 表示弧 L'_j 之全体，而用 L'' 表示弧 L''_j 的全体．

基本混合問題 我們現在着手解决下面这个問題：在边界的 L' 部分上給出外应力,而在边界的其余部分 L'' 上給出位移,要求确定物体的彈性平衡．

依据公式(113.4),(113.5),显然可以把这一个問題归結为要求根据边界条件：

$$\begin{aligned} &\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t)+C(t) \quad \text{当 } t\in L' \text{ 时}, \\ &-\varkappa\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t) \quad \text{当 } t\in L'' \text{ 时}, \end{aligned} \tag{113.9}$$

确定两个在 S 内为全純的函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 的問題．在这些公式中，$f(t)$ 是 L 上的已知函数,亦就是,

$$\begin{aligned} &f(t)=i\int_{a_j}^{t}(X_n+iY_n)ds, \quad \text{当 } t\in L'_j \text{ 时}, \\ &f(t)=-2\mu(g_1+ig_2), \quad \text{当 } t\in L'' \text{ 时}, \end{aligned} \tag{113.10}$$

此处 X_n, Y_n 是給定在 L' 上的外应力分量，而 g_1, g_2 是給定在 L'' 上的位移分量；积分是沿弧 $L'=a_jb_j$ 取的；s 表示弧坐标．末了，$C(t)$ 表示 L' 上的分段常数的函数,亦就是,当 $t\in L'_j$ 时，$C(t)=C_j$，这里 C_j 表示事先并未給定的常数．

我們将假定，$f(t)$ 是属于 H_0 类的，而 $f'(t)=\dfrac{df(t)}{dt}$，对結点

① 这說明，曲綫 L 上点的坐标 x 与 y 具有适合 $H(1)$ 条件的二阶导函数．Г. Ф. Манджавидзе 曾經指出过，当 $H(1)$ 条件改換成 $H(\alpha)$ 条件 $\left(\alpha>\dfrac{1}{2}\right)$ 时，討論并不致于复杂很多．

a_j 及 b_j, $j=1, 2, \cdots, p$ 是属于 H^* 类的．

在此处以及今后，在不致于引起誤解的地方，我們都把 $\varphi^+(t)$, $\varphi'^+(t)$ 及 $\psi^+(t)$ 改写成 $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ 及 $\psi(t)$．

依据 Д. И. Шерман[2]，[3]中的想法，我們将找下列形式的解①：

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-z},\\ \psi(z) &= -\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(t)}\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,\overline{dt}}{t-z}\\ &\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\,\omega(t)\,dt}{(t-z)^2},\end{aligned} \tag{113.11}$$

此处 $\omega(t)$ 是需要确定的边界上点 t 的函数②．

如果假定，函数 $\omega(t)$ 是連續的，并且具有可积的导函数 $\omega'(t)$，那么，利用分部积分法，我們可以把后一个公式再改写成

$$\psi(z) = -\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(t)}\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\,\omega'(t)\,dt}{t-z}. \tag{113.11a}$$

类似地，我們可以把导函数 $\varphi'(z)$ 表成下述形式：

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,dt}{(t-z)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega'(t)\,dt}{t-z}. \tag{113.11b}$$

我們現在算出边值 $\varphi^+(t)$, $\varphi'^+(t)$ 及 $\psi^+(t)$（假定 Соходкий-Plemelj 公式可以应用到公式(113.11)的第一个及公式(113.11a), (113.11b)的右端上），并且把所得出的那些表示式代入边界条件(113.9)，在 (113.9) 中我們把 $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ 及 $\psi(t)$ 分别理解为 $\varphi^+(t)$, $\varphi'^+(t)$ 及 $\psi^+(t)$．这样就容易导出用来确定 $\omega(t)$ 的下列积分方程：

---

① 关于未知函数的这种或者那种表示形式的各种設想，可以参照在著者的著作[9] § 101 中所說明的．

② 在多連通区域的情形下，对 (113.11) 的右端还需要补加一些簡单的表示式；参看 Д. И. Шерман[3]，Г. Ф. Манджавидзе[3]．亦可以参照 Н. И. Мусхелишвили[9]，§ 102．

$$\mathbf{K}\omega \equiv A(t_0)\omega(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0}$$

$$+\int_L k_1(t_0,\ t)\omega(t)\,dt+\int_L \overline{k_2(t_0,\ t)}\,\overline{\omega(t)\,dt}$$

$$=f(t_0)+C(t_0), \tag{113.12}$$

此处

$$A(t_0)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-\varkappa) & \text{在 } L' \text{ 上},\\ -\varkappa & \text{在 } L'' \text{ 上},\end{cases}$$

$$B(t_0)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+\varkappa) & \text{在 } L' \text{ 上},\\ 0 & \text{在 } L'' \text{ 上},\end{cases} \tag{113.13}$$

$$k_1(t_0,\ t)=\frac{\varkappa}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\left[\ln\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0}\right],$$

$$k_2(t_0,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0}\right], \tag{113.14}$$

末了，

$$C(t)=\begin{cases}C_j & \text{在 } L'_j \text{ 上},\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p,\\ 0 & \text{在 } L'' \text{ 上}.\end{cases} \tag{113.15}$$

正象已經指出过的那样，常数 C_j 在事先都幷沒有給定，而需要在求解这个問題时确定它們；这一点以后还要說明. 但是，我們暂时把函数 $C(t)$ 当作是已知的.

在計算时，假定 t_0 是常数，在公式(113.14)中对 t 之偏导数应理解为对 t 之导数；而把量 $\bar{t}$ 当作 t 的函数，因此，

$$\frac{\partial\bar{t}}{\partial t}=\frac{d\bar{t}}{dt}=\frac{d\bar{t}}{ds}\Big/\frac{dt}{ds},$$

此处 s 是弧坐标.

对应于方程(113.12)的齐次特征方程是

$$A(t_0)\omega(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0}=0. \tag{113.16}$$

对应于这个方程的齐次联結問題是

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t),$$

其中

$$G(t)=\frac{A(t)-B(t)}{A(t)+B(t)}$$
$$=\begin{cases}-\varkappa & \text{当 } t\in L',\\ 1 & \text{当 } t\in L'',\end{cases} \tag{113.17}$$

这个問題解决起来特别簡单．这就是說，容易直接驗証①，或者依据§83，2°段中的一般公式，所有的結点 a_k 及 b_k 都是普通結点，并且例如在最小的一类 h_{2p} 类中的典則解 $X(z)$ 由公式(精确到可以差一个异于零的常数因子)

$$X(z)=\prod_{j=1}^{p}(z-a_j)^{\frac{1}{2}+i\beta}(z-b_j)^{\frac{1}{2}-i\beta} \tag{113.18}$$

給出，此处

$$\beta=\frac{\ln\varkappa}{2\pi}. \tag{113.19}$$

把因子

$$(z-a_j)^{\frac{1}{2}+i\beta}(z-b_j)^{\frac{1}{2}-i\beta}=\sqrt{(z-a_j)(z-b_j)}\left[\frac{z-a_j}{z-b_j}\right]^{i\beta}$$

理解为在沿着相应的弧 a_jb_j 而割开的平面上是全純的一枝，例如，所取的分枝可以是这样的一枝，在无穷远点的邻域內在它們按 z 的降幂排列的展开式中都以 z 为其第一项．

所有其他类的典則解，可以从 $X(z)$ 乘以形式为 $(z-a_k)^{-1}$ 及 $(z-b_k)^{-1}$ 之因子而得出．但是，我們只用到函数 $X(z)$．

从(113.18)知道，現在的联結問題的 h_{2p} 类的指标等于$(-p)$，因为 $X(z)$ 在无穷远处的阶数等于 p．因此，依据定义，$-p$ 是算子 $\mathbf{K}$ 的指标．

---

① 我們所研究的事实上是边界曲綫为 L' 的齐次联結問題，因为在 L'' 上，我們有 $\Phi^{+}(t)=\Phi^{-}(t)$，亦就是說，L'' 不是函数 $\Phi(z)$ 的跳跃曲綫．我們在§85中已考虑过这样的問題当 $\varkappa=1(\beta=0)$ 时的特殊情形．

我們将在 h_{2p} 类中找方程(113.12)的解 $\omega(t)$ ①.

可以証明(参看 § 115), 此时 $\omega(t)$ 是属于 H 类的, 而导函数 $\omega'(t)$ 是属于 H^* 类的.

因为算子 $\mathbf{K}$ 的 h_{2p} 类的指标等于 $-p$, 因此, 依据 § 112 中的定理 II, 我們有

$$\nu-\nu'=-2p, \tag{113.20}$$

此处 ν 是齐次方程 $\mathbf{K}\,\omega=0$ 在 h_{2p} 类中綫性无关 (在狭义意义下) 解之个数, 而 ν' 是相联齐次方程 $\mathbf{K}'\,\sigma=0$ 在 $h_0=h'_{2p}$ 类中的綫性无关解之个数.

我們証明 $\nu=0$ ②, 从而 $\nu'=2p$. 事实上, 假定 $\omega_0(t)$ 是方程 $\mathbf{K}\,\omega=0$ 在 h_{2p} 类中的任意一个解, 而 $\varphi_0(z)$ 及 $\psi_0(z)$ 是当在公式(113.11)中用 $\omega_0(t)$ 来替代 $\omega(t)$ 时由这些公式所确定的函数.

因此,

$$\begin{aligned} \varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}&=0 \quad 在 L' 上, \\ -\varkappa\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}&=0 \quad 在 L'' 上. \end{aligned} \tag{113.21}$$

依据(在这一节 2° 段的)唯一性定理以及在 1° 段末尾所指出的結果, 容易断定, 在整个区域 S 内

$$\varphi_0(z)=0, \quad \psi_0(z)=0.$$

但是, 此时, 依据公式(113.11)(亦参考(113.11a)), 我們应該有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_0(t)\,dt}{t-z}=0,$$

---

① 在此处适当地作下列一般性的注释. 在求解这种或者那种物理問題时, 在数学問題的提法中需要(象在所有其他的情形中那样)在事先对未知函数加上某些限制. 这时, 通常需要遵循物理上的原理, 又不得不和所用的方法一起来考虑. 这种或那种所加的限制之合理性的基本判定法(判定所提問題之适定性)是要使在所加的限制下, 問題应該有解, 并且如果从物理方面推出解的唯一性, 那么, 問題亦只能有唯一解.

我們看出, 在目前的情形下, 上述条件是适合的. 我們对 $\omega(t)$ 所加的条件的目的是为了保証, 由公式(113.11)所确定的函数在 L 上(除了結点以外)的边値是存在的, 同时亦是为了保証在本书中所論証过的平面彈性理論的边値問題之唯一性定理是可以应用的.

② 証明方法是属于 Д. И. Шерман[2] 的.

$$\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega_0(t)}\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\omega_0'(t)\,dt}{t-z}=0$$

(对所有 $z\in S$). 由此再依据在 § 29 中已証明过的命题, 可以断定, 由等式①

$$i\varphi^*(t)=\omega_0(t),\qquad -i\psi^*(t)=\varkappa\overline{\omega_0(t)}+\bar{t}\omega_0'(t)\tag{113.22}$$

所确定的函数 $\varphi^*(t)$ 及 $\psi^*(t)$ 是在区域 S^- 内为全純的函数 $\varphi^*(z)$ 及 $\psi^*(z)$ 之边值, 而 S^- 是 $S+L$ 对于全平面的余集, 并且

$$\varphi^*(\infty)=\psi^*(\infty)=0.$$

从等式(113.22)消去 $\omega_0(t)$, 我們得出

$$\varkappa\overline{\varphi^*(t)}-\bar{t}\varphi^{*\prime}(t)-\psi^*(t)=0\quad 在\ L\ 上.\tag{113.23}$$

与这一个边界条件所对应的是物体占有无界区域 S^-, 而在边界上位移等于零的情形下的第二个基本問題(2° 段). 由此, 依据对应的唯一性定理以及条件 $\varphi^*(\infty)=\psi^*(\infty)=0$, 可以断言,

$$\varphi^*(z)=\psi^*(z)=0.$$

但是, 此时, 依据公式(113.22), $\omega_0(t)=0$.

这样一来, 有关 $\nu=0$ 以及由此而知的 $\nu'=2p$ 的結論已經証毕.

依据 § 112 中的定理 I, 方程(113.12)(在 h_{2p} 类中) 的可解性条件具有形式

$$\mathrm{Re}\int_L [f(t)+C(t)]\sigma_j(t)\,dt=0,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ 2p,\tag{113.24}$$

其中 $\sigma_j(t)$, $j=1, 2, \cdots, 2p$ 是方程 $\mathbf{K}'\sigma=0$ 在 $h_0=h'_{2p}$ 类中綫性无关解的完备系.

令 $C_k=\gamma_k+i\gamma_{k+p}$, $k=1, 2, \cdots, p$, 此处 γ_j 是一些实常数, 我們得出用来确定常数 γ_k, $k=1, 2, \cdots, 2p$ 的(实)綫性方程組:

$$\sum_{k=1}^{2p}A_{jk}\gamma_k=B_j,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ 2p,\tag{113.25}$$

---

① 引进因子 i 与 $-i$, 是为了使得所得出的公式(113.23)具有象此处所写出的那种形式.

此处 A_{jk} 是一些与 $f(t)$ 无关的确定的常数，而 B_j 是依賴于 $f(t)$ 的常数：

$$B_j = \mathrm{Re}\int_L f(t)\sigma_j(t)\,dt.$$

我們証明，方程組(113.25)的行列式是异于零的. 事实上，假定 $f(t)=0$，那么，在方程組(113.25)中，所有 $B_j=0$，因此，这个方程組变成了齐次方程組. 如果这个方程組的行列式等于零，那么，它允許有非零解. 假定 γ_k^0, $k=1, 2, \cdots, 2p$ 是它們中的一个解. 那么，当 $f(t)=0$ 及 $C_k=C_k^0=\gamma_k^0+i\gamma_{k+p}^0$ 时，方程 (113.12)(在 h_{2p} 类中)是可解的. 假定 $\omega_0(t)$ 是它的解，而 $\varphi_0(z)$ 及 $\psi_0(z)$ 是与它对应的函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$. 那么，

$$\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=C_k^0 \quad 在 L_k' 上,$$

$$k=1, 2, \cdots, p,$$

$$-\varkappa\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=0, \quad 在 L'' 上.$$

从而依据有关混合問題的唯一性定理，容易断定，

$$\varphi_0(z)=\delta, \quad \psi_0(z)=\varkappa\bar{\delta},$$

此处 δ 是某个常数.

因此，对所有 $z\in S$，我們都有

$$\begin{aligned}\varphi_0(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega_0(t)\,dt}{t-z}=\delta,\\ \psi_0(z)&=-\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega_0(t)}\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar{t}\omega_0'(t)\,dt}{t-z}=\varkappa\bar{\delta}.\end{aligned}\tag{113.26}$$

現在重新引进記号 (113.22)，依据在 § 29 中已証明过的命題，我們导出結論：函数 $\varphi^*(t)$ 及 $\psi^*(t)$ 是某两个在无界区域 S^- 內全純的函数 $\varphi^*(z)$ 和 $\psi^*(z)$ 的边值，并且这些边值由关系式(113.23)联系；在这一次 $\varphi^*(\infty)=-i\delta$, $\psi^*(\infty)=-i\varkappa\bar{\delta}$. 依据第二个基本問題的唯一性定理，可以得出結論：

$$\varphi^*(z)=常数=-i\delta, \quad \psi^*(z)=常数=-i\varkappa\bar{\delta}.$$

把这些值代入(113.23)中，我們得出 $\delta=0$，由此再依据(113.22)，$\omega_0(t)=0$．但是，此时，在 S 內，有 $\varphi_0(z)=\psi_0(z)=0$，并且因此，有 $C_k^0=\gamma_k^0+i\gamma_{k+p}^0=0$，$k=1, 2, \cdots, p$，这与我們的假定是矛盾的．

这样一来，方程組(113.25)之行列式是异于零的．而这就說明了，这个方程組对于常数 γ_k，$k=1, 2, \cdots, 2p$ 总是单值可解的．从而，常数 C_j，$j=1, 2, \cdots, p$ 是完全确定的[①]；对于这些常数值，方程(113.12)（在 h_{2p} 类中）是单值可解的，并且由它的解 $\omega(t)$ 可以导出原来問題的解．

4°．当 L 是圓周时，方程(113.12)具有非常簡单的形式．在这种情形下，它本质上可以归結为系数 $A(t)$ 及 $B(t)$ 由公式(113.13)确定的特征方程，而这个方程最后可以归結为一个联結問題，在这个問題中，系数 $G(t)$ 由公式(113.17)确定，而自由項包含有一些事先并未給定的常数，这些常数在求解这个問題的过程中，可以用綫性代数方程組来唯一地确定．但是，在现在的情形下，避免用积分方程，而直接把它归結为联結問題，可以极簡单地得出它的解；参看著者的著作[9]，§123．

§114．薄板弯曲的一个基本混合問題的求解

1°．在平面彈性理論中应用过的方法（特别是，复变函数論方法），作了相应的修改以后，可以卓有成效地用来求解彈性薄板（它原来是平面的，在沿着平面的法綫方向的荷载作用下产生弯曲的）弯曲（近似）理論中的边值問題．这是由于在这种或其他的情形下，我們都会接触到和双調和方程有关的边值問題．

薄板弯曲的（近似）理論中的基本边值問題分别是下列情形的

---

① 容易看出，由公式(113.9)所規定的原来边值問題是有解的，在此問題中常数 C_j 中的一个仍然是任意的（这既不影响到应力又不影响到位移）．这个任意性可以由形式为(113.11)的解来避免掉．

問題：薄板的周边是固定的，薄板的周边是受到支承的，以及薄板的周边是自由的。此外，还把与下列情形所对应的混合問題亦列入基本問題：薄板的周边的不同部分处于上面所列的三种不同的情形下.

周边是固定的情形可以归結为与平面彈性理論中第一个基本問題类似的問題①（§113，2°段）. С. Г. Лехницкий[1] 及 И. Н. Векуа[6] 都曾經指出过，周边是自由的情形可以归結为与平面彈性理論中的第二个基本問題类似的問題②.

我們在此处推导当有界单連通的薄板之周边的一部分是固定的，而其余部分是自由的情形下的混合問題的求解；这个解法是由 Г. Ф. Манджавидзе[3] 給出的③.

于是，我們討論在法向荷載作用下彈性薄板的状态，此薄板的中間曲面在受荷載之前，占有在 $z=x+iy$ 平面上由一条簡单的封閉圍綫 L 所圍成的单連通区域 S. 我們将假定曲綫 L 的曲率具有对弧坐标的导函数，并且这个导函数是属于 $H(1)$ 类的④.

假定沿用在上一节中的記号（第527頁），在 L 上取弧 $L_j'=a_jb_j$，$j=1,2,\cdots,p$；我們仍然用 L_j'' 表示弧 $b_ja_{j+1}(a_{p+1}=a_1)$，弧 L_j' 的全体用 L' 表示，而弧 L_j'' 的全体则用 L'' 表示. 将假定薄板的周边的 L' 部分是固定的，而 L'' 部分则是自由的.

我們用 $w(x, y)$ 表示撓度，用 $q(x, y)$ 表示（法向）荷載集度.

---

① 在有界单連通区域的情形下，从数学的角度来看，这些問題簡直是一致的. 在无界区域及多連通区域（有界的或无界的）的情形下，会产生一些区别.

② 前一个脚注中所指出的在此处可以重复一下.

③ 后来，А. И. Каландия[3],[4] 解决了有关边界状况的其他組合的混合問題，其中包含了所有上述三种形式的条件都出現的情形（边界的有一部分是自由的，有一部分是受支承的，再有一部分是固定的）.

④ 这就是說，曲綫 L 上的点的坐标 x 和 y 具有属于 $H(1)$ 类的三阶导函数. Г. Ф. Манджавидзе 曾經証实过，当 $H(1)$ 类改换成 $H(\alpha)$ 类 $\left(\alpha>\frac{1}{2}\right)$ 时，推理不至于大大复杂化.

依据薄板弯曲的近似理論，函数 $w(x, y)$ 必須滿足方程

$$\Delta\Delta w=\frac{q}{D} \tag{114.1}$$

以及边界条件

$$w=0, \quad \frac{dw}{dn}=0, \quad \text{当 } t\in L' \text{ 时},$$

$$\mathbf{M}\, w\equiv\sigma\Delta w+(1-\sigma)\left[\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\sin^2\theta\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right.$$

$$\left.+\sin 2\theta\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]=0,$$

$$\mathbf{N}\, w\equiv\frac{d\Delta w}{dn}+(1-\sigma)\frac{d}{ds}\left[\cos 2\theta\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sin 2\theta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]=0,$$

$$\text{当 } t\in L'' \text{ 时}, \tag{114.2}$$

其中 n 是 L 的外法綫，θ 是 n 与 Ox 軸之間所夹的角，σ 是 Poisson 系数，$D=$常数>0(薄板的"柱形剛性")．

非齐次方程的一般解可以表成形式

$$w(x, y)=w_0(x, y)+W(x, y), \tag{114.3}$$

此处 $w_0(x, y)$ 是它的任一个特解，而 $W(x, y)$ 則是 S 內的双調和函数，亦就是說，它滿足双調和方程

$$\Delta\Delta W=0;$$

至于特解 $w_0(x, y)$，这种解可以作出无穷多个．有一个众所熟悉的是

$$w_0(x, y)=\frac{1}{8\pi D}\iint_S q(\xi, \eta)r^2\ln r\, d\xi\, d\eta, \qquad r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}. \tag{114.4}$$

容易直接驗証，如果 $q(x, y)$ 是有界可积函数，那么，由上式所确定的函数 $w_0(x, y)$ 以及它的直到三阶的偏导函数在 $S+L$ 內是連續的．保証函数 $w_0(x, y)$ 适合方程(114.1)的充分条件是使

函数 $q(x, y)$ 在区域 $S+L$ 内适合 H 条件的条件①.

以后,我們把 $w_0(x, y)$ 理解为方程(114.1)在区域 $S+L$ 內具有三阶連續偏导函数的任一个特解,并且当 $q(x, y)=0$ 时, $w_0(x, y)\equiv 0$ (如果认为这样的解是存在的話). 剛才已經指出过了这种解存在的充分条件.

用表示式(114.3)替代边界条件(114.2)中之 $w(x, y)$, 并且把与特解 w_0 有关的項移到右端(我們假定 w_0 是已經选定了的), 我們就把联系于非齐次方程(114.1)及齐次边界条件(114.2)的边值問題, 归結为由齐次双調和方程 $\Delta\Delta W=0$ 及非齐次边界条件[以后(在3°段中)我們要写出这个边界条件在經过改变后的形式]联系的边值問題.

2°. 在进一步研究之前, 我們先推导某些(大多数是众所周知的)与双調和函数有联系的公式(例如,参看著者的著作[9]).

每一个在 S 为双調和的函数都可以表成形式(É. Goursat 公式)

$$W(x, y)=\operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z)+\chi(z)]$$
$$=\frac{1}{2}[\bar{z}\varphi(z)+z\overline{\varphi(z)}+\chi(z)+\overline{\chi(z)}], \tag{114.5}$$

其中 $\varphi(z)$ 与 $\chi(z)$ 都是 S 内的全純函数②. 上述公式可以用更便于我們的目的的公式来替代,这些公式可以直接从前一种导出(反之亦然):

$$\frac{\partial W}{\partial x}+i\frac{\partial W}{\partial y}=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}, \tag{114.6}$$

此处已令

$$\psi(z)=\chi'(z). \tag{114.6a}$$

从(114.5)或者从(114.6)容易导出

① 例如,参看 O. D. Kellogg[3].

② 提醒一下, 我們假定了 S 是有界的和单連通的. 在多連通区域的情形下, 尽管函数 $W(x, y)$ 是单值的,函数 $\varphi(z)$ 及 $\chi(z)$ 亦可能是多值的.

$$\Delta W=2[\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}]=4\,\mathrm{Re}\,\varphi'(z). \tag{114.7}$$

如果引进記号 $P(x, y)=\Delta W$ ($P(x, y)$ 是調和函数)，又若用 $Q(x, y)$ 表示 $P(x, y)$ 的调和共軛函数(被确定精确到差一个实的任意常数)，那么，我們有

$$4\varphi'(z)=P(x, y)+iQ(x, y)+Ci, \tag{114.7a}$$

此处 C 是实的任意常数；假定对于 $Q(x, y)$ 已經选定了确定的值．而公式表明，如果双調和函数 $W(x, y)$ 已經給定，那么，函数 $\varphi'(z)$ 被确定精确到差一个純虛的任意常数，从而，函数 $\varphi(z)$ 可以精确到差一个表示式 $Ciz+\gamma$，此处 C 是一个实的任意常数，而 γ 是一个复的任意常数．

特別是，如果在 S 内，$W(x, y)\equiv 0$，那么，必然有 $\varphi(z)=Ciz+\gamma$，再依据公式(114.6)，$\psi(z)=-\bar{\gamma}$．

最后，我們提醒一下，下列著名的公式[1]，这个公式对于每一个在区域 S 的边界 L 附近适合一定的正規性条件的双調和函数 $W(x, y)$ 都是成立的，即

$$\iint\limits_S\left\{(\Delta W)^2-(1-\sigma)\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dx\,dy$$
$$+\int_L\left[W\,\mathbf{N}\,W-\frac{dW}{dn}\,\mathbf{M}\,W\right]ds=0, \tag{114.8}$$

此处 $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{N}$ 是由公式(114.2)所确定的算子．

由于

$$(\Delta W)^2-(1-\sigma)\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)^2\right]$$
$$=\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2+(1+\sigma)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)$$
$$+(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)^2$$

显然是函数 $W(x, y)$ 的二阶偏导函数的正定二次型[2]，因此，从公

---

① 例如，参看 Л. В. Канторович 及 В. И. Крылов[1].

② 我們回想起，$0<\sigma<\frac{1}{2}$.

式(114.8)导出，如果在一部分边界上 $W=\frac{dW}{dn}=0$，而在其余部分边界上 $\mathbf{M}W=\mathbf{N}W=0$，那么，函数 $W(x, y)$ 的所有二阶偏导函数都等于零，而这就說明了，$W(x, y)$ 是坐标 x 与 y 的綫性函数．但是，因为在某一部分边界上 $W=\frac{dW}{dn}=0$，因此，容易看出，在 S 內处处有 $W=0$.

这样一来，我們便証明了在 $1°$ 段中提出的混合問題的唯一性定理.

3°. 轉向求解这个問題．正象我們早就指出过的那样，进行代换 $w(x, y)=w_0(x, y)+W(x, y)$（此处 $W(x, y)$ 是一个双調和函数，而 $w_0(x, y)$ 是非齐次方程(114.1)的某一个特解)，边界条件(114.2)就变成非齐次的形式，亦就是

$$\begin{aligned} &W=-w_0, \quad \frac{dW}{dn}=-\frac{dw_0}{dn}, \quad \text{当 } t\in L' \text{ 时}, \\ &\mathbf{M}W=-\mathbf{M}w_0, \quad \mathbf{N}W=-\mathbf{N}w_0, \quad \text{当 } t\in L'' \text{ 时}. \end{aligned} \tag{114.1a}$$

为了把問題归結为与平面彈性理論中的基本混合問題相类似的問題，我們将这些条件稍为加以变更.

亦就是說，我們把条件(114.1a)中的第一对换成下列条件

$$\frac{\partial W}{\partial x}+i\frac{\partial W}{\partial y}=-\frac{\partial w_0}{\partial x}-i\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad \text{当 } t\in L';$$

显然，如果后一个条件适合，那么，条件 $\frac{dW}{dn}=-\frac{dw_0}{dn}$ 在 L' 上正好是适合的，而条件 $W=-w_0$ 在这些弧 L_k' 上可以精确到差某些常数.

轉向条件(114.1a)中的第二对条件．通过直接驗証，容易断言，当 z 沿着某一条位于 S 內的弧 l 变动时，如果用 s 表示 l 上的弧坐标，那么①，

① С. Г. Лехницкий[1]，И. Н. Векуа[6]．公式(114.9)驗証起来极簡单，如果考虑到，沿着弧 l，我們有 $d\bar{z}=e^{-2i\vartheta}dz=-e^{-2i\theta}dz$（此处 ϑ 是 l 的正切綫与 Ox 軸所夹的角，而 $\theta=\vartheta-\frac{\pi}{2}$ 是指向右側的法綫与 Ox 軸之間所夾的角），又若回想起，$\frac{d\Delta W}{dn}=\frac{dP}{dn}=\frac{dQ}{ds}$［参看公式(114.7a)］.

$$\left\{\mathbf{M}W+i\int\mathbf{N}W\,ds\right\}dz=(1-\sigma)d\{\varkappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}\},\tag{114.9}$$

其中

$$\varkappa=\frac{\sigma+3}{1-\sigma};\tag{114.10}$$

这个常数与上一节中用同一个記号表示的常数是不同的；但是，重要的是在这两种情形下 $\varkappa>1$.

注意到公式(114.9)以及公式 (114.6)，問題的边界条件就可以表成形式

$$\begin{aligned}&\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t)\\&\qquad\text{当 } t\in L' \text{ 时},\\&-\varkappa\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t)+itC(t)+\alpha(t)\\&\qquad\text{当 } t\in L'' \text{ 时}.\end{aligned}\tag{114.11}$$

在这些公式中，$f(t)$表示已知函数

$$\begin{aligned}&f(t)=-\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+i\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)&&\text{当 } t\in L' \text{ 时},\\&f(t)=\frac{1}{1-\sigma}\int_{b_j}^{t}\left[\mathbf{M}\,w_0+\int_{b_j}^{s_\tau}i\,\mathbf{N}\,w_0\,ds\right]d\tau&&\text{当 } t\in L_j'' \text{ 时},\end{aligned}\tag{114.12}$$

此处 τ 是 $L_j^*=b_ja_{j+1}$ 上的动点，s_τ 表示从点 b_j 量起的点 τ 所对应的弧坐标．用 $C(t)$ 表示 L'' 上点的分段常数的函数，亦就是說，在 L_k'' 上 $C(t)=C_k$，这里 C_k 是事先并沒有給定的实常数；用 $\alpha(t)$ 亦表示在 L'' 上是分段常数的函数，亦就是說，在 L_k'' 上 $\alpha(t)=\alpha_k$，这里这一次，α_k 一般亦是事先并未給定的复常数.

我們将假定，函数 $f(t)$ 是属于 H_0 类的，而 $f'(t)$ 在結点 a_j 及 b_j 的邻域內是属于 H^* 类的．这样的假定对于求解边值問題(114.11)已經足够了；至于对原来的問題，只要函数 $q(x, y)$ 是相当正規的，例如，它适合紧接着公式(114.4)所指出的条件，那么，利用問題(114.11)的解，便可以得出它的解.

常数 C_j 及 α_j, $j=1, 2, \cdots, p$ 应該如此确定，使函数

$$w(x, y)=\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z)+\chi(z)]+w_0(x, y)$$

以及它的一阶偏导函数，都可以連續拓展到边界 L 的所有的点上[①]，并且要求 $w(x, y)$ 不仅在弧 L_j' 上取常数值（正象条件(114.11)的第一个所要求那样），而且在 L' 上它取值零.

我們找象在上一节中那样形式的函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$，亦就是，找下列形式的 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$：

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)dt}{t-z},\\ \psi(z)&=-\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega(t)}dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)\overline{dt}}{t-z}\\ &\quad-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar t\omega(t)dt}{(t-z)^2}.\end{aligned}\tag{114.13}$$

对于 $\omega(t)$，我們得出方程

$$\begin{aligned}\mathbf{K}\omega\equiv A(t_0)\omega(t_0)&+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\omega(t)dt}{t-t_0}\\ &+\int_L k_1(t_0, t)\omega(t)dt+\int_L\overline{k_2(t_0, t)}\overline{\omega(t)dt}\\ &=f(t_0)+it_0C(t_0)+\alpha(t_0),\end{aligned}\tag{114.14}$$

其中算子 $\mathbf{K}$ 是象在上一节中那样的算子；亦就是說，$A(t_0)$, $B(t_0)$, $k_1(t_0, t)$, $k_2(t_0, t)$ 由公式(113.13)，(113.14)确定. 但是，在右端这一次是

$$\begin{aligned}&C(t_0)=0,\ 当\ t_0\in L'\ 时,\quad C(t_0)=C_j,\ 当\ t_0\in L_j''\ 时,\\ &\alpha(t_0)=0,\ 当\ t_0\in L'\ 时,\quad \alpha(t_0)=\alpha_j,\ 当\ t_0\in L_j''\ 时,\end{aligned}\tag{114.15}$$

此处，提醒一下，C_j 是实常数，而 α_j 一般是复常数，这些常数都留待确定.

我們暫时任意地取定常数 C_j, $j=1, 2, \cdots, p$, 并且在 h_{2p} 类中找方程(114.14)的解.

可解性条件具有形式(§ 112)

---

① 只要下面所引进的函数 $\omega(t)$ 是属于 h_{2p} 类的，这一个条件便是满足的.

$$\operatorname{Re}\int_L [f(t)+itC(t)+\alpha(t)]\sigma_j(t)dt=0, \quad j=1,\,2,\,\cdots,\,2p, \tag{114.16}$$

其中 $\sigma_j(t)$, $j=1, 2, \cdots, 2p$ 是方程 $\mathbf{K}'\sigma=0$ 在 $h_0=h'_{2p}$ 类中綫性无关(在狭义意义下的)解的完备系.

引进記号 $\alpha_k=\gamma_k+i\gamma_{k+p}$, 此处 γ_k, γ_{k+p} 都是(实)常数，我們得出关于 γ_k, $k=1, 2, \cdots, 2p$ 的(实)綫性方程組

$$\sum_{k=1}^{2p} A_{jk}\gamma_k=B_j, \quad j=1,\,2,\,\cdots,\,2p, \tag{114.17}$$

其中系数 A_{jk} 旣与 $f(t)$ 无关，又与 C_k 无关，而

$$B_j=-\operatorname{Re}\left[\int_L f(t)\sigma_j(t)dt+i\sum_{k=1}^{2p} C_k\int_{L''_k} t\sigma_j(t)dt\right], \quad j=1,\,2,\,\cdots,\,2p.$$

我們証明，方程組(114.17)的行列式是异于零的．事实上，假定 $f(t)=0$, 并且所有 $C_k=0$. 那么，在方程組(114.17)中，所有 $B_j=0$. 假定 γ_k^0, $k=1, 2, \cdots, 2p$ 是这一組方程的任意解．那么，当 $f(t)=0$, $C_k=0$, $\alpha_k=\alpha_k^0=\gamma_k^0+i\gamma_{k+p}^0$, $k=1, 2, \cdots, p$ 时，方程(114.14)在 h_{2p} 类中是可解的．假定 $\omega_0(t)$ 是它的解，而 $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ 是由公式(114.13)所确定的对应的函数．那么，我們有

$$\begin{gathered} \varphi_0(t)+t\overline{\varphi'_0(t)}+\overline{\psi_0(t)}=0, \quad \text{当 } t\in L' \text{ 时}, \\ -\varkappa\varphi_0(t)+t\overline{\varphi'_0(t_0)}+\overline{\psi_0(t)}=\alpha_k^0, \quad \text{当 } t\in L'_k \text{ 时}, \\ k=1,\,2,\,\cdots,\,p. \end{gathered} \tag{114.18}$$

現在令

$$\varkappa\varphi_0(z)-z\overline{\varphi'_0(z)}-\psi_0(z)=2\mu(u_0+iv_0),$$

此处 μ 是任一个正常数①，应用上一节中的公式(113.8)②，我們

① 引进因子 2μ, 是为了强調与平面彈性理論的类似之处．例如，可以取 $2\mu=1$, 实际上 Г. Ф. Манджавидзе[3] 便是那样来处理的．

② 在这个公式中，应取 λ 这样的值，使得

$$\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}=\varkappa, \qquad \text{亦就是}, \qquad \lambda=\frac{3-\varkappa}{\varkappa-1}\mu$$

成立；我們回想起，$\varkappa-1>0$.

容易断定,在整个区域 S 内

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}=\frac{\partial v_0}{\partial y}=\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}=0.$$

由此知道①,

$$-\varkappa\varphi_0(z)+z\overline{\varphi_0'(z)}+\overline{\psi_0(z)}=i\varepsilon z+\delta,$$

其中 ε 是实常数,而 δ 一般是复常数. 但是,此时从公式(114.18)的第二个得出,$\varepsilon=0$ 和

$$\alpha_1^0=\alpha_2^0=\cdots=\alpha_p^0=\delta=-(1+\varkappa)\beta;$$

我們引进新的常数 β 替代 δ, 是为了能对下面的各个公式作一些簡化.

如果令 $\psi_*(z)=\psi_0(z)-\bar{\delta}$, 以函数 $\psi_*(z)$ 替代函数 $\psi_0(z)$, 則边值問題(114.18)(从外表形式)可以变形. 此时,我們可以归結为問題

$$\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_*(t)}=-\delta \quad 在 L' 上,$$
$$-\varkappa\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_*(t)}=0 \quad 在 L'' 上,$$

亦就是,归結为平面彈性理論中下列特殊情形(参看上一节):在有一部分边界上外应力等于零,在其他部分边界上位移等于零(此处 $\varkappa$ 具有别的意义,但是,这并不重要). 依据对应的唯一性定理以及边界条件(114.18)的形式,容易由此作出結論:

$$\varphi_0(z)=\beta, \qquad \psi_0(z)=-\bar{\beta},$$

从而,再依据公式(114.13)

$$\beta=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega_0(t)\,dt}{t-z},$$

$$-\bar{\beta}=-\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega_0(t)}\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar{t}\omega_0'(t)\,dt}{t-z}.$$

由此,完全类似于上一节中对于公式(113.26)所作过的推导,我們导出,$\beta=0$, 亦就是說,所有 $\gamma_k^0=0$.

这样一来,我們証明了,方程組(114.17)的行列式异于零. 从

① 与在平面彈性理論中所有形变分量(从而应力分量)等于零的情形作一比較.

而，总可以选取这样的常数 α_k，使得方程 (114.14) 在 h_{2p} 类中是可解的．

找出了这一个解 $\omega(t)$ 以后(这个解綫性地依賴于暫时任意取定的实常数 C_k)，我們作函数

$$w_*(x, y)=\mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z)+\chi(z)]+w_0(x, y),$$

$$\chi(z)=\int\psi(z)dz,$$

此处函数 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 由公式(114.13)确定．

这样一来，所作出的函数 $w_*(x, y)$ 适合方程(114.1)以及边界条件

$$\mathbf{M}w_*=\mathbf{N}w_*=0,\quad 在\ L''\ 上,$$

$$\frac{dw_*}{dn}=0,\quad w_*=\rho_k\quad 在\ L'_k\ 上,\quad k=1, 2, \cdots, p,$$

其中 ρ_k 是某些实常数．

我們現在这样选取常数 C_k，使得

$$\rho_1=\rho_2=\cdots=\rho_p,\quad \mathrm{Im}\,\varphi'(z_0)=0 \tag{114.19}$$

成立，其中 z_0 是在区域 S 内任意取定的点；条件(114.19)中的后一个条件并不重要①；我們引进这一个条件是为了消除在选擇常数时多余的任意性．

如果我們可以满足条件(114.19)，那么，函数 $w=w_*-\rho$ 是所提問題的解，此处 ρ 是常数 ρ_k 的共同値．

容易看出，条件(114.19)可以归結为关于未知量 C_k 的(实)綫性方程組

$$\sum_{k=1}^{p}A_{jk}^0C_k=B_j^0,\quad j=1, 2, \cdots, p, \tag{114.20}$$

其中的系数 A_{jk}^0 与函数 $q(x, y)$ 无关，而自由項 B_j^0 仅与这一个函数有关，并且当 $q(x, y)\equiv0$ 时 $B_j^0\equiv0$②．

---

① 把 $\varphi(z)$ 用 $\varphi(z)+Ciz$ 替代(此处 C 为实常数)，显然，并不影响函数 $w_*(x,y)$．

② 正象早就約定过的那样，我們认为，特解 $w_0(x, y)$ 如此选取，使当 $q(x, y)\equiv0$ 时 $w_0(x, y)\equiv0$；例如，可以选特解(114.4)．

我們証明,方程組(114.20)总是可解的,亦就是要証明,它的行列式异于零.

实际上,假定 $q(x, y)\equiv 0$. 那么,在这組方程中,所有 $B_j^0=0$,从而这个方程組变成了齐次方程組. 假定 C_k^0, $k=1, 2, \cdots, p$ 是它的任一解,又假定 $\varphi^0(z)$ 及 $\psi^0(z)$ 是函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 对应于这个解的值. 那么,依据在 2° 段中証明过的唯一性定理,并注意到条件 $\operatorname{Im}\varphi^{0\prime}(z_0)=0$,我們断言,$\varphi^0(z)=$常数,$\psi^0(z)=$常数. 另一方面,在 L_j'', $j=1, 2, \cdots, p$ 上,等式

$$-\varkappa\varphi^0(t)+t\overline{\varphi^{0\prime}(t)}+\overline{\psi^0(t)}=itC_k^0+\alpha_k^0$$

是成立的,由此就知道,所有 C_k^0 都等于零.

因此,与方程組(114.20)所对应的齐次方程組沒有非零解. 于是,方程組(114.20)总是单值可解的,并且由它的解可以导出原来問題的解.

§115. 某些估計式[①]

在前面两节中,为了不破坏叙述的連貫性,我們放过了某些公式的适用性的进一步的严格的理論基础:例如积分公式(113.7),(113.8),(114.8),公式(113.11a),(113.11b)以及另一些别的公式. 我們现在推导某些估計式,这些估計式提供了这样的理論基础;我們比較仔細地討論到在 §113 中所考虑过的問題,而对于在 §114 中的問題仅簡单地說明一下.

我們考虑出现在方程(113.12)或者(114.14)中的算子

$$\mathbf{k}\,\omega\equiv\int_L k_1(t_0, t)\omega(t)dt+\int_L\overline{k_2(t_0, t)}\overline{\omega(t_0, t)dt}, \qquad (115.1)$$

此处

$$k_1(t_0, t)=\frac{\varkappa}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\left[\ln\frac{\bar t-\bar t_0}{t-t_0}\right],\quad k_2(t_0, t)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\bar t-\bar t_0}{t-t_0}\right]. \qquad (115.2)$$

① Г. Ф. Манджавидзе[3].

我們将假定，曲綫 L 上点 t 的坐标 x, y 具有适合 $H(1)$ 条件（亦就是，Lepschitz 条件）的 m 阶导函数（在 §113 中 $m=2$，而在 §114 中 $m=3$）．

現在引进記号

$$F(t_0, t)=\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0}.$$

依据 §7 中的結果，函数 $F(t_0, t)$ 具有 m 阶导函数，这些导函数都可以表成形式

$$\frac{a(t_0, t)}{|t-t_0|^{\lambda}},$$

此处 λ 是适合条件 $0<\lambda<1$ 的任意常数，而 $a(t_0, t)$ 是属于 H 类的函数．

現在假定 $\omega(t)$ 是 H^* 类中的某个函数．令

$$\eta(t_0)=\int_L \frac{\partial F(t_0, t)}{\partial t}\,\omega(t)\,dt;$$

函数 $\eta(t_0)$ 具有 $m-1$ 阶导函数

$$\eta^{(m-1)}(t_0)=\int_L \frac{\partial^m F(t_0, t)}{\partial t\,\partial t_0^{m-1}}\,\omega(t)\,dt,$$

依据和在 §51 起首所进行过的类似的推理，不难相信，$\eta^{(m-1)}(t_0)$ 是属于 H 类的． 另外，又若函数 $\omega(t)$ 是連續的，并且具有属于 H^* 类的导函数 $\omega'(t)$，那么，通过分部积分法得出的公式

$$\eta^{(m-1)}(t_0)=-\int_L \frac{\partial^{m-1} F(t_0, t)}{\partial t_0^{m-1}}\,\omega'(t)\,dt,$$

表明导函数 $\eta^{(m)}(t_0)$ 亦存在，且导函数 $\eta^{(m)}(t_0)$ 亦是属于 H 类的．

由上面所指出的結果直接导出，当函数 $\omega(t)$ 是属于 H^* 类时，函数 $\mathbf{k}\omega$ 具有属于 H 类的 $m-1$ 阶导函数，而如果函数 $\omega(t)$ 是連續的并且具有属于 H^* 类的导函数 $\omega'(t)$，則函数 $\mathbf{k}\omega$ 具有属于 H 类的 m 阶导函数．

我們首先討論 §113 中的情形（提醒一下，在这种情形，$m=2$）．假定 $\omega(t)$ 是方程 (113.12)，亦就是，方程

$$\mathbf{K}\,\omega \equiv \mathbf{K}^0\,\omega + \mathbf{k}\,\omega = f(t_0) + C(t_0) \tag{115.3}$$

在 h_{2p} 类中的解,其中 $C(t)=C_k$,在 L'_k 上,$k=1,2,\cdots,p$,$C(t)=0$,在 L'' 上. 那么,函数 $\omega(t)$ 亦是方程

$$\mathbf{K}^0\,\omega \equiv A(t_0)\,\omega(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0} = f_0(t_0) \tag{115.4}$$

在 h_{2p} 类中的解,在方程(115.4)中,我們把右端

$$f_0(t_0) = f(t_0) + C(t_0) - \mathbf{k}\,\omega \tag{115.5}$$

当作是已知的.

我們认为, 已知函数 $f(t)$ 是属于 H_0 类的, 而 $f'(t)$ 对結点 a_k, b_k, $k=1, 2, \cdots, p$ 是属于 H^* 类的. 因此, $f_0(t)$ 及 $f'_0(t)$ 分别是属于同样的类的.

在无穷远处取值零的分区全純函数

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-z}$$

是联結問題

$$\varphi^+(t) = G(t)\,\varphi^-(t) + g(t) \tag{115.6}$$

在 h_{2p} 类中的解,其中

$$G(t) = \frac{A(t)-B(t)}{A(t)+B(t)} = \begin{cases} -\varkappa & \text{当 } t\in L' \text{ 时}, \\ 1 & \text{当 } t\in L'' \text{ 时}, \end{cases} \tag{115.6a}$$

又

$$g(t) = \frac{f_0(t)}{A(t)+B(t)} = \begin{cases} f_0(t) & \text{当 } t\in L' \text{ 时}, \\ -\dfrac{f_0(t)}{\varkappa} & \text{当 } t\in L'' \text{ 时}. \end{cases} \tag{115.6b}$$

这样一来,利用联結問題之解的公式,我們有

$$\varphi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)\,(t-z)}, \tag{115.7}$$

此处,仍然有

$$X(z) = \prod_{k=1}^{p} (z-a_k)^{\frac{1}{2}+i\beta}(z-b_k)^{\frac{1}{2}-i\beta}, \quad \beta = \frac{\ln\varkappa}{2\pi}. \tag{115.8}$$

依据 §26 中的結果,对于曲綫 L 上的所有点 t, 边值 $\varphi^+(t)$ 及

$\varphi^-(t)$是存在的,并且属于 H 类,因此,函数 $\omega(t)=\varphi^+(t)-\varphi^-(t)$ 亦是属于这一个类的①.

我們現在引进下列函数来討論:

$$\varphi_k(z)=(z-c_k)\varphi(z), \tag{115.9}$$

其中 c_k, $k=1, 2, \cdots, 2p$ 是点 a_j 及 b_j 中的一个点. 函数 $\varphi_k(z)$ 在无穷远处是有界的,并且它是边值問題

$$\varphi_k^+(t)=G(t)\varphi_k^-(t)+(t-c_k)g(t) \tag{115.10}$$

在 h_{2p} 类中的解;因此,

$$\varphi_k(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L\frac{(t-c_k)g(t)dt}{X^+(t)(t-z)}. \tag{115.11}$$

我們用 $\sigma_k=\alpha_k\beta_k$ 表示曲綫 L 的某一条包含点 c_k 而不包含其他結点的弧.

将前一个表示式微分,再經过一些簡单变换以后,我們得出

$$\begin{aligned}
&\varphi_k'(z)-\varphi(z)\\
&=(z-c_k)\varphi(z)\sum_{r=1}^{2p}{}'\frac{\dfrac{1}{2}+i\nu_r}{z-c_r}\\
&\quad+\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L-\sigma_k}\frac{\left(i\nu_k-\dfrac{1}{2}\right)g(t)dt}{X^+(t)(t-z)}\\
&\quad-\frac{X(z)}{2\pi i}\left[\frac{(t-c_k)g(t)}{X^+(t)(t-z)}\right]_{t=\alpha_k}^{t=\beta_k}\\
&\quad+\frac{X(z)}{2\pi i}\frac{d}{dz}\int_{L-\sigma_k}\frac{(t-c_k)g(t)dt}{X^+(t)(t-z)}\\
&\quad+\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{\sigma_k}\frac{t-c_k}{X^+(t)}\left[-\sum_{r=1}^{2p}{}'\frac{\dfrac{1}{2}+i\nu_r}{t-c_r}g(t)+g'(t)\right]\frac{dt}{t-z},
\end{aligned} \tag{115.12}$$

① 从 § 26 中有关一般情形的結果,直接导出,$\varphi^+(t)$ 及 $\varphi^-(t)$ 是属于 H_0 类的. 但是,在現在的情形下(結点处有两条弧相遇),可以应用公式(26.24),只要进行必要的簡单計算,由此公式就知道,$\varphi^+(t)$ 及 $\varphi^-(t)$ 亦是属于 H 类的. 但是,从 § 103, 2° 段末尾所指出的結果,更簡单地可以导出有关 $\omega(t)$ 是属于 H 类的結論.

其中 $\nu_r=\pm\beta$；和号上加撇表示，指标为 $r=k$ 的項应該省略掉.

容易看出，公式(115.12)右端的前面四項，可以从 L 的两側連續拓展到整个 σ_k 上(包括点 c_k 在內)；它們的边值在 σ_k 上都适合 H 条件，并且在点 c_k 处它們都等于零；依据 § 26 中的結果，对于最后一項亦可以得出同样的結果.

因此，从等式(115.12)导出，$\varphi_k'^{+}(t)$，$\varphi_k'^{-}(t)$ 在 L 上适合 H 条件，除此而外，还有

$$\varphi_k'^{+}(c_k)=\varphi^{+}(c_k),\quad \varphi_k'^{-}(c_k)=\varphi^{-}(c_k).$$

同样从等式

$$\varphi'(z)=\frac{\varphi_k'(z)-\varphi(z)}{z-c_k}$$

可以断定，$\varphi'^{+}(t)$ 及 $\varphi'^{-}(t)$ 在 σ_k 上是属于 H^* 类的 (間断点只是 c_k).

因为我們可以把 c_k 理解为点 a_k 及 b_k 中的任何一点，因此显然，对結点 a_k, b_k, $k=1, 2, \cdots, p$, $\varphi'^{+}(t)$ 及 $\varphi'^{-}(t)$ 都是 L 上的 H^* 类函数. 再者，当点 z 从 L 之左側或者右側趋于 L 上的点 t 时，只要假定这一个点不在由中心在点 a_k 及 b_k 处，半徑为任意小的圓周在 L 上所截下的各段弧上，函数 $\varphi'(z)$ 便显然一致地趋于其极限 $\varphi'^{+}(t)$ 或者 $\varphi'^{-}(t)$. 因此，容易看出，在异于 a_k 及 b_k 的点处，

$$\varphi'^{+}(t)=\varphi^{+\prime}(t)=\frac{d\varphi^{+}}{dt},\quad \varphi'^{-}(t)=\varphi^{-\prime}(t)=\frac{d\varphi^{-}}{dt},$$

并且 $\varphi^{+\prime}(t)$ 及 $\varphi^{-\prime}(t)$ 在 L 上是属于 H^* 类的，于是，函数

$$\omega'(t)=\varphi^{+\prime}(t)-\varphi^{-\prime}(t)$$

在 L 上是属于 H^* 类的.

从上可得，由公式(113.11)中的第二个所确定的函数 $\psi(z)$，可以表成(113.11a)的形式. 由此同时可以导出，对于异于結点的所有点 t，边值 $\psi^{+}(t)$ 存在，并且它属于 H^* 类.

从函数 $\omega(t)$ 的上面已經証明过的性质，还可以导出公式(113.11b)之正确性.

現在轉到表示式

$$\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)},\quad -\varkappa\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)},\quad (115.13)$$

它們的边值出現在条件(113.9)之中，我們可以得出更多的結論，亦就是說，它們可以連續拓展到边界的所有点上，并且它們的边值是属于 H 类的．事实上，对于包含 $\varphi(z)$ 的第一項已經証明过．現在我們討論和式 $z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}$，这个和式剛好是表示式 $\bar{z}\varphi'(z)+\psi(z)$ 取复值共軛的結果．依据公式(113.11a)及(113.11b)，我們有

$$\bar{z}\varphi'(z)+\psi(z)=-\frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega(t)}\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{(\bar{z}-\bar{t})\,\omega'(t)\,dt}{t-z}.$$

右端第一項具有所要求的性质．如果又一次用 $\bar{c}$ 来表示点 a_k 及 b_k 中的任一个点，那么，我們有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{(\bar{z}-\bar{t})\,\omega'(t)\,dt}{t-z}=\frac{\bar{z}-\bar{c}}{2\pi i}\int_L\frac{\omega'(t)\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{(\bar{c}-\bar{t})\,\omega'(t)\,dt}{t-z},$$

在这以后，考虑到 $\omega'(t)$ 是属于 H^* 类的，我們的結果便变成显然的了．

于是，如果在常数 C_k 适当地取定以后，$\omega(t)$ 是方程(113.12)在 h_{2p} 类中的解，那么，表示式(115.13)可以連續拓展到边界的所有各点上，并且它們的边值是适合条件(113.9)的，因此，利用 $\omega(t)$ 由公式(113.11)所确定的函数 $\varphi(z)$ 及 $\psi(z)$ 給出問題的解①．

但是，对于适当选定的常数 C_k，在証明解 $\omega(t)$ 的存在性过程中，在証明这样选取的可能性时，我們都曾經利用了由积分公式(113.8)所导出的唯一性定理．

現在需要証明，在我們所加的条件下，这个公式是可以应用的．

---

① 在求解混合問題时，我們曾經把 L 上的外应力 X_n，Y_n 的課題，換成为边界值的表示式(113.5)的課題（精确到差一个常数項）．从力学观点来看，完全可以証实这一点．

为了这个目的，必須研究函数 $\varphi''(z)$ 以及表示式 $d[\bar{z}\varphi'(z)+\psi(z)]$ 在边界附近的性质，研究时可以假定 $f(t)=0$，因为我們只在这一个假定下才应用公式(113.8).

于是，我們将假定 $f(t)=0$. 因此，依据 $\omega'(t)$ 是属于 H^* 类的，再依据这一节开始所指出的，函数 $g(t)$，$g'(t)$ 及 $g''(t)$ 都是属于 H_0 类的.

此时，由公式(115.12)直接导出，在点 c_k 的邻域内有

$$|\varphi'(z)|=\left|\frac{\varphi_k'(z)-\varphi(z)}{z-c_k}\right|<\frac{\text{常数}}{|z-c_k|^{\frac{1}{2}}},$$

由此，显然可以得出，在所有結点的邻域內有

$$|\varphi'(z)|<\frac{\text{常数}}{|\Pi(z)|^{\frac{1}{2}}}, \tag{115.14}$$

此处为了簡单起見，已令

$$\Pi(z)=\prod_{k=1}^{p}(z-a_k)(z-b_k). \tag{115.15}$$

我們現在討論函数

$$\varphi_1(z)=\frac{d}{dz}[\Pi(z)\varphi(z)]. \tag{115.16}$$

依据上面所得出的結果，显然，函数 $\varphi_1(z)$ 是边值問題

$$\varphi_1^+(t)=G(t)\varphi_1^-(t)+g_1(t) \tag{115.17}$$

在 h_{2p} 类中的解，其中

$$g_1(t)=\frac{d}{dt}[\Pi(t)g(t)]. \tag{115.18}$$

这样一来，当关于自由項有这同样的条件时，$\varphi_1(z)$ 及 $\varphi(z)$ 都是同样的边值問題的解. 区别只是在于 $\varphi_1(z)$ 在无穷远处可能是 $2p-1$ 阶的，但是，容易看出，这对結果并沒有影响. 因此，特别是，我們有估計式:

$$|\varphi_1'(z)|<\frac{\text{常数}}{|\Pi(z)|^{\frac{1}{2}}},$$

从这个估計式可以得出 $\varphi''(z)$ 的估計式．亦就是，我們有

$$\Pi(z)\varphi''(z)=\varphi_1'(z)-2\varphi'(z)\Pi'(z)-\varphi(z)\Pi''(z),$$

由此可以导出估計式

$$|\varphi''(z)|<\frac{常数}{|\Pi(z)|^{\frac{3}{2}}}.$$

利用这个估計式及其他类似的估計式（我們留待讀者去推导它們），我們可以严格地論証 § 113 中所有的結論．

对于在 § 114 中所討論过的問題，我們可以得出一些类似的估計式．在这个情形下，由所假定的条件，曲綫 L 上的点 t 之坐标 x 与 y 具有适合 $H(1)$ 条件的三阶导函数．通过与前面类似的推理，可以証明，在这些条件下，我們有估計式

$$|\varphi'''(z)|<\frac{常数}{|\Pi(z)|^{\frac{5}{2}}}$$

以及用来严格地論証所有結論的其他类似的估計式，这些我們都留給讀者．

V．关于另一些結果的簡单介紹

在这一部分中，我們給出和这一章中所叙述过的結果有着紧密联系的一系列重要結果之簡单介紹；为使本书篇幅保持在原定的范圍之內，我們不可能比較仔細地討論这些結果．

在涉及到这些結果时，我們首先应該討論已知函数和未知函数所允許的函数类的扩大問題（§ 116）；其次討論特定形式的綫性奇异积分-微分方程（§ 117）．

遺憾的是，我們对有关近似解法的重要問題甚至沒有可能作一簡要的介紹，因此仅指出在这一方面的某些工作：М. А. Лаврентьев[2]，А. И. Каландия[5]，[6]，В. В. Иванов[1]～[3]，И. Д. Софронов[1]，[2]，L. Berg[1]，R. C. MacCamy[1]．

§ 116. 所允許的函数类的扩大問題

1°. 在本书中,我們是在 H^* 类中来找奇异积分方程的解的.我們提醒一下,属于这一个类的函数 $\varphi(t)$ 是由下述两个性质表征着的: a)在有限多个点(結点) c 的邻域內,它具有形式

$$\varphi(t)=\varphi_*(t)(t-c)^{-\gamma},$$

其中 $\varphi_*(t)$在点 c 的邻域內是属于 H_0 类的,而 γ 是常数, $0\leqslant \mathrm{Re}\,\gamma<1$; b)在曲綫 L 的每一个不包含結点的閉的部分上,它适合 H 条件. 我們論到这一类函数,首先是由于,在大多数具有实用价值的問題中,仅討論这一类函数就完全够了;其次,由于限于 H^* 类中来討論,不利用 Lebesgue 积分,便可以成功地得出奇异积分方程的整个理論.

扩大所考虑的奇异积分方程类,而特别是扩大所要找的解的类是有一定价值的. 在这一方面一系列有意义的結果包含在 C. Г. Михлин 的論文[1]~[7]中,在这些論文中,討論了下列一类正則形式的奇异积分方程

$$A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\mathbf{V}\varphi=f(t_0), \quad (116.1)$$

此处自由項 $f(t)$ 及解 $\varphi(t)$ 是属于函数空間 $\mathfrak{L}_2(L)$ 的, $\mathbf{V}$ 是 $\mathfrak{L}_2(L)$ 中的全連續算子, L 是一条具有有界曲率的封閉圍綫. 特別要指出,在 C. Г. Михлин 的論文[6]中,在仅要求系数 $A(t)$ 及 $B(t)$ 是連續的情形下,得出了形式为 (116.1) 的奇异积分方程的一般理論.

显然, H^* 类不是 $\mathfrak{L}_2(L)$ 的子类,这是因为如果函数属于 $\mathfrak{L}_2(L)$类,那么,在結点处, $\varphi(t)$变成无穷大的阶数仅能低于 $\frac{1}{2}$[①]. 因此,当把 H^* 类換成 $\mathfrak{L}_2(L)$ 类时,主要增强了 H^* 类的性质 b)(参看这一节开始),但是,这也主要减弱了 H^* 类的性质 a)(在一

① 而不象 H^* 类的函数那样允許小于 1.

定意义下)．后一个事实在一系列重要情形下大大减弱了解的一般性．例如，在敞开圍綫的情形下，假定解是平方可积的，便要求对方程的系数加上人为的条件．此外，如果限于类 $\mathfrak{L}_2(L)$ 的函数，那么，甚至在一系列具有实际意义的問題中(例如，在彈性理論的問題中)，有时可能会失去更重要的解．

从上所述，如果在扩大解所允許的函数类的意义下，我們希望得出在本书中所叙述过的結果的切实的扩充，至少应該取这样一类解，它包括 H^* 类．相当一般的这样一类，例如，可以是 p 次幂为可积的函数 $(p>1)$，或者在現在的情形下，更恰当的是 $\mathfrak{L}_p(\rho, L)$ 类 (参看 § 27)．Б. В. Хведелидзе[5]~[7], [9]~[11], [15], [18] 曾經在后一个函数类中研究了奇异积分方程．在所提到的这些工作中，特别是，在对已知函数以及未知函数作了相当一般的假定下，給出了(对方程(116.1)的情形的)推广的 Noether 定理的証明．我們引述这个結果．設 L 是有限条簡单的、互不相交的 Ляпунов 封閉弧和 Ляпунов 敞开弧的全体．假定函数 $A(t)$ 和 $B(t)$ 在 L 上可能除了有限个点外处处都是連續的，在这有限个例外的点处可能出現第一类的間断，并且在 L 上处处都有 $A^2(t)-B^2(t)\neq 0$．假定

$$G(t)=\frac{A(t)-B(t)}{A(t)+B(t)},$$

且設 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 是曲綫 L 的所有端点以及函数 $G(t)$ 的所有的間断点．引进記号

$$\alpha_k=n_k-\frac{1}{2\pi}\arg\frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)}, \tag{116.2}$$

此处

$$n_k=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\arg\dfrac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)}, & \text{如果 } \dfrac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)} \text{ 是正的量,}\\[2ex] \left[\dfrac{1}{2\pi}\arg\dfrac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)}\right]+1, & \text{在其他的情形下①.}\end{cases} \tag{116.3}$$

① 符号 $[x]$ 表示数 x 之整数部分．

如果 c_k 是曲綫 L 的一个端点，那么，在(116.2)及(116.3)中，在起点的情形下，应取 $G(c_k-0)=1$，而在終点的情形下，应取 $G(c_k+0)=1$. 显然 $0\leqslant\alpha_k<1$. 最后，假定

$$\rho(t)=\prod_{k=1}^{m}|t-c_k|^{\alpha_k(p-1)}. \tag{116.4}$$

我們現在討論方程(116.1)，在这个方程中，系数 $A(t)$ 及 $B(t)$ 适合上面所提到的条件，自由項 $f(t)$ 属于 $\mathfrak{L}_p(\rho;\ L)$ 类，此处 $p>1$，函数 $\rho(t)$ 是由公式(116.4)确定的，$\mathbf{V}$ 是 $\mathfrak{L}_p(\rho;\ L)$ 中的全連續算子，而解 $\varphi(t)$ 将在这同一类 $\mathfrak{L}_p(\rho;L)$ 中找到. 此时，下述結論是成立的(参看 Б. В. Хведелидзе[18])：I) 方程(116.1)可解的充分和必要条件是

$$\int_L f(t)\psi_j(t)dt=0,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ k',$$

此处 $\psi_j(t)$, $j=1,\ 2,\ \cdots,\ k'$ 是共軛齐次方程①

$$A(t_0)\psi(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{B(t)\psi(t)dt}{t-t_0}+\mathbf{V}^*\psi=0 \tag{116.5}$$

在 $\mathfrak{L}_q(\rho^{1-q};\ L)$类中的綫性无关解的完备系，此处 $q=(p-1)^{-1}p$; II) 如果 k 是与方程 (116.1) 所对应的齐次方程在 $\mathfrak{L}_p(\rho;\ L)$ 类中的綫性无关解的个数，k' 是共軛齐次方程 (116.5) 在 $\mathfrak{L}_q(\rho^{1-q};\ L)$ 类中的綫性无关解的个数，那么，

$$k-k'=\sum_{j=1}^{m}n_j,$$

此处 n_j 是由公式(116.3)确定的整数.

当进一步扩大系数 $A(t)$ 和 $B(t)$ 所容許的函数类时，証明上述定理时会遇到严重的困难(例如，参看 И. Н. Карцивадзе[3]).

最后，我們还要指出一个从本书所涉及的問題的角度来看是更有意义的結果. Б. В. Хведелидзе 証明了，在这一章中所討論

① $\mathbf{V}^*$ 是算子，$\mathbf{V}$ 是共軛算子；在 Б. В. Хведелидзе 的論文[18]中，所定义的共軛算子在本书所討論的情形下和相联算子是一致的.

过的奇异积分方程(亦就是, 方程 (96.11)) 在 H^* 类中以及在 $\mathfrak{L}_p(\rho; L)$类中有同样的解. 問題在于, 事先对未知函数加了这种或者那种条件以后,不作附加的研究, 我們不能够保証, 对于已知問題,我們不致于失去感到兴趣的解. 因此,通常总希望对未知函数所加的限制尽可能少.此外,上面提到的 Б. В. Хведелидзе 的結果說明了,对于在这一本书中所討論的奇异积分方程, H^* 类对于要找的解是所选定的恰当的类.

2°. 在建立一般理論时,我們只討論到了属于正則型的奇异积分方程,亦就是,要求函数 $S(t)=A(t)+B(t)$ 及 $D(t)=A(t)-B(t)$ 在 L 上处处都不取值零. 不属于正則型的方程的性质和正則型的方程的性质有着本质上的不同, 暫时, 在一定程度上,我們还沒有这一种方程的完善的理論. 但是, 在这个方向上已經有了一系列有价值的結果. 从包含这些結果的論文中, 我們指出 Д. И. Шерман 的論文[6], [7] 及 [9]. 在这些論文中所考虑过的(在 L 是一条簡单的封閉圍綫情形下)一个新的正則化方法,在作了一些补充假定以后,对下列情形是适用的: 两个函数 $S(t)$ 和 $D(t)$ 中只有一个在 L 上处处都异于零,而另一个在有限个点处取值零.

与此有关, И. Ц. Гохберг 的論文[3]亦是有价值的, 在这一篇論文中証明了, $S(t)D(t)\neq 0$ (在 L 上) 是奇异积分方程可以利用 Hilbert 函数空間的有界綫性算子允許正則化的充分和必要条件.

3°. 在假定了 L 是有限条簡单的、互不相交的 Ляпунов 封閉弧或者 Ляпунов 敞开弧的全体以后, Б. В. Хведелидзе[18], [19] 引用从本书所用过的方法发展出来的方法指出了, 在下列情形下可以論証本书 §§ 97, 98 中所叙述的結果之正确性:方程(97.1), (98.1)中的函数 $A(t)$ 及 $B(t)$ 是逐段連續的, 函数 $A(t)+B(t)$ 及 $A(t)-B(t)$ 在 L 上处处都异于零, 而右端及要找的解都是属于 $\mathfrak{L}_p(\rho; L)$类的,此处 $p>1$, 而 $\rho(t)$ 是某一个形式为(27.3)的函数.

在 F. Tricomi 的論文[4]中,用了其他方法亦得出了类似的、但是更特殊的結果.

Н. П. Векуа[18] 及 Б. В. Хведелидзе[18] 討論了 $A+B$ 或者 $A-B$ 在曲綫 L 上有阶数小于一的零点的情形,而 Л. А. Чикин[1] 及 Ф. Д. Гахов[10] 則討論了它們之中有一个在曲綫 L 上有整数阶的零点的情形.

在 Т. Г. Гегелия 的論文[1]及[2]中, 給出了在 §§ 97, 98 中所叙述过的結果, 对于相当一般的一类不光滑曲綫 L 的情形的推广.

§ 117. 某些奇异积分-微分方程

很多具有重要实际价值的問題, 都可以归結为下述形式的奇异积分-微分方程:

$$\sum_{r=0}^{m}\left[a_r(t_0)\varphi^{(r)}(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K_r(t_0,\ t)\varphi^{(r)}(t)dt}{t-t_0}\right]=f(t_0), \quad (117.1)$$

此处 $a_r(t)$, $K_r(t_0,\ t)$ 及 $f(t)$ 都是已知函数, $\varphi^{(r)}(t)$ 表示未知函数 $\varphi(t)$ 的 r 阶导函数,并且 $\varphi^{(0)}(t)=\varphi(t)$.

Prandtl 积分-微分方程(翼展机翼理論方程)是这个方程的特殊情形, 很多論文是专題研究和求解 Prandtl 积分-微分方程的, 特别是, 其中 И. Н. Векуа 的論文[9]及 Л. Г. Магнарадзе 的論文[1]所用的方法是与本书所介紹过的方法有着紧密的联系的①.

Л. Г. Магнарадзе[2], [3] 首先研究了形式为 (117.1) 的方程. 在作了如下之假定以后, Л. Г. Магнарадзе 把方程(117.1)归結为等价的奇异积分方程或者已經正則化了的积分方程: $a_r(t)$, $f(t)$ 及 $K_r(t_0,\ t)$ 都是已知的相当多次可微的函数, 而 L 是一条简单的、在一定程度上是正規的封閉圍綫.

① 参看本书末尾的附录六. ——譯者注

在 L 是一条封閉的光滑圍綫，而 $a_r(t)$，$f(t)$ 及 $K_r(t_0, t)$ 都是 H 类的函数的情形下，Ю. М. Крикунов[1], [2], [3] 討論了形式为(117.1)的方程．引进在无穷远处取値零的分区全純函数 $\Phi(z)$：

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z},$$

他把方程(117.1)归結为形式为(81.1)的問題．由于在研究这个問題时，Ю. М. Крикунов 利用了包含未知函数以及它的导函数在点 $z=0$ 的値的积分表示式（点 $z=0$ 位于圍綫 L 的內部），他找出了方程(117.1)适合下列条件的解：

$$\int_L\varphi(t)\,t^{-k-1}dt=r_k,\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1,\qquad(117.2)$$

此处 r_k 都是已給定的常数．他指出了，找方程(117.1)的上述解相当于求解某一个右端包含常数 r_k 的奇异积分方程．

最近，Н. П. Векуа[28] 指出了将方程(117.1)归結为奇异积分方程的一个簡单方法．下面叙述这一个方法．

我們暂时假定 $L=ab$ 是一条敞开的光滑圍綫．引用記号

$$\varphi^{(m)}(t)=\mu(t),$$

我們有

$$\varphi^{(k)}(t)=\int_L\omega_{m-k-1}(t,\ t_1)\,\mu(t_1)\,dt_1+C_1t^{m-k-1}$$
$$+C_2t^{m-k-2}+\cdots+C_{m-k},\qquad(117.3)$$

其中

$$\omega_0(t,\ t_1)=1,\quad 如果\ t_1\in at,$$
$$\omega_0(t,\ t_1)=0,\quad 如果\ t_1\overline{\in}\,at,$$
$$\omega_{k-1}(t,\ t_1)=\int_L\omega_0(t,\ t_2)\,\omega_{k-2}(t_2,\ t_1)\,dt_2,$$
$$k=2,\ 3,\ \cdots,\ m,$$

C_1, C_2, $\cdots$, C_m 都是任意常数．

把这一些値代入(117.1)之中，我們便得出关于 $\mu(t)$ 的形式为

$$\mathbf{K}\,\mu \equiv a_m(t_0)\mu(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_m(t_0,\ t)\mu(t)\,dt}{t-t_0}+\int_L k(t_0,\ t)\mu(t)\,dt$$
$$=f(t_0)-\sum_{k=1}^{m} C_k \chi_k(t_0) \qquad (117.4)$$

的奇异积分方程,其中

$$k(t_0,\ t)=\sum_{k=0}^{m-1} a_k(t_0)\,\omega_{m-k-1}(t_0,\ t)$$
$$+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_k(t_0,\ \tau)\,\omega_{m-k-1}(\tau,\ t)\,d\tau}{\tau-t_0},$$

而 $\chi_k(t_0)$, $k=1,2,\cdots,m$ 都是确定的函数,容易写出它們的值. 由此推出下列結果:

如果对于常数 C_k, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ m$ 的任何値,函数 $\mu(t)$ 是方程(117.4)的解,那么,由公式(117.3)所确定的函数 $\varphi(t)$ 給出原来方程(117.1)的解. 显然,反过来,如果 $\varphi(t)$ 是方程(117.1)的解,那么,$\varphi^{(m)}(t)=\mu(t)$ 給出方程(117.4)的解(当然,这是对于确定的常数値 $C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_m$ 而言的).

利用上面所导出的一些結果, Н. П. Векуа[31] 給出了形如(117.1)的奇异积分-微分方程的 Cauchy 問題的解.

这个方法显然亦可以应用到这样的情形: L 是一条封閉的光滑圍綫,但是,在这种情形下,应該注意到,由公式(117.3)以 $\varphi^{(m)}(t)=\mu(t)$ 所确定的函数 $\varphi^{(k)}(t)$, $k=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1$, 一般讲来,可能是多值的; 因此,利用方程(117.4)的解,亦可以得出方程(117.1)的这样的解,这种解在圍綫 L 的某些定点处可能出現第一类的間断性.但是,容易看出,如果方程(117.1)有单值的連續解存在,則利用方程(117.4)的解,总可得出方程(117.1)的这样的解来.

对于下列形式的奇异积分-微分方程

$$\sum_{r=0}^{m}\left\{a_r(t_0)\varphi^{(r)}(t_0)+b_r(t_0)\overline{\varphi^{(r)}(t_0)}+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_r(t_0,\ t)\,\varphi^{(r)}(t)\,dt}{t-t_0}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M_r(t_0,\ t)\,\overline{\varphi^{(r)}(t)}\,dt}{t-t_0}\right\}=f(t_0)$$

亦有类似的結果,其中 $\overline{\varphi^{(k)}(t)}$ 是 $\varphi^{(k)}(t)$ 的复値共軛函数.

Р. С. Исаханов[1] 在一条封閉圍綫的情形下,研究了方程(117.1)①. 正象 Ю. М. Крикунов 所考慮的那样,他把方程归結为形式为(81.1)的問題,但是,与那一位著者不同,他沒有对方程(117.1)的解加补充条件(117.2). 他証明了,方程(117.1)的每一个解都可以由下列公式給出:

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L[Q(t_0,\ t)-T(t_0,\ t)]\mu(t)\,dt, \qquad (117.5)$$

此处 $Q(t_0,\ t)$, $T(t_0,\ t)$ 都是确定的函数,而 $\mu(t)$ 是下列形式的奇异积分方程的解:

$$\mathbf{K}\mu\equiv\frac{a_m(t)}{t_0^m}\mu(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K_m(t_0,\ t)\mu(t)\,dt}{t^m(t-t_0)}$$

$$+\int_L k(t_0,\ t)\mu(t)\,dt=f(t_0).$$

Р. С. Исаханов[4] 还証明了,如果函数

$$\frac{d^r a_r(t)}{dt^r},\quad \frac{\partial^r K_r(t_0,\ t)}{\partial t_0^k\partial t^{r-k}},\quad r=0,\ 1,\ \cdots,\ m;\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ r,$$

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}\left[\frac{K_m(t_0,\ t)-K_m(t_0,\ t_0)}{t-t_0}\right]$$

在 L 上均适合 H 条件,那么,对于方程(117.1),成立着与 Noether 定理类似的定理,在这些定理中,出現的方程

$$\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\left\{[a_r(t_0)\psi(t_0)]^{(r)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\left(\frac{\partial}{\partial t_0}+\frac{\partial}{\partial t}\right)^r K_r(t,\ t_0)\psi(t)}{t-t_0}\,dt\right\}=0$$

作为(117.1)的相联方程.

---

① 有关当 L 是一些敞开圍綫的全体的情形以及間断系数情形的結果,参看 Р. С. Исаханов[2],[3].

第六章

奇异积分方程組和若干个未知函数的联結問題

这一章将致力于把有关具有 Cauchy 型核的奇异积分方程和联結問題的結果，推广到若干个未知函数的情形的工作．此处我們仅討論封閉圍綫和連續系数的情形，至于其他更一般的情形，我們仅指出参考文献．

如果把奇异积分方程組的指标定义为已給的齐次方程組解的个数和相联方程組解的个数之差，那么，在引进了适当的記号以后，几乎自动地便可以把单个奇异积分方程有关的結果移植到方程組的情形，在本章下面第一部分中实际上就是这样做的．

然而，就指标的明确表示式的推导而言，事情并不是如此．正象单个方程的情形那样，这个表示式和对应的联結問題的解是有联系的．

和单个未知函数的情形大不相同，若干个未知函数的联結問題不可能完整地解出，当然，这是指一般情形而言的．

本章的第二部分将从事研究若干个未知函数的联結問題的求解．此处主要是利用在第一部分中已得出的有关奇异积分方程組的結果而得出其解的．最后，在第三部分中，将利用对于联結問題已經得出的結果，更深入地研究奇异积分方程

組①.

I. 奇异积分方程組

正如剛才所指出过的那样，很簡单地便可以把有关单个奇异积分方程的基本定理(所指的是在第二章中已經証明过的定理)推广到这一类方程的方程組的情形.

在§§ 119, 120 中給出的这个推广是著者的論文[7]中的結果用著者論文[8]的結果作了补充以后,不作任何重大修改的轉載.

从发表在上述我的論文之前的著作中，我們首先应該提到的是由 Н. П. Векуа 完成的著作(在后面§136中我們要讲到这个著作)以及 G. Giraud 的論文[2]，在后一篇論文中 Giraud 給出了正則化算子的一个作法，这个作法本质上和§119中所指出的作法是一致的②,但是，它要稍欠一般一些，Giraud 还証明了与§120中定理1是一致的定理③.

§118. 某些記号和术語④

1°. 以后我們会遇到給定在某些曲綫上的或者給定在某些区域上的 n 个函数 $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n$ 的全体. 我們把这种函数的全体

---

① 在本书第一版中叙述的次序和方法与此处是不同的. 在那里首先解决若干个未知函数的联結問題，在求解那个問題时并不利用奇异积分方程組的理論，而象 J. Plemelj 所做的那样,通过把問題化为 Fredholm 方程来求解(关于这一点可以参考§122)，接着叙述了奇异积分方程組的理論. 在这一版中所采用的方法比那种方法要簡单得多.

② 由公式(119.20)，(119.21)所确定的这个算子，在著者的論文[7]中已指出过,是正則化算子的最一般形式.

③ 在引証过的 G. Giraud 的論文中，还包含了一系列其他的和单个方程的情形以及方程組的情形有关的結果. 这些結果主要涉及到了解对参数 λ 的依存关系；在§59, 4°段中曾經讲到过这些結果.

④ 在这一节中，我們部分地重复了在§110中給出过的某些定义(在那里是对 $n=2$ 的特殊情形給出的，但是，这是无关紧要的)

叫做向量,并且用一个字母Φ表示它;我們可以写出

$$\Phi=(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n) \tag{118.1}$$

并且把$\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n$叫做向量$\Phi$的支量.

考虑綫性变换

$$\begin{aligned}
\Psi_1&=A_{11}\Phi_1+A_{12}\Phi_2+\cdots+A_{1n}\Phi_n,\\
\Psi_2&=A_{21}\Phi_1+A_{22}\Phi_2+\cdots+A_{2n}\Phi_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Psi_n&=A_{n1}\Phi_1+A_{n2}\Phi_2+\cdots+A_{nn}\Phi_n
\end{aligned}$$

或者簡单地写成

$$\Psi_\alpha=\sum_{\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}\Phi_\beta, \quad \alpha=1, 2, \cdots, n, \tag{118.2}$$

其中$A_{\alpha\beta}$都是与Φ一样給定在同一条曲綫上或者同一个区域上的函数. 通常我們把这个变换簡单地写成

$$\Psi=A\Phi, \tag{118.3}$$

其中$\Phi=(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n)$, $\Psi=(\Psi_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_n)$都表示向量,而$A$是以$A_{\alpha\beta}(\alpha, \beta=1, 2, \cdots, n)$为元素的一个矩陣

$$A=\|A_{\alpha\beta}\|=\left\|\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}\end{matrix}\right\|. \tag{118.4}$$

用$\det A=\det\|A_{\alpha\beta}\|$表示矩陣$A$的行列式. 如果$\det A\neq 0$, 那么,我們便把矩陣$A$叫做是非退化矩陣(滿秩矩陣).

我們把和式$\Phi_1\Psi_1+\Phi_2\Psi_2+\cdots+\Phi_n\Psi_n$叫做两个向量$\Phi=(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n)$和$\Psi=(\Psi_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_n)$的乘积. 这个乘积有时称做內积,我們用$\Phi\Psi$或者$\Psi\Phi$表示它,因此,有

$$\Phi\Psi=\Psi\Phi=\Phi_1\Psi_1+\Phi_2\Psi_2+\cdots+\Phi_n\Psi_n. \tag{118.5}$$

通常,当

$$C_{\alpha\beta}=\sum_{\gamma=1}^{n}A_{\alpha\gamma}B_{\gamma\beta}\quad(\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

时，我們把矩陣 $C=\|C_{\alpha\beta}\|$ 叫做两个矩陣 $A=\|A_{\alpha\beta}\|$ 和 $B=\|B_{\alpha\beta}\|$ 的乘积 $C=AB$.

我們把由矩陣 A 将行与列互換而得出的矩陣叫做 A 的轉置矩陣，并且用 $A'=\|A'_{\alpha\beta}\|$ 表示它，于是 $A'_{\alpha\beta}=A_{\beta\alpha}$. 容易驗証，对于任意两个向量都有

$$\Psi A\Phi=\Phi A'\Psi,\tag{118.6}$$

这里把 $\Psi A\Phi$ 理解为向量 Ψ 与向量 $A\Phi$ 的乘积（对右端亦类似地理解）.

再提醒一下大家所熟悉的一些关系式：

$$(AB)'=B'A',\tag{118.7}$$

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1},\quad(A^{-1})'=(A')^{-1};\tag{118.8}$$

在公式(118.8)中假定了，矩陣 A 和 B 都是非退化矩陣，亦就是說，它們的行列式都是异于零的．我們通常把 $(A')^{-1}$ 写成 A'^{-1}.

2°. 当讲到某一个矩陣是連續的，是属于 H 类的，是分区全純的，取确定的边値，在无穷远处是有限阶的等等时，我們是指（有时不特別声明这一点），这个矩陣所有的元素都适合所指的条件．对向量亦作类似的理解.

3°. 今后（如果不作相反的声明）我們把 L 理解为有限条光滑的、沒有公共点的封閉圍綫的全体，在这些圍綫上都已經选定了确定的正方向.

§119. 基本定义和輔助命題[①]

1°. 今后，我們把下述形式的方程組叫做奇异积分方程組

$$\sum_{\beta=1}^{n}A_{\alpha\beta}(t_0)\varphi_\beta(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L\sum_{\beta=1}^{n}\frac{K_{\alpha\beta}(t_0,t)\varphi_\beta(t)\,dt}{t-t_0}=f_\alpha(t_0)$$

$$(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\tag{119.1}$$

① 与§§45，46作一比照.

其中 t_0, t 是 L 上点的附标，$A_{\alpha\beta}(t)$，$K_{\alpha\beta}(t_0,t)$ 及 $f_\alpha(t)$ 都是給定在 L 上的 H 类函数，$\varphi_\alpha(t)$ 是未知函数，我們要求 $\varphi_\alpha(t)$ 都是属于 H 类的.

我們用 $\varphi(t)$ 和 $f(t)$ 分别表示支量为 $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\cdots$, $\varphi_n(t)$ 和 $f_1(t)$, $f_2(t)$, $\cdots$, $f_n(t)$ 的向量:

$$\varphi(t)=(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n), \; f(t)=(f_1, f_2, \cdots, f_n), \tag{119.2}$$

用 $A(t)$ 及 $K(t_0, t)$ 分别表示元素为 $A_{\alpha\beta}(t)$ 和 $K_{\alpha\beta}(t_0, t)$ 的矩陣，另外，我們再引进矩陣 $B(t)=K(t, t)$，因此，按定义有

$$\begin{gathered} A(t)=\|A_{\alpha\beta}(t)\|, \quad B(t)=\|B_{\alpha\beta}(t)\|, \\ K(t_0, t)=\|K_{\alpha\beta}(t_0, t)\|, \end{gathered} \tag{119.3}$$

并且

$$B_{\alpha\beta}(t)=K_{\alpha\beta}(t, t). \tag{119.4}$$

利用上述的記号，方程組(119.1)可以改写成

$$\mathbf{K}\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t_0, t)\varphi(t)dt}{t-t_0}=f(t_0) \tag{119.5}$$

或者还可以写成

$$\mathbf{K}\varphi=K^0\varphi+k\varphi=f(t_0), \tag{119.6}$$

其中

$$\mathbf{K}^0\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}$$

及

$$\mathbf{k}\varphi\equiv\frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0, t)\varphi(t)dt, \tag{119.7}$$

并且

$$k(t_0, t)=\frac{K(t_0, t)-K(t_0, t_0)}{t-t_0}=\frac{K(t_0, t)-B(t_0)}{t-t_0}. \tag{119.8}$$

容易看出，

$$k(t_0, t)=\frac{k^*(t_0, t)}{|t-t_0|^\alpha}, \quad 0\leqslant\alpha<1, \tag{119.9}$$

其中 $k^*(t_0, t)$ 是属于 H 类的矩陣（亦就是說，它的元素都是属于

H 类的).

我們把算子 $\mathbf{K}$ 叫做是具有 Cauchy 型核的奇异积子算子，或者簡称做奇异算子. 这个算子把 H 类中每一个向量 $\varphi(t)$ 变成也是属于 H 类的向量 $\mathbf{K}\varphi$.

我們把算子 $\mathbf{K}^0$ 叫做算子 $\mathbf{K}$ 的特征部分.

我們把方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 叫做奇异积分方程；这个方程所表示的正好和方程組(119.1)所表示的是同样的. 今后，要是方便，我們便同时应用"方程"和"方程組"这两个术語.

我們把方程 $\mathbf{K}^0\varphi=f$ 叫做与方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 对应的特征方程.

有时我們单独地討論形式为 $\mathbf{K}^0\varphi=f$ 的方程，并把它簡单地叫做特征方程或者特征方程組.

我們把矩陣

$$S=A+B,\quad D=A-B \tag{119.10}$$

叫做算子 $\mathbf{K}$ 或者 $\mathbf{K}^0$ 以及方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 或者 $\mathbf{K}^0\varphi=f$ 的主矩陣. 如果在 L 上处处有

$$\det S\neq 0,\quad \det D\neq 0, \tag{119.11}$$

我們便說，算子 $\mathbf{K}$ 或者方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 是正則型的. 在以后我們仅討論正則型的算子.

如果，特别是，$B(t)=0$，从而，$S=D$，那么，方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ 是普通(拟正規的) Fredholm (第二类的)方程組. 因此，在 $S=D$ 的情形下我們把算子 $\mathbf{K}$ 叫做 Fredholm 算子.

2°. 我們把算子 $\mathbf{K}$ 和由公式

$$\mathbf{K}'\psi\equiv A'(t_0)\psi(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K'(t,\ t_0)\psi(t)\,dt}{t-t_0} \tag{119.12}$$

所确定的算子 $\mathbf{K}'$ 叫做相联的算子；在公式(119.12)中，$A'(t_0)$ 表示矩陣 $A(t_0)$ 的轉置矩陣，$K'(t,\ t_0)$ 是由矩陣 $K(t_0,\ t)$ 經过轉置并且变换变量 t 和 t_0 所处的地位而得出的矩陣；因此，如果我們令

$$A'(t)=\|A'_{\alpha\beta}(t)\|,\quad K'(t,\ t_0)=\|K'_{\alpha\beta}(t,\ t_0)\|,$$

那么,有

$$A'_{\alpha\beta}(t)=A_{\beta\alpha}(t), \quad K'_{\alpha\beta}(t, t_0)=K_{\beta\alpha}(t, t_0).$$

正象在§46中那样,容易建立一般性公式

$$\int_L \psi \mathbf{K} \varphi dt=\int_L \varphi \mathbf{K}' \psi dt, \tag{119.13}$$

其中 $\varphi=\varphi(t)$, $\psi=\psi(t)$ 都是 H 类中的任意向量.

3°. 我們轉向討論两个奇异算子的合成問題. 假定

$$\mathbf{K}_1 \varphi \equiv A_1(t_0)\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_1(t_0, t)\varphi(t)dt}{t-t_0},$$

$$\mathbf{K}_2 \psi \equiv A_2(t_0)\psi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_2(t_0, t)\psi(t)dt}{t-t_0}. \tag{119.14}$$

用 B_1, B_2, S_1, S_2, D_1, D_2 分别表示和算子 $\mathbf{K}_1$ 及 $\mathbf{K}_2$ 有联系的矩陣, 这种联系正象矩陣 B, S, D 和算子 $\mathbf{K}$ 的联系那样, 和在§45中完全同样地,我們容易得出

$$\mathbf{K}_1[\mathbf{K}_2\psi] \equiv \mathbf{K}^*\psi,$$

其中 $\mathbf{K}^*$ 是一个和 $\mathbf{K}_1$ 及 $\mathbf{K}_2$ 同样类型的奇异算子,换句話說,

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^*\psi \equiv & [A_1(t_0)A_2(t_0)+B_1(t_0)B_2(t_0)]\psi(t_0) \\ & +\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{[A_1(t_0)K_2(t_0, t)+K_1(t_0, t)A_2(t)]\psi(t)dt}{t-t_0} \\ & +\frac{1}{(\pi i)^2}\int_L \left[\int_L \frac{K_1(t_0, t_1)K_2(t_1, t)dt_1}{(t_1-t_0)(t-t_1)}\right]\psi(t)dt. \end{aligned} \tag{119.15}$$

与§45中对应的公式的区别仅在于:在此处 A_1, B_1, K_1, A_2, B_2, K_2 都表示矩陣, 因此, 出現在上述公式中乘子的次序并不是无关紧要的.

我們用 $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$ 表示算子 $\mathbf{K}_1$ 和 $\mathbf{K}_2$ (按所指次序) 合成的算子 $\mathbf{K}^*$:

$$\mathbf{K}^*=\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2. \tag{119.16}$$

以 S^* 和 D^* 表示算子 $\mathbf{K}^*$ 的主矩陣,完全如同§45中那样,我們得出

$$S^* = S_1 S_2, \quad D^* = D_1 D_2. \tag{119.17}$$

由这些公式推出，如果我們假定算子 $\mathbf{K}_1$ 和 $\mathbf{K}_2$ 都是正則型的，那么，算子 $\mathbf{K}^*$ 亦是正則型的，算子 $\mathbf{K}^*$ 的特征部分完全由算子 $\mathbf{K}_1$ 和 $\mathbf{K}_2$ 的特征部分确定.

又由这些公式可以知道，如果在三个算子 $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ 及 $\mathbf{K}^*$ 之中有两个的特征部分已給出，那么，便可以唯一地确定出第三个算子的特征部分. 例如，如果給出了算子 $\mathbf{K}_2$ 和 $\mathbf{K}^*$ 的特征部分，那么，我們便得出算子 $\mathbf{K}_1$ 的主矩陣

$$S_1 = S^* S_2^{-1}, \quad D_1 = D^* D_2^{-1}, \tag{119.18}$$

而对应的矩陣 A_1 和 B_1 由公式

$$A_1 = \frac{1}{2}[S^* S_2^{-1} + D^* D_2^{-1}], \quad B_1 = \frac{1}{2}[S^* S_2^{-1} - D^* D_2^{-1}] \tag{119.19}$$

給出.

特別是，当給定算子 $\mathbf{K}_2$ 以后，可以用无穷多种方法如此选取算子 $\mathbf{K}_1$，使得算子 $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}^*$ 是 Fredholm 算子. 事实上，为此，必須而且只須使 $S^* = D^*$，从而

$$S_1 = S^* S_2^{-1}, \quad D_1 = S^* D_2^{-1}, \tag{119.20}$$

$$A_1 = \frac{1}{2} S^* (S_2^{-1} + D_2^{-1}), \quad B_1 = \frac{1}{2} S^* (S_2^{-1} - D_2^{-1}), \tag{119.21}$$

其中 S^* 是在 L 上适合 H 条件的任意矩陣，并且它在 L 上处处都有 $\det S^* \neq 0$. 特別是，我們可以选取 $S^* = D^* = E$，此处 E 是单位矩陣，并且此时，容易看出，两个算子 $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$ 与 $\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$ 都是 Fredholm 算子.

我們把整数

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}[\ln \det S^{-1} D]_L = \frac{1}{2\pi}\left[\arg \frac{\det(A-B)}{\det(A+B)}\right]_L \tag{119.22}$$

叫做奇异算子 $\mathbf{K}$ 或者方程 $\mathbf{K}\varphi = f$ 的指标.

从这个定义推知，指标仅与算子 $\mathbf{K}$ 的特征部分有关，因此，算子 $\mathbf{K}^0$ 的指标同时又是算子 $\mathbf{K}$ 的指标.

由公式(119.17)知道，如果算子 $\mathbf{K}_1$ 和 $\mathbf{K}_2$ 的指标是 $\varkappa'$ 和 $\varkappa''$，那么，算子 $\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$ 的指标 $\varkappa^*$ 等于 $\varkappa'$ 和 $\varkappa''$ 之和：

$$\varkappa^* = \varkappa' + \varkappa''. \tag{119.23}$$

Fredholm 算子的指标显然等于零.

§120. 奇异积分方程組的正則化. 基本定理

假定所給的奇异积分方程組是(119.1)，亦象在上一节中那样，我們可以把它表成一个方程的形式

$$\mathbf{K}\varphi = f. \tag{120.1}$$

从上一节中所指出的，我們知道，总可以用无穷多种方法选取这样的奇异算子 $\mathbf{M}$，使得算子 $\mathbf{MK}$ 是 Fredholm 算子. 我們把具有这个性质的算子 $\mathbf{M}$ 叫做 $\mathbf{K}$ 的**正則化算子**. 此时不一定能使得算子 $\mathbf{KM}$ 亦是 Fredholm 算子[①]（正象在上一节中所指出过的那样，$\mathbf{M}$ 能够如此选取，使得算子 $\mathbf{MK}$ 和 $\mathbf{KM}$ 都是 Fredholm 算子，但是，这对于后面所叙述的結果幷不是重要的）.

假定 $\mathbf{M}$ 是任一个正則化算子. 那么，方程(120.1)的所有解同时又是 Fredholm 方程

$$\mathbf{MK}\varphi = \mathbf{M}f \tag{120.2}$$

的解.

相反的結論通常是不正确的，因此，Fredholm 方程(120.2)通常幷不等价于原来的奇异积分方程. 但是，正好象在 §53 中曾經指出过的那样，在求出方程(120.2)的解以后，我們总可以得出原来方程(120.1)的一般解.

从上所述，特别可直接导出，**齐次方程** $\mathbf{K}\varphi = 0$ 的**綫性无关解**

① 在单个奇异积分方程的情形下(§45)，如果 $\mathbf{MK}$ 是 Fredholm 算子，那么，$\mathbf{KM}$ 亦具有这个性质；但是，在現在的情形（当我們实际上研究方程組时）下，正象我們所指出的那样，这幷不总是对的；因此，有必要区分已知算子的**左**正則化算子及**右**正則化算子.

之个数是个有限数.

逐字逐句地重复在 § 53 中就单个方程的情形所作过的議論，我們可得出下述基本定理.

定理 I 方程

$$\mathbf{K}\varphi=f$$

为可解的充分和必要条件是

$$\int_L f(t)\psi^\alpha(t)dt=0, \tag{120.3}$$

其中 $\psi^\alpha(t)$, $\alpha=1, 2, \cdots, k'$ 是已給方程的相联齐次方程 $\mathbf{K}'\psi=0$ 綫性无关解的完备系.

我們提醒一下，在現在的情形下，

$$f=(f_1, f_2, \cdots, f_n), \quad \psi^\alpha=(\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha, \cdots, \psi_n^\alpha)$$

都是向量，于是

$$f\psi^\alpha=f_1\psi_1^\alpha+f_2\psi_2^\alpha+\cdots+f_n\psi_n^\alpha. \tag{120.4}$$

定理 II 齐次方程 $\mathbf{K}\varphi=0$ 的綫性无关解之个数 k 和相联齐次方程 $\mathbf{K}'\psi=0$ 的綫性无关解之个数 k' 的差仅与算子 $\mathbf{K}$ 的特征部分有关.

再者，我們还可以証明下述重要定理.

定理 III 在定理 II 中所提到的差等于算子 $\mathbf{K}$ 的指标 $\varkappa$，亦就是説，

$$k-k'=\varkappa. \tag{120.5}$$

我們提醒一下，依据公式(119.22)

$$\begin{aligned}\varkappa&=\frac{1}{2\pi i}[\ln\det(A-B)-\ln\det(A+B)]_L\\&=\frac{1}{2\pi}[\arg\det(A-B)-\arg\det(A+B)]_L.\end{aligned} \tag{120.6}$$

这个定理将在后面 § 135 中加以証明，在証明时，主要需要用到在后一部分中将要叙述到的和若干个未知函数的联結問題的解有关的結果.

注釋 正象在 § 53 注釋 3 所指出过的那样，从奇异积分方程 (120.1) 的每一个解同时又是 Fredholm 方程 (120.2) 的解这个事实出发，可以导出下述結論．如果在曲綫 L 上取定有限个点 c_1, c_2, $\cdots$, c_n 当作結点，又若不在 H 类中，而是在更大的 H^* 类中找方程 (120.1) 的解，那么，这并不扩大解的类：H^* 类的所有解必然是属于 H 类的．

II. 若干个未知函数的联結問題

§ 121. 輔 助 命 題

1°. 我們仍然假定 L 表示由有限条沒有公共点的、光滑的封閉圍綫所构成的圍綫；总是假定在 L 上已經选定了确定的正方向．

我們把具有跳跃曲綫 L 的分区全純向量

$$\Phi(z)=(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n)$$

理解为支量

$$\Phi_\alpha=\Phi_\alpha(z), \quad \alpha=1, 2, \cdots, n$$

都是以 L 为跳跃曲綫的分区全純函数的向量．

如果所有这些函数 $\Phi_\alpha(z)$ 在无穷远处都是有限阶的，那么，我們便說向量 $\Phi(z)$ 在无穷远处是有限阶的．我們把支量 Φ_α, $\alpha=1$, 2, $\cdots$, n 在无穷远处的阶数的最高者 k 叫做这个向量**在无穷远处的阶数**．

如果在无穷远点的邻域內有

$$\Phi_\alpha(z)=\gamma_\alpha(z)+O\left(\frac{1}{z}\right), \quad \alpha=1, 2, \cdots, n,$$

其中 $\gamma_\alpha(z)=\gamma_\alpha$ 是多項式，那么，我們把向量

$$\gamma(z)=(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$$

叫做向量 $\Phi(z)$ 在无穷远处的**主要部分**．

虽然，Сохоцкий-Plemelj 公式 (§ 16) 以及 § 31 中的結果，很

显然可以移植到不是普通函数而是向量的情形，但是，我們为了便于参考起見，还是要在此处重新引进这些公式和結果中的某一些.

2°. 假定 $\varphi(t)$ 是給定在 L 上并且属于 H 类的向量，又假定 $\Phi(z)$ 是由公式

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \tag{121.1}$$

确定的分区全純向量.

那么，根据 Сохоцкий-Plemelj 公式，我們有

$$\begin{aligned}\Phi^+(t_0)&=\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0},\\ \Phi^-(t_0)&=\frac{-1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0},\end{aligned} \tag{121.2}$$

此处 Φ 与 φ 这一次都表示向量. 在这个情形下，我們把公式 (121.2) 亦叫做 Сохоцкий-Plemelj 公式.

3°. 假定根据边界条件

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t)\quad 在\ L\ 上, \tag{121.3}$$

要求找一个在无穷远处有有限阶的分区全純向量 $\Phi(z)$，此处 $\varphi(t)$ 是給定在 L 上 H 类的向量.

解由公式

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}+\gamma(z) \tag{121.4}$$

給出，这里

$$\gamma(z)=(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_n)$$

是支量 $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_n$ 都是任意多項式的向量. 向量 $\gamma(z)$ 是向量 $\Phi(z)$ 在无穷远处的主要部分，因此，在給定了这个主要部分以后，向量 $\gamma(z)$ 便是完全确定了的. 特别是，如果按条件 $\Phi(\infty)=0$，則 $\gamma(z)=0$.

4°. 上一段中的結果，当 L 是一条逐段光滑曲綫，而向量 $\varphi(t)$ 是属于 H^* 类的情形下，仍然是有效的；在这个情形下，当然，要求

使条件(121.3)在不是結点的点处都是适合的. 特别是，当曲綫 L 由一些光滑的封閉圍綫构成的，而向量 $\varphi(t)$ 在有限个点处是間断的情形(我們把这些点当作結点)便是上述的情形.

5°. 假定在条件(121.3)中的向量 $\varphi(t)$ 只是連續的，而不是属于 H 类. 那么，可以得出下述的結論(参照 §31, 2° 段)：如果存在在无穷远处有有限阶的分区全純向量 $\Phi(z)$ 适合条件(121.3)，那么，$\Phi(z)$ 由公式(121.4)給出.

§122. 齐次联結問題

仍然假定 L 是由有限条光滑而沒有公共点的封閉圍綫所构成的曲綫.

我們如下来提出綫性齐次联結問題或者簡称为齐次联結問題：

要求根据 L 上的边界条件：

$$\Phi_{\alpha}^{+}(t)=G_{\alpha 1}(t)\Phi_{1}^{-}(t)+G_{\alpha 2}(t)\Phi_{2}^{-}(t)+\cdots+G_{\alpha n}(t)\Phi_{n}^{-}(t)$$

$$(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

或者簡写后的条件

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t), \tag{122.1}$$

来找一个在无穷远处有有限阶的、以 L 为跳跃曲綫的分区全純向量 $\Phi(z)=(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \cdots,\ \Phi_n)$，这里

$$G(t)=\|G_{\alpha\beta}(t)\|$$

是給定在 L 上属于 H 类的矩陣，并且 $G(t)$ 在 L 上处处都不是退化矩陣，亦就是說，它的行列式 $\det G(t)$ 在 L 上处处都不等于零.

在今后，当讲到問題(122.1)的解时，我們通常是指异于平凡解 $\Phi(z)=0$ 的解.

在着手求解这个問題之前，我們对函数 $G_{\alpha\beta}(t)$ 在有限个点处能够具有第一类間断点的更一般情形略为說几句話.

綫性微分方程解析理論中的基本問題之一——具有有理系数

和具有事先給定的单值群的正則奇点之綫性微分方程組的构造問題——可以归結为这种問題的特殊情形：函数 $G_{\alpha\beta}(t)$ 是逐段常数的情形.

在上述特殊情形（当函数 $G_{\alpha\beta}(t)$ 是逐段常数时）下，B. Riemann 首先从剛才提到的綫性微分方程理論中的問題提出了（我們这样叫它）齐次联結問題，但是，他幷沒有指出这个問題的任何解法（这个問題的提法包括在 B. Riemann 簡短的遺稿[2]之中）.

后来，Riemann 所提出的問題（我們指的是齐次联結問題或者微分方程理論中对应的問題）成为很多著者的許多重要研究工作的論題.

但是，为了我們的目的，卽为了用来研究奇异积分方程理論，我們要求解决的是在这一节开始所提到的那种提法下的联結問題.

这种形式的問題实际上是由 D. Hilbert（但是，在更强得多的限制条件下）提出和部分地解决的（Götting. Nachrichten, 1905；在 D. Hilbert 的书[2]中第 94～102 頁上曾經轉載过）. D. Hilbert 給出的解法是把問題归結为 Fredholm 积分方程，这个解法很复杂而且不能认为是完整的.

在这不久以后，J. Plemelj[2] 給出了一个完整（如果我們不計較某些容易弥补的缺陷）而且很聪明的解法①. 这位著者亦象 D. Hilbert 那样，是利用 Fredholm 积分方程的，但是，他所用到的 Fredholm 积分方程和 D. Hilbert 作出的那些是大不相同的；在作出这些方程时，J. Plemelj 主要利用了 Cauchy 型积分的性质.

J. Plemelj 的主要結果是作出某些特殊解組［我們把这个解

① J. Plemelj 是在比 D. Hilbert 更为一般的假定下解决这个問題的. 但是，他所作的假定比我們所采用的条件还要稍欠一般些.

組叫做典則解組[1] (参看 § 126)], 并且通过这些特殊解組直接表出問題的一般解[2].

后面的齐次联結問題的求解的推导,比之 J. Plemelj 所給的解要簡捷得很多. 所以能够得到簡化是由于我們不象 J. Plemelj 那样把問題归結为 Fredholm 方程,而是把問題归結为奇异积分方程組, 这个奇异积分方程組提供了极簡单地建立起一組我們叫做基本解組的解的存在性之可能性(参看 § 125).

比之 J. Plemelj 更为簡单之处还在于, 在定出了基本解組以后,典則解組的作法亦比較簡单(§ 126).

§ 123. 归結为奇异积分方程組

在上一节中所提出的齐次联結問題(122.1),容易归結为求解下列形式的极簡单的奇异积分方程組.

我們令

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t) \quad 在 L 上.$$

那么,要找的在无穷远处有有限阶的分区全純向量 $\Phi(z)$, 可以表成下面形式(§ 121, 5° 段):

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}+\gamma(z), \tag{123.1}$$

---

① 还应該注意到 G. D. Birkhoff 的工作 (他的論文 [1], [2] 以及其他論文). 这位著者的論文发表在 J. Plemelj 的工作之后(但是他是独立地完成的),在这些論文中給出了較不完善的解(由于对曲綫 L 及矩陣 G 加了相当强的限制), 但是, 仍然是有价值的, 因为它們包含了一系列能够用来簡化叙述的結果. 在这些論文中, 特别是在論文[2]中,这位著者是用逐次逼近法来求解这个問題的, 从方法上来讲这亦是有意义的;这个方法經过必要的推广和修改后,可以导出相当完善的結果. 在 R. Garnier 的論文[1]中作出了某些这样的推广和修改.

在 Г. Ф. Манджавидзе 的論文 [5], [6] 中以及在 Г. Ф. Манджавидзе 和 Б. В. Хведелидзе 的論文[1]中,利用逐次逼近法給出了联結問題的相当完善的解,他們所用的逐次逼近法与 Birkhoff 的方法是完全不同的,参看 § 133.

② J. Plemelj 把这个解組叫做基本解組;我們在另一些意义下使用基本解組这个术語(参看 § 125).

其中

$$\gamma(z)=(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_n)$$

是支量 $\gamma_\alpha=\gamma_\alpha(z)$ 为某些多項式的向量，它是 $\Phi(z)$ 在无穷远处的主要部分．这样一来，問題归結为确定向量 $\varphi(t)$ 与 $\gamma(t)$．

从問題的提法本身知道，向量

$$\varphi(t)=(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_n)$$

应該在 L 上是連續的①，亦就是說，它的支量 $\varphi_1=\varphi_1(t)$，$\varphi_2=\varphi_2(t)$，$\cdots$，$\varphi_n=\varphi_n(t)$ 都应該在 L 上是 t 的連續函数．但是，我們早已經假定，$\varphi(t)$ 是属于 H 类的；后面我們要証明（§128），我們問題的每一个解都应該适合这条件②．

从（123.1）出发，根据 Сохоцкий-Plemelj 公式（§121, 2°段）算出边值 $\Phi^+(t_0)$ 及 $\Phi^-(t_0)$，把它們代入关系式（122.1）并在（122.1）中用 t_0 代替 t，我們容易得出

$$A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0),\tag{123.2}$$

此处，为了簡短起見，已令

$$A(t_0)=E+G(t_0),\quad B(t_0)=E-G(t_0),\tag{123.3}$$

$$f(t_0)=2[G(t_0)-E]\gamma(t_0),\tag{123.4}$$

并且 E 表示单位矩陣．

如果假定方程（123.2）的右端，亦就是，假定向量 $f(t_0)$ 是已知的，那么，方程（123.2）对于向量 φ 的支量 $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_n$ 而言就是最簡单的奇异积分方程組，亦就是，特征方程組．

这个方程組是正則型的方程組，因为它的主矩陣 $S=A+B=2E$ 及 $D=A-B=2G$ 在 L 上处处都不取值零；此处我們提醒一下，按条件，在 L 上 $\det G(t)\neq 0$．

但是，向量 $f(t_0)$ 包含了事先沒有确定的多項式 $\gamma_1(t_0)$，

① 問題的提法本身假定了对曲綫 L 上的所有点 t 边值 $\Phi^+(t)$，$\Phi^-(t)$ 是存在的；因此，$\Phi^+(t)$，$\Phi^-(t)$ 都必然是連續的；参看§9．

② 正象約定好的那样，我們假定，矩陣 $G(t)$ 是属于 H 类的．

$\gamma_2(t_0), \cdots, \gamma_n(t_0)$. 如果只根据方程組(123.2)是可解的唯一条件来确定它們,那么,这些多項式的选取可以完全是任意的.

正如我們知道的(§120),方程組(123.2)的可解性条件是下列一些等式

$$\int_L f(t)\psi^\alpha(t)dt=0, \quad \alpha=1, 2, \cdots, k', \qquad (123.5)$$

其中 $\psi^\alpha(t)$, $\alpha=1, 2, \cdots, k'$ 是(123.2)的相联齐次方程組的綫性无关解的完备系.

根据多項式 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 的任意性，显然可以用无穷多种方法来使得这些条件是适合的,因此,問題可以有无穷多个解.

§124. 齐次联結問題的解的某些性質

在进一步作出齐次問題的一般解之前，我們先介紹一些几乎直接可以从問題提法本身以及上一节中的結果，而得出的这个問題的解的某些性質.

1° 我們首先指出,如果向量

$$\Phi(z)=(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n)$$

是齐次联結問題(123.1)的某个解,而 $P=P(z)$ 是任意多項式,那么,向量

$$\Phi(z)P(z)=(\Phi_1 P, \Phi_2 P, \cdots, \Phi_n P)$$

亦是解. 更一般地,如果向量 $\Phi^1(z), \Phi^2(z), \cdots, \Phi^m(z)$ 是任意 m 个解[①],而 $P_1(z), P_2(z), \cdots, P_m(z)$ 都是任意多項式,那么,向量

$$\Phi^1(z)P_1(z)+\Phi^2(z)P_2(z)+\cdots+\Phi^m(z)P_m(z)$$

亦是解.

所有这些都可以直接依据边界条件(122.1)的形式推得.

2° 假定 $\Phi(z)=(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n)$ 是齐次联結問題的任一解,

---

① 我們通常用右上角的号碼表示解(向量)的标号，而右下角的号碼表示已給的解(向量)之支量的标号,因此,例如,有

$$\Phi^\beta=(\Phi_1^\beta, \Phi_2^\beta, \cdots, \Phi_n^\beta).$$

又假定在平面上某个不在 L 上的点 c 处有 $\Phi(c)=0$, 亦就是有 $\Phi_1(c)=\Phi_2(c)=\cdots=\Phi_n(c)=0$. 那么,比值

$$\Psi(z)=\frac{\Phi(z)}{z-c}=\left(\frac{\Phi_1(z)}{z-c},\ \frac{\Phi_2(z)}{z-c},\ \cdots,\ \frac{\Phi_n(z)}{z-c}\right) \quad (124.1)$$

显然亦是解.

现在假定,点 c 位在 L 上. 在这种情形下,当讲到,解 $\Phi(z)$ 在点 c 处取值零或者 $\Phi(c)=0$ 时, 我們是指 $\Phi^+(c)=0$, $\Phi^-(c)=0$. 我們指出, 根据关系式 $\Phi^+(c)=G(c)\Phi^-(c)$ 及 $\det G(c)\neq 0$, 从这两个等式中的一个得出另一个.

现在假定, $\Phi(z)$ 是某个这样的解: $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ 是属于 H 类的①,又假定在刚才所指出的意义下 $\Phi(c)=0$, 此处 c 是 L 上某个点. 我們証明,在这种情形下, 向量 $\Psi(z)$ 是解, 并且边值 $\Psi^+(t)$, $\Psi^-(t)$ 在 L 上包括点 c 在內处处都是属于 H 类的.

我們如果能够証明后一个事实,那么,我們的結論便显然可以得証了.

首先, 根据在 § 21 中所讲过的結果, 容易看出,向量 $\Psi(z)$ 是分区全純 (以 L 为跳跃曲綫) 向量, 并且点 c 看作結点. 其次, 如果再象在 § 123 中那样假定 $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t)$, 那么, 对 L 上所有异于 c 的点,都有

$$\psi(t)=\Psi^+(t)-\Psi^-(t)=\frac{\varphi(t)}{t-c}.$$

但是,由于 $\Phi^+(c)=\Phi^-(c)=0$, 因此, $\varphi(c)=0$; 再者, 因为函数 $\varphi(t)$ 是属于 H 类的,因此,显然函数 $\psi(t)$ 是属于 H^* 类的. 于是,正象在 § 123 中那样(参看 § 121, 4° 段)有

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\psi(t)\,dt}{t-z}+\gamma(z),$$

其中 $\gamma(z)$ 是某个以多項式为支量的向量.

① 后面(§ 128)要証明:每一个解都具有这个性质;但是,我們在此处不利用这一个事实,因为我們还沒有証明过这一点.

正象在§123中那样，由此知道，可能除了点 c 外，函数 $\psi(t)$ 总适合方程(123.2)．因此(参看§120末尾的注释)，如果給 $\psi(t)$ 在点 c 处以适当的值，那么，函数 $\psi(t)$ 在 L 上就是属于 H 类的．但是，此时上面的公式表明：向量 $\Psi(z)$ 可以从左侧及右侧連續拓展到曲綫 L 的所有点(包括点 c 在内)上，并且它的边值是属于 H 类的，而这亦就証明了我們的結論．

3°. 最后，我們証明，齐次联結問題的解(我們指的是取边値属于 H 类的解[①])的下述性质：任何非零解在无穷远处的阶数不低于某个定数．

亦就是，容易看出，我們問題的任何一个解 $\Phi(z)$ 的阶数都不可能低于 $m=-k$，此处 k 是与方程(123.2)所对应的齐次方程之綫性无关解的个数．

事实上，如果解 $\Phi(z)$ 在无穷远处的阶数低于 $-k$，那么，向量

$$\Phi(z),\ z\Phi(z),\ \cdots,\ z^k\Phi(z)$$

都是齐次联結問題(122.1)在无穷远处取値零的解，但是，此时，向量

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t),\ t\varphi(t),\ t^2\varphi(t),\ \cdots,\ t^k\varphi(t)$$

是方程(123.2)所对应的齐次方程的 $k+1$ 个綫性无关解[②]．而这是不可能的，因为这个方程綫性无关解的个数等于 k．

§125. 基 本 解 組

1°. 今后，我們常常要研究齐次联結問題(122.1)的 n 个解的解組，我們用右上角的号碼来区别这 n 个解：

---

① 后面(§128)要証明：每一个解都具有这个性质；但是，我們在此处不利用这一个事实，因为我們还沒有証明过这一点．

② 与在无穷远处取値零的解 $\Phi(z)$ 对应的函数 $\varphi(t)$，适合由(123.2)取 $f(t_0)=0$ 而得出的齐次方程，因为向量 $\Phi(z)$ 在无穷远处的主要部分 $\gamma(z)$ 等于零，因而由于(123.4)，$f(t_0)=0$．

$$
\begin{aligned}
&\Phi^1(z)=(\Phi_1^1,\ \Phi_2^1,\ \cdots,\ \Phi_n^1),\\
&\Phi^2(z)=(\Phi_1^2,\ \Phi_2^2,\ \cdots,\ \Phi_n^2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Phi^{(n)}(z)=(\Phi_1^n,\ \Phi_2^n,\ \cdots,\ \Phi_n^n).
\end{aligned}
\tag{125.1}
$$

我們把矩陣

$$
\|\Phi_\alpha^\beta(z)\|=\begin{Vmatrix}
\Phi_1^1(z) & \Phi_1^2(z) & \cdots & \Phi_1^n(z)\\
\Phi_2^1(z) & \Phi_2^2(z) & \cdots & \Phi_2^n(z)\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\Phi_n^1(z) & \Phi_n^2(z) & \cdots & \Phi_n^n(z)
\end{Vmatrix}
\tag{125.2}
$$

叫做已給解組的解矩陣，它的列是向量(解) $\Phi^1(z)$, $\Phi^2(z)$, $\Phi^n(z)$.

显然，根据边界条件(122.1)，成立着下列的矩陣关系式：

$$
\|\Phi_\alpha^\beta(t_0)\|^+=G(t_0)\,\|\Phi_\alpha^\beta(t_0)\|^-,
\tag{125.3}
$$

其中記号(+)与(−)表示矩陣 $\|\Phi_\alpha^\beta(z)\|$ 的对应边值.

反之，显然，如果矩陣$\|\Phi_\alpha^\beta(z)\|$的元素 $\Phi_\alpha^\beta(z)$, $\alpha, \beta=1, 2, \cdots, n$ 都是分区全純函数，又若这个矩陣适合关系式(125.3)，那么，这个矩陣的每一列，当把它考慮成向量时，都是齐次联結問題(122.1)的解.

2°. 对今后重要的是要找出齐次联結問題的这样 n 个解的解組，它們的矩陣的行列式不恒等于零. 我們把这样的解組叫做基本解組，并把这个解組的解矩陣叫做基本解矩陣.

正如我們曾經見到过的那样，这样解組存在无穷多个，我們在后面将要証明，为了得出問題的一般解，我們只需作出它們之中的任一个来亦就够了.

例如，可以用下述方法作出一个基本解組来.

我們取向量

$$
\gamma^\beta(z)=(0,\ 0,\ \cdots,\ \gamma_\beta^\beta,\ 0,\ \cdots,\ 0)
$$

当作出現在公式(123.1)右端的向量 $\gamma(z)$，这个向量除了标号为 β 的支量外，其他支量都等于零，而异于零的那个支量 $\gamma_\beta^\beta(z)=\gamma_\beta^\beta$

是一个系数未定的多項式. 我們这样取定这些系数，使得与它們对应的方程組(123.2)是可解的，亦就是，使得它們适合由公式(123.5)所給出的条件:

$$\int_L f^\beta(t)\psi^\alpha(t)dt=0,\quad \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ k', \tag{125.4}$$

这里，由公式(123.4)

$$f^\beta(t)=2[G(t)-E]\gamma^\beta(t).$$

在(125.4)中用未定系数的多項式替代 $\gamma^\beta_\beta(t)$，我們显然可得出关于这些未定系数的綫性齐次代数方程組. 如果选取次数不低于 k' 的多項式当作 $\gamma^\beta_\beta(z)$，那么，所得出的方程組总有非零解，这是因为此时上述方程組中未知数的个数不少于 $k'+1$ 个. 选定这个方程組的任一个异于零的确定解，我們得出多項式 $\gamma^\beta_\beta(z)$ 的明确表示式，从而便得出向量 $\gamma^\beta(z)$ 的确定的表示式. 再把这个值代入公式(123.2)之右端，我們便得出可解的奇异积分方程組. 假定 $\varphi(t)$ 是这个方程組的解(如果有几个解，就假定它是其中任一确定的解). 那么，对于我們所选定的向量 $\gamma(z)=\gamma^\beta(z)$ 值，公式(123.1)給出了齐次联結問題的确定解 $\Phi^\beta(z)$. 如果让 β 取值 $1,\ 2,\ \cdots,\ n$，我們便得出下列 n 个解的解組:

$$\begin{aligned}
\Phi^1(z)&=(\Phi^1_1,\ \Phi^1_2,\ \cdots,\ \Phi^1_n),\\
\Phi^2(z)&=(\Phi^2_1,\ \Phi^2_2,\ \cdots,\ \Phi^2_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Phi^n(z)&=(\Phi^n_1,\ \Phi^n_2,\ \cdots,\ \Phi^n_n).
\end{aligned} \tag{125.5}$$

我們指出，由于我們总是把方程(123.2)的解 $\varphi(t)$ 理解为 H 类的解，因此，我們所找到的解 $\Phi^\beta(z)$，$\beta=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 在 L 上所取得的边值是属于 H 类的.

容易看出，所找出的解組之解矩陣 $\|\Phi^\beta_\alpha\|$ 的行列式不恒等于零. 事实上，这个行列式在无穷远点的邻域内必然异于零，因为当 $z\to\infty$ 时，除了对角綫上的元素外，它所有的元素都趋于零，而对

角綫上的元素在无穷远处都以异于零的多项式 $\gamma_\beta^\beta(z)$ 为其主要部分①.

这样一来,解組(125.5)是一个基本解組.

§126. 正規解組和典則解組

1° 我們把具有下列性质的基本解組 $\Psi^1, \Psi^2, \cdots, \Psi^n$ 叫做齐次联結問題的**正規解組**:它的矩陣之行列式 $\det\|\Psi_\alpha^\beta(t)\|$ 在有限距离内,包含曲綫 L 上的点在内,处处都不取值零. 所謂行列式在 L 上不取值零,我們是指,它从左側及右側所取得的边值都不等于零,亦就是說,

$$\det\|\Psi_\alpha^\beta(t)\|^+\neq 0, \quad \det\|\Psi_\alpha^\beta(t)\|^-\neq 0,$$

从这些不等式中的一个根据关系式

$$\det\|\Psi_\alpha^\beta(t)\|^+=\det G(t)\cdot\det\|\Psi_\alpha^\beta(t)\|^- \tag{126.1}$$

得出另一个,而这个关系式是由(125.3)得出的.

我們把正規解組的矩陣叫做**正規解矩陣**.

我們現在証明:有了基本解組或者有了基本解矩陣 $\|\Phi_\alpha^\beta(z)\|$ 之后,容易作出正規解組. 在整个这一节中,我們把解理解为它的边值是属于 H 类的解.

假定 c 是平面上的某个点(它不是无穷远点),又假定 $\det\|\Phi_\alpha^\beta(z)\|$ 在这个点处取值零;我們暂时假定点 c 不在 L 上.

根据假定,我們有

---

① 我們指出,如果解在由曲綫 L 分割平面而得的任一个連通部分內不恒等于零,它就在由曲綫 L 分割平面而得的每一个連通部分內都不恒等于零. 事实上,如果解 $\Phi(z)$ 在这些連通部分之一內等于零,那么,当 z 保持在这一部分內部而趋于它的边界时,$\Phi(z)$ 所取的边值等于零. 但是,此时,根据(122.1),当 z 从在此边界另一側的部分內趋于边界时,$\Phi(z)$ 取的边值亦等于零. 因此,在每一部分內(它們都以 L 之一部分为边界)$\Phi(z)$ 都等于零;由此便得出我們的結論.

从上所述还可以知道,如果解在平面上任意小的区域內恒等于零,那么,它在整个平面上就恒等于零.

$$\begin{Vmatrix} \Phi_1^1(c) & \Phi_1^2(c) & \cdots & \Phi_1^n(c) \\ \Phi_2^1(c) & \Phi_2^2(c) & \cdots & \Phi_2^n(c) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_n^1(c) & \Phi_n^2(c) & \cdots & \Phi_n^n(c) \end{Vmatrix} = 0. \tag{126.2}$$

因此,总可以找出不完全为零的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 使得

$$\sum_{\beta=1}^{n} a_\beta \Phi_\alpha^\beta(c) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, n \tag{126.3}$$

成立,或者同样地使得

$$a_1\Phi^1(c) + a_2\Phi^2(c) + \cdots + a_n\Phi^n(c) = 0 \tag{126.4}$$

成立. 現在討論解

$$\Phi(z) = a_1\Phi^1(z) + a_2\Phi^2(z) + \cdots + a_n\Phi^n(z).$$

根据(126.4),我們有 $\Phi(c)=0$. 因此,根据 § 124, 2° 段所指出过的,比值

$$\Psi(z) = \frac{\Phi(z)}{z-c} \tag{126.5}$$

亦是解.

假定 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 分别表示解 $\Phi^1(z), \Phi^2(z), \cdots, \Phi^n(z)$ 在无穷远处的阶数. 不失一般性, 可以假定 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. 我們用 a_m 表示数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中最后一个不等于零的数.

用由公式 (126.5) 所确定的解 $\Psi(z)$ 替代基本解組 $\Phi^1(z)$, $\Phi^2(z), \cdots, \Phi^n(z)$ 中的解 $\Phi^m(z)$, 我們显然可以得出一个新的基本解組, 此时老的解組中的一个解亦就是 $\Phi^m(z)$ 已被换成在无穷远处阶数要减少一阶的解①.

根据在 § 124, 2° 段中所讲过的結果, 容易看出, 当点 c 位在曲綫 L 上时, 亦可以类似地进行研究. 在这种情形下, 我們現在应該把在 (121.4) 中的 $\Phi^1(c), \Phi^2(c), \cdots, \Phi^n(c)$ 理解为边值

---

① 新的基本解組之解矩陣的行列式显然等于

$$\frac{a_m}{z-c}\det\|\Phi_\alpha^\beta(z)\|,$$

从而,这个行列式亦不恒等于零.

$\Phi^{1+}(c)$, $\Phi^{2+}(c)$, $\Phi^{n+}(c)$ 或者边值 $\Phi^{1-}(c)$, $\Phi^{2-}(c)$, $\cdots$, $\Phi^{n-}(c)$；由于关系式 $\Phi^{+}(c)=G(c)\Phi^{-}(c)$，在这两种情形下，我們可以得出用来确定数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的等价方程.

这样一来，在所有的情况下，如果基本解矩陣的行列式在平面上某一个 c 处等于零，那么，我們可以把基本解組换成另一个在无穷远处有一个解的阶数要减少一阶的基本解組.

如果这样得出的新的基本解組之解矩陣的行列式，在平面上某个点处又取値零，那么，可以重复应用上述的方法，等等. 当每一次这样用新的基本解組替代老的基本解組时，个别解在无穷远处阶数的总和要减少一阶. 但是，我們知道，任何解在无穷远处的阶数都不可能低于一个定数（§ 124, 3° 段）.

因此，經过上述形式的有限次运算以后，我們便导出这样的基本解組，它的解矩陣的行列式在有限距离内处处都不取値零.

这样一来，我們便得到正规解組①，我們用 $\|\Psi_{\alpha}^{\beta}(z)\|$ 表示它的解矩陣.

2°. 根据正规解組的定义，这样的解組的解矩陣 $\|\Psi_{\alpha}^{\beta}(z)\|$ 的行列式，在平面上所有有限点处都不等于零，并且它在每一个不包含曲綫 L 的点的有界区域内都是全純的. 在无穷远点的邻域内，这个行列式可能是保持有界的，但是亦可能取値零或者有极点. 从

---

① 本书所采用的由基本解組作出正規解組的方法是 G. D. Birkhoff 的論文[2]中指出的；亦可以参照他的論文[1]. 当点 c 在 L 上的情形下，(126.5)是解的这一結論的根据由这位作者在下列很特殊的假定下得出的：曲綫 L 是一条解析圍綫，而矩陣 $G(t)$ 的元素，除了 L 上的有限个点外，在曲綫 L 附近都是解析函数，但是，在这些例外的点附近，它們是无穷多次可微的.

Ф. Д. Гахов [5], [9] 曾对另一些稍有不同的但是相近的問題，用了类似的方法（他并不知道 G. D. Birkhoff 的論文）；同时，事先除去了点 c 在 L 上的情形.

J. Plemelj [2] 給出了另一个相当复杂的从基本解組出发作出正規解組的方法［并且用这个方法不仅立可得出正規解組，而且也得出典則解組（它的定义在下一段中要指出）］；在我們的情形下，当点 c 在 L 上时，这位著者的論据是不充分的. 在 Н. И. Мусхелишвили 及 Н. П. Векуа 的論文[1]中給出了 J. Plemelj 的方法之严格論据，这在本书第一版中曾經轉載过. 亦可参看 Н. П. Векуа 的論文[8]与著作[16].

下面显然可以看出,在一般情形后两种可能性是不可避免的;正規解組的解矩陣之行列式在无穷远处的阶数与这些解組的选擇是无关的.

但是,依据解在无穷远点邻域内的性质,可以把正規解組改变成为便于討論的形式.

亦就是,我們用

$$-\varkappa_1,\ -\varkappa_2,\ \cdots,\ -\varkappa_n$$

表示构成正規解組的解

$$\Psi^1(z),\ \Psi^2(z),\ \cdots,\ \Psi^n(z)$$

在无穷远处的阶数. 把这些解的解矩陣之行列式写成下列形式:

$$\det\|\Psi_\alpha^\beta(z)\|=z^{-\varkappa_1-\varkappa_2-\cdots-\varkappa_n}\det\|z^{\varkappa_\beta}\Psi_\alpha^\beta\|.$$

当 $z\to\infty$ 时, 后一个行列式的元素 $z^{\varkappa_\beta}\Psi_\alpha^\beta(z)$ 都趋于确定的有限值; 因此,当 $z\to\infty$ 时,行列式

$$\Delta(z)=\det\|z^{\varkappa_\beta}\Psi_\alpha^\beta(z)\| \tag{126.6}$$

趋于一个确定的有限值, 所以这个行列式在点 $z=\infty$ 的邻域内是一个全純函数.

如果正規解組 $\Psi^1(z),\ \Psi^2(z),\ \cdots,\ \Psi^n(z)$ 对应的行列式(126.6)当 $z=\infty$ 时异于零 (从而, 它在无穷远点的某一个邻域内亦异于零),我們便把这个正規解組叫做**典則解組**.

我們証明:每一个正規解組都可以变成典則解組,此时并不改变它的解矩陣之行列式.

事实上,如果 $\Delta(\infty)\neq 0$, 那么,目的已經实現. 現在我們假定 $\Delta(\infty)=0$. 对很大的 $|z|$, 我們有矩陣 $\|\Psi_\alpha^\beta(z)\|$ 的元素的下面形式的展开式:

$$\Psi_\alpha^\beta(z)=z^{\varkappa_\beta}\left\{a_\alpha^\beta+O\left(\frac{1}{z}\right)\right\},\quad a_\alpha^\beta=\text{常数},$$

因此,有

$$0=\Delta(\infty)=\det\|a_\alpha^\beta\|.$$

但是,此时,可以确定这样的不全等于零的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 使得

$$\sum_{\beta=1}^{n} a_\alpha^\beta a_\beta = 0, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, n.$$

我們可以认为 $-\varkappa_1 \leqslant -\varkappa_2 \leqslant \cdots \leqslant -\varkappa_n$, 在必要时,可以把矩陣 $\|\Psi_\alpha^\beta(z)\|$ 的列重新排列(这仅能导致解的重新編号,并且这仅能引起行列式变更符号). 設 a_m 是数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中最后一个异于零的数. 現在在正規解組 $\Psi^1(z), \Psi^2(z), \cdots, \Psi^n(z)$ 中,把解 $\Psi^m(z)$ 換成解

$$a_1\Psi^1(z) + a_2\Psi^2(z) + \cdots + a_m\Psi^m(z),$$

我們显然便得出一个新的正規解組,并且老的正規解組中的一个解換成了在无穷远处阶数至少要低一阶的解(其他解的阶数都不变),而新的正規解組的解矩陣之行列式与对应的老的正規解組的解矩陣之行列式,仅差一个异于零的常数因子;我們可以认为这个因子等于1,必要时可将新的正規解矩陣的一列乘以一个不等于零的常数就行了. 这样一来,我們可以认为新的和老的正規解組的解矩陣之行列式彼此是相等的.

如果新的解組是典則解組,那么,我們的目的已經达到;在相反的情形下,我們可以引进与上面类似的变換. 因为函数 $\Delta(z)$ 在无穷远处的阶数按条件是不恒等于零的,而是一个确定的有限数,因此,这样的变換不必无限次地重复下去.

这样一来,經过有限次上述初等运算之后,我們便导出典則解組,其解矩陣的行列式与原来的基本解矩陣的行列式是相等的①.

3°. 我們通常用

$$\begin{aligned} \chi^1(z) &= (\chi_1^1, \chi_2^1, \cdots, \chi_n^1), \\ \chi^2(z) &= (\chi_1^2, \chi_2^2, \cdots, \chi_n^2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \chi^n(z) &= (\chi_1^n, \chi_2^n, \cdots, \chi_n^n) \end{aligned} \tag{126.7}$$

① 参看 G. D. Birkhoff [1], [2], 亦可以参看 H. П. Векуа [8], [16], Ф. Д. Гахов [5], [9].

表示构成典则解組的解，而把它的解矩陣叫做典則解矩陣，并且用 $X(z)$ 表示它，因此

$$X(z)=\|\chi_\alpha^\beta(z)\|=\left\|\begin{matrix}\chi_1^1(z) & \chi_1^2(z) & \cdots & \chi_1^n(z)\\ \chi_2^1(z) & \chi_2^2(z) & \cdots & \chi_2^n(z)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \chi_n^1(z) & \chi_n^2(z) & \cdots & \chi_n^n(z)\end{matrix}\right\|. \qquad (126.8)$$

我們提醒一下，标志着典則解組 $\chi^1(z),\ \chi^2(z),\ \cdots,\ \chi^n(z)$ 的一些性质，这些性质就是：

性质 1 典則解矩陣 $X(z)$[亦就是，解組 $\chi^\beta(z),\ \beta=1,2,\cdots,n$ 的解矩陣]是正規解矩陣，亦就是說，这个矩陣的行列式

$$\Delta(z)=\det X(z)=\det\|\chi_\alpha^\beta(z)\| \qquad (126.9)$$

在平面的有限部分內处处都不取值零.

性质 2 假定 $-\varkappa_\beta$ 表示解 χ^β 在无穷远处的阶数，那么，行列式

$$\Delta^0(z)=\det\|z^{\varkappa_\beta}\chi_\alpha^\beta(z)\|=z^{\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_n}\Delta(z) \qquad (126.10)$$

在 $z=\infty$ 处异于零.

后一个性质显然可以这样来理解：行列式 $\det\|\chi_\alpha^\beta\|$ 在无穷远处的阶数等于矩陣 $\|\chi_\alpha^\beta(z)\|$ 的列在无穷远处的阶数之和；我們把列在无穷远处的阶数理解为它的元素在无穷远处的阶数的最高者；我們提醒一下，当把标号为 β 的一个列之元素的全体考虑成一个向量时，它便是解 $\chi^\beta(z)$.

4°. 典則解組比之正規解組的优越性之一在于它的下列性质.

我們討論下列形式的解 $\chi(z)$，它是典則解組中的解以多項式为系数的綫性組合

$$\chi(z)=\chi^1(z)P_1(z)+\chi^2(z)P_2(z)+\cdots+\chi^n(z)P_n(z), \qquad (126.11)$$

其中 $P_1(z),\ P_2(z),\ \cdots,\ P_n(z)$ 分别是次数为 $m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n$ 的多項式；这个解显然可以写成(§118, 1° 段)

$$\chi(z)=X(z)P(z), \qquad (126.12)$$

其中 $P(z)$ 表示以 $P_1(z), P_2(z), \cdots, P_n(z)$ 为支量的向量，亦就是說，

$$P(z)=(P_1, P_2, \cdots, P_n).$$

在(126.11)中右端的各个項在无穷远处的阶数分别等于 $m_1-\varkappa_1, m_2-\varkappa_2, \cdots, m_n-\varkappa_n$.

从 $\Delta^0(\infty)\neq 0$ 的事实出发，亦就是，从典則解矩陣的性质 2 出发，可以导出，綫性組合 $\chi(z)$ 在无穷远处的阶数正好等于数 $m_1-\varkappa_1, m_2-\varkappa_2, \cdots, m_n-\varkappa_n$ 中最大的一个；換句話說，在和式(126.11)中，阶数为最高的項不可以取掉.

容易看出，反过来从这个性质可以导出性质 2.

§127. 齐次联結問題的指标

1° 我們把整数 $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_n$（亦就是，和典則解組中的解在无穷远处的阶数反一符号的数）叫做所討論的齐次联結問題之偏指标，而把它們的和

$$\varkappa=\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_n,$$

叫做总指标，或者簡单地叫做指标.

在后面(§130 中)我們将要証明，偏指标与典則解組的选擇是无关的(如果不顾及到解的标碼次序)，亦就是說，偏指标是問題的不变量.

起着重要作用的总指标 $\varkappa$ 的不变性，可以由从标志着給定的齐次联結問題的矩陣 $G(t)$ 直接表出的总指标的表示式导出，我們現在証明这一点.

2° 仍然假定 $\Delta(z)$ 表示典則解矩陣之行列式. 对于每一組 n 个解的行列式，我們都有

$$\Delta^+(t)=\det G(t)\,\Delta^-(t) \quad \text{在 } L \text{ 上},$$

由此得出

$$[\ln \Delta^+(t)]_L=[\ln \det G(t)]_L+[\ln \Delta^-(t)]_L, \qquad (127.1)$$

这里記号$[\ ]_L$,亦象通常那样,是表示括号內的函数当 t 循着正向繞 L 一周时的增量.

正象在§29, 1°段中那样,由曲綫 L 分割平面而得的連通部分,組成平面的两个部分 S^+ 与 S^-,并且我們現在假定,在 L 上的正方向照§29中所指出的那样来选擇①. 另外,我們还假定,用 S^- 表示包含无穷远点的那一部分.

因为,函数 $\Delta(z)$ 在 S^+ 部分內是全純的并且不取值零,因此,有

$$[\ln \Delta^+(t)]_L=0.$$

再者,我們用 L' 表示构成 L 并且具有下列性质的一些封閉圍綫的全体:这些圍綫包圍成含于 S^- 內并包含无穷远点的平面連通部分,而用 L'' 表示构成 L 的其他的全部圍綫. 那么,与前面类似地,有

$$[\ln \Delta^-(t)]_{L''}=0.$$

現在我們計算函数 $\ln \Delta^-(t)$ 当 t 繞圍綫 L 的 L' 部分时的增量. 显然有

$$[\ln \Delta^-(t)]_{L'}=[\ln \Delta(z)]_\Gamma,$$

其中 Γ 表示半徑为充分大的圓周,并且規定 Γ 上的正方向为反时針方向.

但是,根据公式(126.10)

$$\Delta(z)=\frac{\Delta^0(z)}{z^\varkappa},$$

其中 $\Delta^0(z)$ 是一个在无穷远点的邻域內是全純的函数,并且它在这个邻域內不等于零. 因此,对于半徑为充分大的圓周 Γ, $[\ln \Delta^0(z)]_\Gamma=0$, 于是,

$$[\ln \Delta(z)]_\Gamma=[-\varkappa \ln z]_\Gamma=-2\pi i\varkappa.$$

---

① 亦就是說,曲綫 L 的左邻域是属于 S^+ 部分的,而 L 的右邻域是属于 S^- 部分的.

这样一来,根据(127.1),

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi i}[\ln \det G(t)]_L=\frac{1}{2\pi}[\arg \det G(t)]_L. \quad (127.2)$$

这就是所要求的公式①. 它对于L上任意选定的正方向都是正确的.

事实上,如果构成L的任一条圍綫L_k的正方向与在推导公式时所作的假定不一致,那么,我們可以把这一条圍綫的方向改成反方向,同时为了使得問題的条件保持不变,应在这一条圍綫上把矩陣$G(t)$用矩陣$[G(t)]^{-1}$来替代. 但是,此时在公式右端所对应的項

$$[\ln \det G(t)]_L=\sum_k[\ln \det G(t)]_{L_k}$$

保持不变. 由此便得出我們的結論.

§128. 齐次联結問題的一般解

1°. 作出齐次联結問題

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t) \quad 在 L 上 \quad (128.1)$$

的(任一个)典則解組以后,要找出它的一般解便沒有任何困难了.

假定

$$\chi^\beta(z)=(\chi_1^\beta, \chi_2^\beta, \cdots, \chi_n^\beta), \quad \beta=1, 2, \cdots, n$$

是任一个典則解組,而$X(z)$是对应的典則解矩陣$X(z)=\|\chi_\alpha^\beta(z)\|$($\beta$是列的标号,$\alpha$为行的标号). 那么,

$$X^+(t)=G(t)X^-(t),$$

由此得出我們常常要用到的公式

$$G(t)=X^+(t)[X^-(t)]^{-1}. \quad (128.2)$$

我們現在証明: 齐次联結問題的所有解(我們指的是在无穷远处为有限阶的分区全純解)都由公式

① 在 Н. И. Мусхелишвили 的論文[7]中,对于稍为較特殊的情形[即曲綫L圍成平面的某一个連通部分(区域)]給出了这个公式.

$$\Phi(z)=\chi^1(z)P_1(z)+\chi^2(z)P_2(z)+\cdots+\chi^n(z)P_n(z)\quad(128.3)$$

給出，其中 $P_1(z)$, $P_2(z)$, $\cdots$, $P_n(z)$ 都是任意多項式，或者，同样地，都由公式

$$\Phi(z)=X(z)P(z)\quad(128.4)$$

給出，其中 $P(z)$ 表示以任意多項式为支量的一个向量

$$P(z)=(P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_n).\quad(128.5)$$

事实上，用表示式(128.2)替代 $G(t)$ 并代入(128.1)中，我們得出

$$[X^+(t)]^{-1}\Phi^+(t)=[X^-(t)]^{-1}\Phi^-(t).$$

由此看出，向量 $[X(z)]^{-1}\Phi(z)$ 在全平面上是全純的；又因为由条件，$\Phi(z)$在无穷远处有有限阶，因此，$[X(z)]^{-1}\Phi(z)$在无穷远处亦有有限阶，从而，有

$$[X(z)]^{-1}\Phi(z)=P(z),$$

其中 $P(z)$ 是一个支量 $P_1(z)$, $P_2(z)$, $\cdots$, $P_n(z)$ 皆为多項式的向量. 因此，推得公式(128.4)，或者，同样地得出公式(128.3).

反之，显然，对于任何选取的 $P_1(z)$, $P_2(z)$, $\cdots$, $P_n(z)$，公式(128.3)或者同样地公式(128.4)都給出問題(128.1)的解，于是我們的結論得証.

2°. 我們指出，为了推导有关每一个解，都可以表成形式(128.3)或者(128.4)的結論，只需假定矩陣 $X(z)$是正規解矩陣就够了①.

但是，在求在无穷远处具有給定的阶数的解时，利用典則解矩陣却更便于选取多項式 $P_1(z)$, $P_2(z)$, $\cdots$, $P_n(z)$.

这就是說，根据在 § 126, 4° 段中所指出的，显然，所有在无穷远处阶数不超过已給整数 k 的解 $\Phi(z)$，都可以由公式

① 如果 $X(z)$ 只是基本解矩陣，那么，情况便不尽相同；在这种情形下，容易看出，为了能得出所有的解，在公式(128.3)中的 $P_1(z)$, $P_2(z)$, $\cdots$, $P_n(z)$ 应該理解为有理函数(而不仅是多項式)，在选取这些有理函数时，要使得解在有限距离内沒有极点.

$$\Phi(z)=\chi^1(z)P_{k+\varkappa_1}+\chi^2(z)P_{k+\varkappa_2}+\cdots+\chi^n(z)P_{k+\varkappa_n} \quad (128.6)$$

給出，其中 $P_{k+\varkappa_j}(z)$ 表示次数不超过 $k+\varkappa_j$ 的任意多項式；当 $k+\varkappa_j<0$ 时，应該假定 $P_{k+\varkappa_j}(z)=0$.

如果多項式 $P_{k+\varkappa_j}(z)$ 中至少有一个其次数达到 $k+\varkappa_j$ 次，那么，解 $\Phi(z)$ 恰好有 k 阶.

如果所有的 $k+\varkappa_j<0$，那么，問題(128.1)沒有在无穷远处的阶数不超过 k 的(非平凡)解.

3°. 从給出齐次联結問題一般解的公式(128.3)导出：只要矩陣 $G(t)$ 适合上面(§122)所加的条件，这个問題的每一个解的边值 $\Phi^+(t)$ 及 $\Phi^-(t)$ 都是属于 H 类的.

事实上，我們已經看到(§126)，总可以作出边值是属于 H 类的正規解矩陣 $X(z)$. 如果把 $X(z)$ 理解为这样的矩陣，那么显然，公式(128.3)的右端总是属于 H 类的.

特别是，从上所述推出，构成任意一个典則解矩陣的元素之边值都具有这个性质.

§129. 关于齐次联結問題的解的某些补充說明

1°. 我們已經看到，在作出(任一个)正規解組以后，便极容易地把齐次联結問題的一般解用明显的形式表出. 我們将会看到，亦可以同样地处理在§132中将要提出和解决的非齐次联結問題.

在这一节中，我們給出在一系列情形下对于正規解矩陣(从而，亦对典則解矩陣)的作法是有帮助的一些說明.

2°. 我們首先指出下述事实. 假定 $L_1, L_2, \cdots, L_p$ 表示构成 L 的一些封閉圍綫. 我們說明，以 L 为边界曲綫的联結問題的正規解組的作出，可以归結为依次作出每次单独地从曲綫 $L_1, L_2, \cdots, L_p$ 中取出一条当作边界曲綫时的联結問題的正規解組.

事实上,假定 $X(z)$ 表示联結問題

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t) \quad 在 L 上 \tag{129.1}$$

的正規解矩陣.

我們找乘积形式

$$X(z)=X_1(z)X_2(z)\cdots X_p(z) \tag{129.2}$$

的 $X(z)$, 其中 $X_k(z)$, $k=1, 2, \cdots, p$ 是在无穷远处为有限阶的,以 L_k 为跳跃曲綫的分区全純矩陣. 从而在 L_k 上,我們应該有

$$X_1(t)X_2(t)\cdots X_{k-1}(t)X_k^+(t)X_{k+1}(t)X_{k+2}(t)\cdots X_p(t)$$
$$=G(t)X_1(t)X_2(t)\cdots X_{k-1}(t)X_k^-(t)X_{k+1}(t)X_{k+2}(t)\cdots X_p(t),$$

因为在 L_j 上有 $X_j^+(t)=X_j^-(t)=X_j(t)$ (当 $j\neq k$). 如果将上述等式两端左乘 $[X_1(t)X_2(t)\cdots X_{k-1}(t)]^{-1}$, 右乘 $[X_{k+1}(t)X_{k+2}(t)\cdots X_p(t)]^{-1}$, 那么,我們得出

$$X_k^+(t)=G_k(t)X_k^-(t) \quad 在 L_k 上, \tag{129.3}$$

此处我們已令

$$G_k(t)=[X_1(t)X_2(t)\cdots X_{k-1}(t)]^{-1}$$
$$\times G(t)[X_1(t)X_2(t)\cdots X_{k-1}(t)] \tag{129.4}$$
$$在 L_k 上,\ k=1, 2, \cdots, p;$$

当 $k=1$ 时,前一个等式应該理解为

$$G_1(t)=G(t) \quad 在 L_1 上.$$

我們現在把 $X_1(z)$, $X_2(z)$, $\cdots$, $X_p(z)$ 分别理解为当 $k=1$, 2, $\cdots$, p 时問題(129.3)的正規解矩陣; 那么,由公式(129.2)所确定的矩陣 $X(z)$ 显然是問題(129.1)的正規解矩陣. 但是,我們从 $X_1(z)$ 开始可以依次地作出矩陣 $X_1(z)$, $X_2(z)$, $\cdots$, $X_p(z)$. 事实上,矩陣 $G_1(t)$ 是給定的: $G_1(t)=G(t)$ 在 L_1 上; 求出 $X_1(z)$ 以后, 我們根据公式: 在 L_2 上 $G_2(t)=[X_1(t)]^{-1}G(t)X_1(t)$ 确定 $G_2(t)$, 等等.

此处所介紹的方法是在 §35, 4° 段中曾經采用过的方法之推广; 区别在于: 在現在因子 $X_1(z)$, $X_2(z)$, $\cdots$, $X_p(z)$ 皆是矩陣,

因此，在一般情形下它們是不能交換次序的.

在 Н. П. Векуа 的論文[17]中，指出了在形式上比这里要稍为复杂一些的方法.

3°. 有时在討論齐次联結問題的解时，更恰当的是要討論比到目前为止我們所討論过的要稍一般一些的解，亦即，**分区半純解**. 我們把分区半純解理解为具有下述性质的解：这个解可以从左側及右側連續拓展到 L 上，它在由曲綫 L 分割平面而得出的各个連通部分內，除了有有限多个极点(在无穷远点处可能出現的极点亦包括在內)外，都是全純的；我們亦不允許它有其他的奇点.

显然，从每一个分区半純解乘以适当的多項式以后，可以得出在无穷远处有有限阶的分区全純解.

我們把 n 个其行列式不恒等于零的分区半純解的解組叫做**基本的分区半純解組**，而把它的矩陣叫做**基本的分区半純解矩陣**.

容易看出，求出了任一个基本的分区半純解組以后，立刻可求出在无穷远处有有限阶的分区全純解組：为此，只需用适当的多項式乘分区半純解組中的解就可以了，此时，基本的分区半純解矩陣对应的列分别乘以这些多項式.

作出了基本的分区全純解矩陣以后，正象在§126中那样，进一步可以作出正規解矩陣和典則解矩陣.

4°. 下面是立可找出基本解組的一个最簡单的特殊情形①.

假定 L 是由一条簡单的封閉圍綫所构成的，又假定 $G(t)$ 是元素皆为有理函数的矩陣. 那么，矩陣

$$X(z)=\begin{cases} G(z) & \text{当 } z\in S^+, \\ E & \text{当 } z\in S^-, \end{cases}$$

显然是一个基本的分区半純解矩陣，其中 E 是单位矩陣，而 S^+ 及 S^- 是由曲綫 L 分割平面而得出的区域(并且 S^+ 在 L 上左側).

如果 L 是由几条封閉圍綫所构成的，又若将 S^+ 及 S^- 照§29, 1°

① 參照 Н. П. Векуа [8].

段中那样理解,再若在 L 上的正方向亦照 § 29 中那样选擇,那么,上面所指出的結果都仍然是有效的.

5°. 比上面的情形稍为一般的情形是下列情形:L 是由有限条簡单的封閉圍綫 $L_1, L_2, \cdots, L_p$ 所构成的,在 $L_1, L_2, \cdots, L_p$ 上任意选定其正方向,而

$$G(t)=G^{(k)}(t) \quad \text{在 } L_k \text{ 上}, \; k=1, 2, \cdots, p,$$

其中 $G^{(k)}(t)$ 是元素皆为有理函数的矩陣(这些元素在不同的圍綫上可能是不同的). 此时,显然可以用下法来作出基本解矩陣 $X(z)$(参照 2° 段及 4° 段).

我們用 S_k^+ 及 S_k^- 表示由 L_k 分割平面而得出的平面部分,且如此采用記号,使当在 L_k 上沿着它的正方向移动时,区域 S_k^+ 保持在左側,当 $t\in L_1$ 时,我們作出矩陣 $G_1(t)=G^{(1)}(t)$;然后注意到 $G_1(t)$ 的元素都是有理函数,有

$$X_1(z)=\begin{cases} G_1(z), & \text{当 } z\in S_1^+, \\ E, & \text{当 } z\in S_1^-. \end{cases}$$

再者,当 $t\in L_2$ 时,$G_2(t)=[X_1(t)]^{-1}G^{(2)}(t)X_1(t)$;然后考虑到矩陣 $G_2(t)$ 的元素亦都是有理函数,于是有

$$X_2(z)=\begin{cases} G_2(z), & \text{当 } z\in S_2^+, \\ E, & \text{当 } z\in S_2^- \end{cases}$$

等等.

矩陣 $X_1(z)X_2(z)\cdots X_p(z)$ 显然是原来問題的基本的分区半純解矩陣.

6°. 最后我們指出,齐次联結問題(129.1)显然与下列問題是等价的:将給定在 L 上的矩陣 $G(t)$ 表成乘积

$$G(t)=X^+(t)[X^-(t)]^{-1}$$

的形式,其中 $X^+(t)$ 及 $X^-(t)$ 都是某一个分区全純解矩陣 $X(z)$ 的边值,并且 $\det X(z)$ 在有限距离内处处都不取值零.

事实上,如果上述表示式成立,那么,矩陣 $X(z)$ 显然是問題

(129.1)的正規解矩陣.

特別是[①],如果 S^+,S^- 所表示的与 §29,1° 段中的是相同的,在 L 上正方向的选法亦与 §29 中的相同,又若用任何方法,把 $G(t)$ 表成乘积

$$G(t)=\Omega^+(t)\Omega^-(t) \quad 在 L 上$$

的形式,其中 $\Omega^+(t)$, $\Omega^-(t)$ 是某一个分区半純解矩陣 $\Omega(z)$ 的边值,并且 $\det \Omega(z)$ 不恒等于零,那么,可以认为联結問題(129.1)是解决了.事实上,在这种情形下,矩陣

$$X(z)=\begin{cases} \Omega(z), & 当 z\in S^+, \\ [\Omega(z)]^{-1}, & 当 z\in S^- \end{cases}$$

显然是問題(129.1)的基本的分区半純解矩陣,由这个矩陣出发可以作出正規解矩陣和典則解矩陣.

§130. 典則解組之間的联系. 偏指标的不变性

現在我們轉到研究同一个齐次联結問題的两个不同典則解組之間的联系,我們首先証明:偏指标,亦就是,数 $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\cdots$, $\varkappa_n$(§127,1° 段)对于所有典則解組都是相同的(如果不計較标出典則解中的解所用的号碼次序).

假定

$$\chi^1(z),\ \chi^2(z),\ \cdots,\ \chi^n(z) \tag{130.1}$$

及

$$\zeta^1(z),\ \zeta^2(z),\ \cdots,\ \zeta^n(z) \tag{130.2}$$

是任意两个典則解組,又假定 $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\cdots$, $\varkappa_n$ 及 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n 是与它們所对应的偏指标,因此,$-\varkappa_1$, $-\varkappa_2$, $\cdots$, $-\varkappa_n$ 及 $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, $\cdots$, $-\lambda_n$ 是(130.1)及(130.2)中的解在无穷远处的阶数.

我們认为把这些解如此标上号碼,使 $\varkappa_1\geqslant\varkappa_2\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_n$ 及 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$. 我們必須証明 $\lambda_1=\varkappa_1$, $\lambda_2=\varkappa_2$, $\cdots$, $\lambda_n=\varkappa_n$.

---

① 参照 Ф. Д. Гахов [5];这位著者討論了当 L 包圍平面某一个連通部分,而 $\Omega(z)$(参看后面)是分区全純解矩陣时的情形.

从典則解組的基本性质知道，解(130.2)可以通过解(130.1)用下述形式的公式表出：

$$\zeta^{\alpha}=\chi^{1}P_{\alpha1}+\chi^{2}P_{\alpha2}+\cdots+\chi^{n}P_{\alpha n},\quad \alpha=1,2,\cdots,n, \tag{130.3}$$

其中 $P_{\alpha\beta}$ 是多項式；用类似的公式可以通过解(130.2)把解(130.1)表出.

为了一般起見，我們現在假定

$$\varkappa_1=\varkappa_2=\cdots=\varkappa_k>\varkappa_{k+1},\quad \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_l>\lambda_{l+1},$$

要証明，$\varkappa_1=\lambda_1$，$k=l$. 事实上，将公式(130.3)应用于(130.2)中前 l 个解上，并比較左、右两端的阶数，因为(130.3)右端在无穷远处的阶数不能低于 $-\varkappa_1$，这就表明，$-\lambda_1\geqslant-\varkappa_1$. 交換解組(130.1)及(130.2)所处的地位，我們类似地便得出，$-\varkappa_1\geqslant-\lambda_1$，由此可以断言，$\varkappa_1=\lambda_1$.

对(130.2)中前 l 个解都来比較公式(130.3)左、右两端的阶数，便可知道(130.3)右端仅包含前 k 項，亦就是說[①]，当 $\alpha=1,2,\cdots,l$ 时，

$$\zeta^{\alpha}=\chi^{1}P_{\alpha1}+\chi^{2}P_{\alpha2}+\cdots+\chi^{k}P_{\alpha k}. \tag{130.4}$$

現在如果 $l>k$，那么，从公式(130.4)知道，至少存在一个形式为

$$\zeta^{1}Q_1+\zeta^{2}Q_2+\cdots+\zeta^{l}Q_l=0$$

的关系式，其中 Q_j 是不全为零的一些多項式[①]，而这对于典則解組是不可能的[②]. 交換(130.1)和(130.2)的位置，正好用同样的方法，我們可以証明成立着相反的不等式，因此，$l=k$.

因此，我們有 $\varkappa_1=\lambda_1$，$\cdots$，$\varkappa_k=\lambda_k$，$\varkappa_k>\varkappa_{k+1}$，$\lambda_k>\lambda_{k+1}$. 現在假定，$\varkappa_{k+1}=\varkappa_{k+2}=\cdots=\varkappa_{k+r}>\varkappa_{k+r+1}$，$\lambda_{k+1}=\lambda_{k+2}=\cdots=\lambda_{k+s}>\lambda_{k+s+1}$. 我們証明，$\varkappa_{k+1}=\lambda_{k+1}$，$r=s$. 把公式(130.3)应用于解

---

① 在現在的情形下，显然 $P_{\alpha1}, P_{\alpha2}, \cdots, P_{\alpha k}$ 都是常数，但是，为了(与今后)一致起見，我們把它們看作为多項式的特殊情形.

② 事实上，在相反的情形下，我們显然有 $\det\|\zeta_{\alpha}^{\beta}\|=0$.

$$\zeta^{k+1},\ \zeta^{k+2},\ \cdots,\ \zeta^{k+s},$$

我們首先可以断言，这些公式之右端都不可能仅由前 k 項构成，因为否則，对于 $\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ k+s$，我們有形式为(130.4)的关系式，因此，至少成立着一个形式为

$$\zeta^1 Q_1+\zeta^2 Q_2+\cdots+\zeta^k Q_k+\zeta^{k+1} Q_{k+1}+\cdots+\zeta^{k+s} Q_{k+s}=0 \quad (130.5)$$

的关系式，其中 Q_j 是一些不全为零的多項式，而这是不可能的.

由上所述知道，必然有 $-\lambda_{k+1}\geqslant -\varkappa_{k+1}$. 类似地我們可以得出，$-\varkappa_{k+1}\geqslant -\lambda_{k+1}$，因此，$\lambda_{k+1}=\varkappa_{k+1}$. 現在把公式(130.3)应用到(130.2)中的前 $k+s$ 个解上，我們显然可以有形式为①

$$\zeta^\alpha=\chi^1 P_{\alpha,1}+\chi^2 P_{\alpha,2}+\cdots+\chi^{k+r} P_{\alpha,k+r}, \quad \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ k+s$$

的公式.

如果 $s>r$，那么，从上面这些关系式至少可以得出一个形式为(130.5)的关系式，而这是不可能的. 类似地，我們可以知道，相反的不等式亦不可能成立. 因此，$r=s$.

进一步的推理过程是显然的，于是，我們可以认为上述命題得到了証明.

根据上面的推理，容易指出找出了一个典則解組以后，所有的典則解組的构成法. 但是，我們不准备停留在这一点上；参看 H. П. Векуа 的书[16]，§5.

§131. 相联的齐次联結問題

1° 我們把对应于边界条件

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t) \qquad 在 L 上 \qquad (\mathrm{I})$$

及

$$\Psi^+(t)=[G'(t)]^{-1}\Psi^-(t) \quad 在 L 上 \qquad (\mathrm{I}')$$

的齐次联結問題叫做是**相联的齐次联結問題**；正象通常那样，撇“′”表示取矩陣的轉置矩陣.

① 这些公式中前 k 个与公式(130.4)是一致的，但是，这对我們并不重要.

在相联的問題的解之間存在着緊密的联系. 亦就是, 容易看出, 如果

$$X(z)=\|\chi_\alpha^\beta(z)\|$$

是問題 (I) 的正規解矩陣或者典則解矩陣, 那么,

$$Z(z)=\|\zeta_\alpha^\beta(z)\|=[X'(z)]^{-1}$$

将是相联問題 (I′) 的正規解矩陣或者典則解矩陣.

事实上, 如果 $X(z)$ 是問題(I)的正規解矩陣, 那么, 由正規解矩陣的定义, 行列式

$$\Delta(z)=\det X(z)$$

在有限距离內处处都不等于零. 因此, 矩陣 $[X'(z)]^{-1}$ 的元素 $\zeta_\alpha^\beta(z)$ 都可以由公式

$$\zeta_\alpha^\beta=\frac{\Delta_\alpha^\beta(z)}{\Delta(z)} \tag{131.1}$$

給出, 其中 $\Delta_\alpha^\beta(z)$ 是行列式 $\Delta(z)$ 中元素 $\chi_\alpha^\beta(z)$ 的代数余子式, 且它們都是在无穷远处有有限阶的分区全純函数.

再者, 从关系式

$$X^+(t)=G(t)X^-(t),$$

显然可得

$$[X'^+(t)]^{-1}=[G'(t)]^{-1}[X'^-(t)]^{-1},$$

而这就表明, 矩陣 $[X'(z)]^{-1}$ 是問題(I′)的某 n 个解的一个解組的解矩陣. 这一个解組是正規解組, 因为它的行列式

$$\det Z(z)=\det[X'(z)]^{-1}=\frac{1}{\Delta(z)}$$

在有限距离內处处都不等于零. 这样一来, 当 $X(z)$ 是正規解矩陣时, 我們的結論已經得到了証明.

現在假定, $X(z)$ 是問題(I)的典則解矩陣. 仍然假定用$(-\varkappa_\beta)$表示解 $\chi^\beta(z)=(\chi_1^\beta, \chi_2^\beta, \cdots, \chi_n^\beta)$ 在无穷远处的阶数. 那么, 由典則解矩陣的定义, 行列式

$$\Delta^0(z)=\det\|z^{\varkappa_\beta}\chi_\alpha^\beta(z)\|=\det\|\chi_\alpha^{0\beta}(z)\|$$

在 $z=\infty$ 处是异于零的，此处已令 $\chi_{\alpha}^{0\beta}(z)=z^{\varkappa_\beta}\chi_{\alpha}^{\beta}(z)$. 但是，依据(131.1)，容易看出，

$$\zeta_{\alpha}^{\beta}(z)=\frac{\Delta_{\alpha}^{0\beta}(z)}{\Delta^{0}(z)}z^{\varkappa_\beta}, \tag{131.2}$$

其中 $\Delta_{\alpha}^{0\beta}(z)$ 表示在行列式 $\Delta^0(z)$ 中元素 $\chi_{\alpha}^{0\beta}(z)$ 的代数余子式. 从最后公式首先可以知道，解 $\zeta^{\beta}(z)=(\zeta_1^{\beta}, \zeta_2^{\beta}, \cdots, \zeta_n^{\beta})$ 在无穷远处的阶数正好等于 $\varkappa_\beta$, 行列式

$$\det\|z^{-\varkappa_\beta}\zeta_{\alpha}^{\beta}(z)\|=\frac{1}{\Delta^0(z)}$$

在无穷远处不等于零. 这亦就証明了，矩陣 $Z(z)=[X'(z)]^{-1}$ 是問題(I′)的典則解矩陣.

从上面还可以得出，如果 $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_n$ 是問題(I)的偏指标，那么，$-\varkappa_1, -\varkappa_2, \cdots, -\varkappa_n$ 是相联問題(I′)的偏指标. 因此，相联的問題的总指标大小相等而符号相反.

2°. 特别是，我們考虑有关相联的問題(I)及(I′)在无穷远处取値零的解的問題.

假定 $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_n$ 仍然表示問題(I)的偏指标，又假定

$$\varkappa_1\geqslant\varkappa_2\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_m\geqslant 0>\varkappa_{m+1}\geqslant\varkappa_{m+2}\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_n \tag{131.3}$$

(如果所有 $\varkappa_j$ 都不是負的，那么，$m=n$; 如果它們都是負的，那么，我們认为 $m=0$).

另外，我們还令

$$\lambda=\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_m,\quad -\mu=\varkappa_{m+1}+\varkappa_{m+2}+\cdots+\varkappa_n, \tag{131.4}$$

因此

$$\lambda-\mu=\varkappa. \tag{131.5}$$

依据公式(128.6)，問題(I)在无穷远处取値零的一般解(亦就是，在无穷远处的阶数不超过 $k=-1$ 的解)由公式

$$\Phi(z)=\chi^1(z)P_{\varkappa_1-1}(z)+\chi^2(z)P_{\varkappa_2-1}(z)+\cdots+\chi^n(z)P_{\varkappa_n-1}(z) \tag{131.6}$$

給出，其中 $P_{\varkappa_j-1}(z)$ 是次数不超过 $\varkappa_j-1$ 的任意系数的多項式(当

$\varkappa_j \leqslant 0$ 时，$P_{\varkappa_j-1}(z) \equiv 0$），或者由公式

$$\Phi(z) = X(z) P(z) \tag{131.7}$$

給出，这里 $P(z)$ 为以 $P_{\varkappa_1-1}(z), P_{\varkappa_2-1}(z), \cdots, P_{\varkappa_n-1}(z)$ 为支量的向量：

$$P(z) = (P_{\varkappa_1-1}, P_{\varkappa_2-1}, \cdots, P_{\varkappa_n-1}). \tag{131.8}$$

如果用 $C_1, C_2, \cdots, C_\lambda$ 表示多项式 $P_{\varkappa_1-1}(z), P_{\varkappa_2-1}(z), \cdots, P_{\varkappa_n-1}(z)$ 的系数按照任一种次序排列的結果[①]，那么，容易看出，$P(z)$ 可以表示为下述形式

$$P(z) = C_1 P^1(z) + C_2 P^2(z) + \cdots + C_\lambda P^\lambda(z), \tag{131.9}$$

其中 $P^j(z)$ 是确定的向量，其所有的支量除了有一个外都等于零，而不等于零的支量是 z 的非負整数幂．显然，向量 $P^1(z), P^2(z), \cdots, P^\lambda(z)$ 是綫性无关的．

因此，根据(131.7)，

$$\Phi(z) = C_1 \Phi^1(z) + C_2 \Phi^2(z) + \cdots + C_\lambda \Phi^\lambda(z), \tag{131.10}$$

其中 $\Phi^1(z), \Phi^2(z), \cdots, \Phi^\lambda(z)$ 是由公式

$$\Phi^j(z) = X(z) P^j(z), \quad j = 1, 2, \cdots, \lambda \tag{131.11}$$

所确定的向量，并且它們都是問題(I)的在无穷远处取值零的解，而 $C_1, C_2, \cdots, C_\lambda$ 都是任意常数．

容易看出，向量 $\Phi^1(z), \Phi^2(z), \cdots, \Phi^\lambda(z)$ 是綫性无关的．事实上，如果由公式(131.10)所确定的向量 $\Phi(z)$ 恒等于零，亦就是說，如果

$$\Phi(z) = X(z) P(z) \equiv 0,$$

那么，必定有 $P(z) \equiv 0$，这是因为 $\det X(z) \neq 0$．但是，此时，由向量 $P^1(z), P^2(z), \cdots, P^\lambda(z)$ 的綫性无关性，再由公式(131.9)可以推导出，$C_1 = C_2 = \cdots = C_\lambda = 0$．

---

① 当 $\varkappa_j > 0$ 时，多項式 $P_{\varkappa_j-1}(z)$ 的（任意）系数的个数等于 $\varkappa_j$，当 $\varkappa_j \leqslant 0$ 时，这个个数等于零．因此，根据(131.3)及(131.4)，所有（任意）系数的个数等于

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_m = \lambda.$$

这样一来,問題(I)恰好有λ个在无穷远处取値零的綫性无关解

$$\Phi^1(z),\ \Phi^2(z),\ \cdots,\ \Phi^\lambda(z); \qquad (131.12)$$

这些解的全体由公式(131.6)或者(131.7)給出.

完全类似地,如果注意到,$[X'(z)]^{-1}$是問題(I′)的典則解矩陣,而它的偏指标是$-\varkappa_1,\ -\varkappa_2,\ \cdots,\ -\varkappa_n$,那么,我們就有下列的結果:

問題(I′)的在无穷远处取値零的一般解由公式

$$\Psi(z)=[X'(z)]^{-1}Q(z) \qquad (131.13)$$

給出,其中

$$Q(z)=(Q_{-\varkappa_1-1},\ Q_{-\varkappa_2-1},\ \cdots,\ Q_{-\varkappa_n-1}), \qquad (131.14)$$

并且$Q_{-\varkappa_j-1}=Q_{-\varkappa_j-1}(z)$表示次数不超过$-\varkappa_j-1$的任意多项式(当$\varkappa_j\geqslant 0$时,$Q_{-\varkappa_j-1}\equiv 0$).

我們有与公式(131.9)类似的公式

$$Q(z)=D_1Q^1(z)+D_2Q^2(z)+\cdots+D_\mu Q^\mu(z), \qquad (131.15)$$

其中$D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_\mu$都是任意常数,而$Q^j(z)$表示以多项式为支量的一些确定的綫性无关向量①. 利用这些記号,公式(131.13)可以表成:

$$\Psi(z)=D_1\Psi^1(z)+D_2\Psi^2(z)+\cdots+D_\mu\Psi^\mu(z), \qquad (131.16)$$

其中

$$\Psi^j(z)=[X'(z)]^{-1}Q^j(z). \qquad (131.17)$$

向量

$$\Psi^1(z),\ \Psi^2(z),\ \cdots,\ \Psi^\mu(z) \qquad (131.18)$$

是問題(I′)的在无穷远处取値零的綫性无关解.

这样一来,問題(I′)恰好有μ个在无穷远处取値零的綫性无关解(131.18).

对照上面所得出的結果,并且注意到(131.5),我們还可以断

① $Q^j(z)$的含义与公式(131.9)中的$P^j(z)$的意义是一样的.——譯者注

言：問題(I)与(I′)在无穷远处取値零的綫性无关解的个数之差等于問題(I)的(总)指标.

§132. 非齐次联結問題①

1° 我們这样来提出若干个未知函数的非齐次联結問題：

要求根据曲綫 L 上的边界条件：

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t), \tag{132.1}$$

来找一个在无穷远处有有限阶的，以 L 为跳跃曲綫的分区全純向量 $\Phi(z)=(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n)$，此处 $G(t)$ 是給定在 L 上的 H 类的矩陣，并且 $G(t)$ 在 L 上处处都不是退化的，而 $g(t)$ 是給定在 L 上的 H 类的向量.

用下面的方法我們容易得出这个問題的解.

仍然假定 $X(z)$ 是由(132.1)取 $g(t)=0$ 而得出的齐次問題的典則解矩陣. 那么，由公式(128.2)，

$$G(t)=X^+(t)[X^-(t)]^{-1}.$$

把这个表示式代入(132.1)之中，我們得出

$$[X^+(t)]^{-1}\Phi^+(t)-[X^-(t)]^{-1}\Phi^-(t)=[X^+(t)]^{-1}g(t),$$

由此再根据在§121, 3°段中所指出的結果，可以知道，所討論的問題适合所提出的条件的所有解，都由公式

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L\frac{[X^+(t)]^{-1}g(t)\,dt}{t-z}+X(z)P(z) \tag{132.2}$$

給出，其中 $P(z)$ 是向量

① 早就指出过，Ф. Д. Гахов 曾經給出了这个問題在单个未知函数情形下一个完整的并且是初等的解法. 在他的論文[2]中，他还曾經討論了在若干个未知函数情形下的非齐次問題，并且对于这个情形直接造出了一个与 J. Plemelj [2] 对齐次問題所給出的方程組类似的 Fredholm 积分方程組. 不过，Ф. Д. Гахов 用这个方法并沒有得出比較完整的解. 但是，在这一节中将要指出，利用与 Ф. Д. Гахов 在单个未知函数情形下所用过类似的方法，容易将非齐次問題的求解归結为对应的齐次問題的求解. 在此处所推导的解是在 Н. И. Мусхелишвили 和 Н. П. Векуа 的論文[1]中給出的.

$$P(z)=(P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_n),$$

并且 $P_\alpha=P_\alpha(z)$ 都是任意多項式.

我們把与已給問題对应的齐次联結問題之偏指标 $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_n$ 和总指标 $\varkappa$ 分别叫做已給問題的偏指标和总指标(或者簡称指标).

2°. 从进一步应用的角度来看，特别重要的是要找在无穷远处取值零的解.

亦象在上一节的 2° 段中那样，假定

$$\varkappa_1\geqslant\varkappa_2\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_m\geqslant 0>\varkappa_{m+1}\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_n, \tag{132.3}$$

$$\lambda=\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_m,\quad \mu=-\varkappa_{m+1}-\cdots-\varkappa_n. \tag{132.4}$$

現在我們引进記号

$$[X^+(t)]^{-1}g(t)=h(t)=(h_1,\ h_2,\ \cdots,\ h_n); \tag{132.5}$$

那么，公式(132.2)显然可以改写成

$$\Phi(z)=\chi^1(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{h_1(t)\,dt}{t-z}+P_1(z)\right\}+\cdots$$

$$+\chi^n(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{h_n(t)\,dt}{t-z}+P_n(z)\right\}; \tag{132.6}$$

注意到，对于很大的 $|z|$，有

$$\int_L\frac{h_\alpha(t)\,dt}{t-z}=-z^{-1}\int_L h_\alpha(t)\,dt-z^{-2}\int_L th_\alpha(t)\,dt$$

$$-z^{-3}\int_L t^2h_\alpha(t)\,dt-\cdots, \tag{132.7}$$

又若估算出公式(132.6)右端各个不同項在无穷远处的阶数，那么，容易断言，存在在无穷远处取値零的解的充分和必要条件是自由項 $g(t)$ 适合 μ 个条件：

$$\int_L t^jh_\alpha(t)\,dt=0,\quad j=0,\ 1,\ \cdots,\ -\varkappa_\alpha-1;$$

$$\alpha=m+1,\ m+2,\ \cdots,\ n, \tag{132.8}$$

并且当自由項适合这些条件时，所要找的形式的一般解由公式(132.2)給出，在其中应該假定

$$P(z)=(P_{\varkappa_1-1},\ P_{\varkappa_2-1},\ \cdots,\ P_{\varkappa_m-1},\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0),$$

此处 $P_{\varkappa_j-1}=P_{\varkappa_j-1}(z)$ 表示次数不超过 $\varkappa_j-1$ 的任意多項式(当 $\varkappa_j=0$ 时, $P_{\varkappa_j-1}(z)\equiv 0$).

条件(132.8)的全体可以写成一个条件的形式;亦就是,将等式(132.8)乘以任意常数后,并把它們相加,我們得出

$$\int_L Q(t)h(t)dt=0, \tag{132.9}$$

其中 $Q(t)$ 是由公式

$$Q(t)=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ Q_{-\varkappa_{m+1}-1},\ \cdots,\ Q_{-\varkappa_n-1})$$

所确定的向量,并且 $Q_{-\varkappa_j-1}=Q_{-\varkappa_j-1}(z)$ 表示次数不超过 $(-\varkappa_j-1)$ 的任意系数的多項式.

为一致起見,正象在上一节中那样,今后我們写出

$$P(z)=(P_{\varkappa_1-1},\ P_{\varkappa_2-1},\ \cdots,\ P_{\varkappa_n-1}), \tag{132.10}$$

$$Q(z)=(Q_{-\varkappa_1-1},\ Q_{-\varkappa_2-1},\ \cdots,\ Q_{-\varkappa_n-1}), \tag{132.11}$$

約定好把 $P_\alpha=P_\alpha(z)$, $Q_\alpha=Q_\alpha(z)$ 理解为次数不超过 α 的任意多項式,并且当 $\alpha<0$ 时, $P_\alpha(z)\equiv 0$, $Q_\alpha(z)\equiv 0$.

利用这些記号,若注意到公式(132.5),我們可以把已得出的結果叙述如下:

問題 (132.1) 在无穷远处取值零的解存在的充分和必要条件是自由項 $g(t)$ 适合条件

$$\int_L Q(t)[X^+(t)]^{-1}g(t)dt=0, \tag{132.12}$$

其中 $Q(t)$ 是形式为(132.11)的任意向量;当适合这个条件时,所要求形式的一般解由公式 (132.2) 給出,这里 $P(z)$ 是形式为(132.10)的任意向量.

(132.2)右端的第二項在現在的情形下是由 (132.1) 取 $g(t)=0$ 而得出的齐次問題的在无穷远处取值零的一般解;这一項是所提到的齐次問題在无穷远处取值零的綫性无关解(§131, 2°段)

$$\Phi^1(z),\ \Phi^2(z),\ \cdots,\ \Phi^\lambda(z) \tag{132.13}$$

的带有任意常数系数的綫性組合.

但是,注意到公式①

$$\int_L Q(t)[X^+(t)]^{-1}g(t)dt=\int_L g(t)[X'^+(t)]^{-1}Q(t)dt$$

及公式(131.13),条件(132.12)还可以改写成

$$\int_L \Psi^+(t)g(t)dt=0, \tag{132.14}$$

其中 $\Psi^+(t)$ 表示(132.1)的相联齐次問題在无穷远处取值零的一般解 $\Psi(z)$ 的(左)边值;这个条件等价于 μ 个条件

$$\int_L \Psi^{j+}(t)g(t)dt=0, \quad j=1, 2, \cdots, \mu, \tag{132.15}$$

其中

$$\Psi^{1+}(t), \Psi^{2+}(t), \cdots, \Psi^{\mu+}(t) \tag{132.16}$$

是(132.1)的相联齐次問題在无穷远处取值零的綫性无关解 $\Psi^1(z)$, $\Psi^2(z)$, $\cdots$, $\Psi^\mu(z)$ 的边值 (§131, 2°段). 由后一些向量的綫性无关性,容易看出,向量(132.16)亦是綫性无关的.

§133. 用逐次逼近法求解联結問題

我們已經看到,求解齐次和非齐次的联結問題实际上都可以归結为作出解的基本解矩陣,利用这个解矩陣可以作出正規解矩陣和典則解矩陣. 为了作出基本解矩陣,我們利用了建立在奇异积分方程理論上的方法. 在§122中我們指出了建立在 Fredholm 积分方程理論基础上的 J. Plemelj 的方法.

最近, Г. Ф. Манджавидзе[5] 及 [6] 給出了用逐次逼近法得出的构成基本解矩陣的极簡单的新方法②. 我們在这里对这个方法作一簡要的叙述.

① 参看§118, 公式(118.6).

② 在§122(第575頁注①)中已指出过,这个方法和在那里提到的 Birkhoff 方法是完全不相同的.

在叙述时，我們要用到在 § 49 中部分地介紹过的泛函分析中的某些基本概念和命題.

在叙述这个方法本身之前，我們先指出在 § 49 中引进的范数的某些在这一节中要用到的性质.

为了簡单起見，我們假定 L 是一条簡单的光滑的封閉圍綫[①]. 我們用 S^+ 及 S^- 分别表示由 L 所圍成的有界区域及无界区域；我們将假定：当沿着 L 的正方向移动时，区域 S^+ 保持在 L 的左側.

我們討論給定在 L 上适合 $H(\alpha)$ 条件 $(0<\alpha\leqslant 1)$ 的函数 $f(t)$ 的集合. 根据在 § 49 中所指出的結果，如果用下法引进范数

$$\|f\|=\max|f(t)|+\sup\frac{|f(t_2)-f(t_1)|}{|t_2-t_1|^{\alpha}}$$

$(t,\ t_1,\ t_2\in L)$，那么，这个集合构成一个完备的綫性賦范空間 H^{α}. 我們用 $\|f\|_{\alpha}$ 表示这个范数以表明指数为 α.

如果 $F(t)$ 是元素 $f_{ik}(t)$ 适合 $H(\alpha)$ 条件的矩陣，那么，我們把 $\|F\|_{\alpha}$ 理解为 $\max\|f_{ik}\|_{\alpha}$，而把 $M(F)$ 理解为量 $\max\limits_{t\in L}|f_{ik}(t)|$ 中最大的一个.

不难看出，如果 $f_1(t)$ 及 $f_2(t)$ 是适合 $H(\alpha)$ 条件的函数，那么，

$$\|f_1f_2\|_{\alpha}\leqslant(\max|f_1(t)|\cdot\|f_2\|_{\alpha}+\max|f_2(t)|\cdot\|f_1\|_{\alpha}),\tag{133.1}$$

于是，

$$\|f_1f_2\|_{\alpha}\leqslant\|f_1\|_{\alpha}\|f_2\|_{\alpha}.\tag{133.2}$$

对 n 阶方陣 $F_1(t)$ 与 $F_2(t)$ 之乘积的范数亦有类似的不等式：

$$\|F_1F_2\|_{\alpha}\leqslant n\{M(F_1)\cdot\|F_2\|_{\alpha}+M(F_2)\cdot\|F_1\|_{\alpha}\}\tag{133.1a}$$

及

$$\|F_1F_2\|_{\alpha}\leqslant n\|F_1\|_{\alpha}\cdot\|F_2\|_{\alpha}.\tag{133.2a}$$

依据在 § 18 中所指出的，如果深研所进行过的推导，那么，容易确信，当函数 $\varphi(t)$ 及 $\psi(t)$ 都适合 $H(\alpha)$ 条件 $(\alpha<1)$，并且可

① 我們知道，对簡单的封閉圍綫情形作出了基本解矩陣之后，便可以对某些这样的圍綫的組合的情形作出基本解矩陣(§ 129，2°段).

以用关系式

$$\psi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt$$

把它們联系起来时，不等式

$$\sup\frac{|\psi(t_2)-\psi(t_1)|}{|t_2-t_1|^\alpha}\leqslant C_\alpha \sup\frac{|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|}{|t_2-t_1|^\alpha}$$

是成立的，其中 C_α 是与函数 $\varphi(t)$ 无关的常数.

此外，显然，

$$|\psi(t_0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_L \frac{ds}{|t-t_0|^{1-\alpha}}\cdot\sup\frac{|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|}{|t_2-t_1|^\alpha};$$

把这些不等式相加，便容易看出，

$$\|\psi\|_\alpha\leqslant A_\alpha \sup\frac{|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|}{|t_2-t_1|^\alpha}\leqslant A_\alpha\|\varphi\|_\alpha, \qquad (133.3)$$

其中 A_α 是与 $\varphi(t)$ 无关的常数.

如果 $\varphi(t)$ 及 $\psi(t)$ 用关系式

$$\psi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt+\frac{1}{2}\varphi(t_0)$$

联系起来，那么，不等式

$$\|\psi\|_\alpha\leqslant B_\alpha\|\varphi\|_\alpha \qquad (133.3a)$$

显然亦是成立的，此处 B_α 是与 $\varphi(t)$ 无关的常数. 对于矩陣亦有同样的不等式.

不等式(133.3a)类似著名的 Riesz 定理[①].

我們現在討論上一节中的边值問題

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t)\quad 在 L 上; \qquad (133.4)$$

此处我們把 $g(t)$（以及 $G(t)$）亦理解为 n 阶方陣，而把 $\Phi(z)$ 理解为未知的分区全純的 n 阶方陣（为了今后推导方便才这样做）.

我們假定 $G(t)$ 及 $g(t)$ 在 L 上适合任一个指数 $\mu\leqslant 1$ 的 H 条件；在此处我們还保留了上一节中的其他的限制和記号.

① 參看 M. Riesz [1].

我們取这样一个其元素皆为有理函数（并且它們的极点都不在 L 上）的矩陣 $R(z)$，使有

$$\|G-R\|_\nu<\varepsilon,$$

此处 ε 为某一个正数，而数 $\nu<\mu$①. 如果数 ε 充分小，那么，在 L 上显然有 $\det R(t)\neq 0$，并且 $\|G^{-1}-R^{-1}\|_\nu$ 亦是一个任意小的量（ε 阶的），而 $\|R^{-1}\|_\nu$ 是一个有界的量：

$$\|G^{-1}-R^{-1}\|_\nu\leqslant C\varepsilon,\quad \|R^{-1}\|_\nu\leqslant C_1,$$

其中 C, C_1 都是常数.

引进記号

$$\varphi(z)=\Phi(z)\quad 当\ z\in S^+,\qquad \varphi(z)=R(z)\Phi(z)\quad 当\ z\in S^-,$$

我們可以把边界条件(133.4)改写成形式：

$$\varphi^+(t)-\varphi^-(t)=G_0(t)\varphi^-(t)+g(t),\tag{133.5}$$

其中

$$G_0=(G-R)R^{-1};$$

根据(133.2a)

$$\|G_0\|_\nu\leqslant n\|G-R\|_\nu\|R^{-1}\|_\nu\leqslant nC_1\varepsilon.\tag{133.5a}$$

我們討論分区全純矩陣序列

$$\varphi_m(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{G_0(t)\varphi_{m-1}^-(t)\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(t)\,dt}{t-z}$$

$$(m=1,\ 2,\ \cdots),\tag{133.6}$$

其中 $\varphi_0^-(t)=0$. 显然，$\varphi_m^+(t)$ 及 $\varphi_m^-(t)$ 是适合 $H(\mu)$ 条件的.

从(133.6)得出

$$\varphi_{m+1}(z)-\varphi_m(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{G_0(t)\left[\varphi_m^-(t)-\varphi_{m-1}^-(t)\right]dt}{t-z};$$

再应用 Сохоцкий-Plemelj 公式，我們不难得出，

① 不难証明：可以用有理函数按照 H^ν 空間的范数来逼近适合指数为 μ 的 H 条件的函数 $f(t)$ ($\nu<\mu$；一般讲来，不能取 $\nu=\mu$)：先可以証明，$f(t)$ 可以用变量 t 的分段綫性的函数（亦就是，在弧 $\alpha_k\beta_k$ 上为形式 a_kt+b_k 的函数，$\sum\alpha_k\beta_k=L$，a_k 与 b_k 皆为常数）来逼近；其次，可以証明，能用对 t 具有連續导函数的函数来逼近分段綫性的函数；最后，容易証明，可以用有理函数来逼近这样的函数.

$$\varphi_{m+1}^{-}(t_0)-\varphi_m^{-}(t_0)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G_0(t)[\varphi_m^{-}(t)-\varphi_{m-1}^{-}(t)]-G_0(t_0)[\varphi_m^{-}(t_0)-\varphi_{m-1}^{-}(t_0)]}{t-t_0}dt. \tag{133.7}$$

从而,根据不等式(133.3)

$$\begin{aligned}\|\varphi_{m+1}^{-}-\varphi_m^{-}\|_\nu &\leqslant A_\nu\|G_0\cdot(\varphi_m^{-}-\varphi_{m-1}^{-})\|_\nu\\ &\leqslant nA_\nu\|G_0\|_\nu\cdot\|\varphi_m^{-}-\varphi_{m-1}^{-}\|_\nu\\ &\leqslant A'_\nu\varepsilon\|\varphi_m^{-}-\varphi_{m-1}^{-}\|_\nu,\end{aligned} \tag{133.8}$$

其中 $A'_\nu=n^2C_1A_\nu$.

从不等式(133.8)可以推出

$$\|\varphi_{m+1}^{-}-\varphi_m^{-}\|_\nu\leqslant(A'_\nu\varepsilon)^m\|\varphi_1^{-}\|_\nu,\quad m=1,\ 2,\ \cdots, \tag{133.9}$$

因此,当 $A'_\nu\varepsilon<1$ 时,級数

$$\sum_{m=0}^{\infty}\|\varphi_{m+1}^{-}-\varphi_m^{-}\|_\nu$$

是收斂的.

这样一来,序列 $\varphi_m^{-}(t)$ 按 H^ν 空間的范数收斂于矩陣 $\varphi^{-}(t)$. 同样地 $\varphi_m^{+}(t)$ 收斂于矩陣 $\varphi^{+}(t)$. 矩陣 $\varphi^{+}(t)$ 及 $\varphi^{-}(t)$ 在 L 上适合 $H(\nu)$ 条件,并且它們是在无穷远处取值零的分区全純矩陣 $\varphi(z)$ 的边值;同时它們适合边界条件(133.5).

現在取 $g(t)$ 等于 $G(t)R^{-1}(t)$. 那么,从边界条件(133.5)可以得出

$$\varphi^{+}(t)=G(t)R^{-1}(t)[\varphi^{-}(t)+E]. \tag{133.10}$$

現在在上面所进行的推理中,用矩陣 $G^{-1}(t)$ 替代矩陣 $G(t)$ (此时,R 显然可以换成 R^{-1}),我們可以作出一个在无穷远处取值零,并且适合边界条件

$$\psi^{+}(t)=G^{-1}(t)R(t)[\psi^{-}(t)+E] \tag{133.11}$$

的分区全純矩陣 $\psi(z)$.

从(133.10)及(133.11)可以得出

$$\det\varphi^{+}(t)\cdot\det\psi^{+}(t)=\det[\varphi^{-}(t)+E]\cdot\det[\psi^{-}(t)+E].$$

因此,函数

$$\lambda(z)=\begin{cases}\det\varphi(z)\cdot\det\psi(z), & \text{当 } z\in S^+,\\ \det[\varphi(z)+E]\cdot\det[\psi(z)+E], & \text{当 } z\in S^-\end{cases}$$

在全平面上是全純的；因为它在无穷远处等于1，于是$\lambda(z)\equiv 1$. 由此得出，在S^++L内$\det\varphi(z)\neq 0$，在S^-+L内$\det[\varphi(z)+E]\neq 0$. 这样一来，矩陣

$$\Phi(z)=\begin{cases}\varphi(z), & \text{当 } z\in S^+,\\ R^{-1}(z)[\varphi(z)+E], & \text{当 } z\in S^-\end{cases}$$

是齐次問題

$$\Phi^+(z)=G(t)\Phi^-(t)$$

解的基本的分区半純解矩陣. 正象我們在上面已看到的那样，从这些解出发，可以作出正規解矩陣及典則解矩陣. 这样一来，問題便得到了解决.

上面的方法可以推广到 $G(t)$ 及 $g(t)$ 都是属于 H_0 类的情形 (Г. Ф. Манджавидзе[6])，就我所知，还可以推广到矩陣 $G(t)$ 仅是連續的，而 $g(t)$ 是属于 L_p 类的情形 ($p>1$) (Г. Ф. Манджавидзе 和 Б. В. Хведелидзе[1]).

注釋 上面所进行的推导表明，如果 $G(t)$ 及 $g(t)$ 适合指数为 μ 的 H 条件，那么，問題 (133.4) 的任意解的边値适合指数为 $\mu-\eta$ 的 H 条件，此处 η 是任意小的正数. 进行了补充推导以后，能够指出，当 $\mu<1$ 时，解的边値将适合指数为 μ 的 H 条件.

事实上，从等式(133.7)可以导出：

$$\|\varphi_{m+1}^- - \varphi_m^-\|_\mu \leqslant A_\mu \|G_0(\varphi_m^- - \varphi_{m-1}^-)\|_\mu;$$

但是，依据(133.1a)

$$\|G_0(\varphi_m^- - \varphi_{m-1}^-)\|_\mu \leqslant n\{M(G_0)\|\varphi_m^- - \varphi_{m-1}^-\|_\mu + M(\varphi_m^- - \varphi_{m-1}^-)\cdot\|G_0\|_\mu\}.$$

但是，

$$M(G_0)\leqslant\|G_0\|_\nu<nC_1\varepsilon,$$

$$M(\varphi_m^- - \varphi_{m-1}^-)\leqslant\|\varphi_m^- - \varphi_{m-1}^-\|_\nu\leqslant(A'_\nu\varepsilon)^{m-1}\|\varphi_1^-\|_\nu,$$

后一个不等式是根据(133.9)得出的．这样一来，

$$\|\varphi_{m+1}^{-}-\varphi_{m}^{-}\|_{\mu}\leqslant D_1\varepsilon\|\varphi_{m}^{-}-\varphi_{m-1}^{-}\|_{\mu}+D_2(A_{\nu}'\varepsilon)^{m-1},\quad(133.12)$$

其中

$$D_1=n^2C_1A_{\mu},\quad D_2=nA_{\mu}\|G_0\|_{\mu}\|\varphi_1^{-}\|_{\nu}.$$

从不等式(133.12)可以导出

$$\sum_{m=1}^{N}\|\varphi_{m+1}^{-}-\varphi_{m}^{-}\|_{\mu}\leqslant D_1\varepsilon\sum_{m=1}^{N+1}\|\varphi_{m}^{-}-\varphi_{m-1}^{-}\|_{\mu}+D_2\sum_{m=1}^{N}(A_{\nu}'\varepsilon)^{m-1}$$

或者

$$(1-D_1\varepsilon)\sum_{m=1}^{N}\|\varphi_{m+1}^{-}-\varphi_{m}^{-}\|_{\mu}\leqslant D_1\varepsilon\|\varphi_1^{-}\|_{\mu}+D_2\sum_{m=1}^{N}(A_{\nu}'\varepsilon)^{m-1}.$$

因此，如果 ε 充分小，亦就是說，如果 $D_1\varepsilon<1$, $A_{\nu}'\varepsilon<1$，那么，級数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\|\varphi_{m+1}^{-}-\varphi_{m}^{-}\|_{\mu}$ 是收斂的，亦就是說，序列 $\varphi_{m}^{-}(t)$ 按照空間 H^{μ} 的范数是收斂的，并且其极限矩陣在 L 上适合指数为 μ 的 H 条件．

III. 应用于研究奇异积分方程組

在前一部分中所叙述到的結果是利用第一部分的結果而得出的，这些結果本身亦可以再用来对第一部分中所叙述到的奇异积分方程理論作重要的补充．

§134. 用于特征奇异积分方程組的研究

我們来討論在§119中叫做特征方程組的奇异积分方程組：

$$\sum_{\beta=1}^{n}A_{\alpha\beta}(t_0)\varphi_{\beta}(t_0)+\sum_{\beta=1}^{n}\frac{B_{\alpha\beta}(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi_{\beta}(t)\,dt}{t-t_0}=f_{\alpha}(t_0)$$

$$(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\qquad(134.1)$$

或者用矩陣形式表出：

$$\mathbf{K}^0\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0),\quad(134.2)$$

其中

$$A(t_0)=\|A_{\alpha\beta}(t_0)\|,\quad B(t_0)=\|B_{\alpha\beta}(t_0)\|,$$
$$\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

都是給定在 L 上屬于 H 类的矩陣，而

$$f(t_0)=(f_1,\ f_2,\ \cdots,\ f_n)$$

及

$$\varphi(t_0)=(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_n)$$

分別是 H 类中的已知向量和未知向量.

我們將假定方程組(134.1)(或者同一方程(134.2))是正則型的方程組，这就是說，其主矩陣

$$S(t)=A(t)+B(t),\quad D(t)=A(t)-B(t) \qquad (134.3)$$

在 L 上处处都不是退化矩陣，亦就是說，在 L 上处处都有 $\det S\neq 0$，$\det D\neq 0$.

求方程組(134.1)的解，可以极簡单地归結为和它有紧密联系的联結問題的求解(在§123中为了相反的目的我們已經利用了这种联系).

亦就是，在研究时我們引进分区全純向量

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-z}. \qquad (134.4)$$

此时，根据 Сохоцкий-Plemelj 公式

$$\begin{gathered}\varphi(t_0)=\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0),\\ \frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}=\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0).\end{gathered} \qquad (134.5)$$

把这些值代入(134.2)中，并注意到(134.3)，我們得出(把 t_0 字作 t)

$$S(t)\Phi^+(t)=D(t)\Phi^-(t)+f(t)$$

或者

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t), \qquad (134.6)$$

此处已令

$$G(t)=[S(t)]^{-1}D(t),\quad g(t)=[S(t)]^{-1}f(t). \qquad (134.7)$$

这样一来，方程(134.2)在下述意义下归結为非齐次联結問題：由方程(134.2)的每一个解，根据公式(134.4)，对应問題(134.6)的在无穷远处取值零的确定解，而問題(134.6)每一个这样的解依据公式(134.5)中的第一式与方程(134.2)确定的解相对应．

依据在§132, 2°段中所得出的結果，当且仅当适合条件(132.12)时，問題(134.5)才有在无穷远处取值零的解，并且在这种情形下，解由公式(132.2)給出，在其中 $P(z)$ 具有形式(132.10)．

从公式(132.2)再依据 Сохоцкий-Plemelj 公式，可以得出[①]

$$\Phi^{+}(t_0)=X^{+}(t_0)\left\{\frac{1}{2}[X^{+}(t_0)]^{-1}g(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{[X^{+}(t)]^{-1}g(t)dt}{t-t_0}\right\}-\frac{1}{2}X^{+}(t_0)P(t_0),$$
$$\Phi^{-}(t_0)=X^{-}(t_0)\left\{-\frac{1}{2}[X^{+}(t_0)]^{-1}g(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{[X^{+}(t)]^{-1}g(t)dt}{t-t_0}\right\}-\frac{1}{2}X^{-}(t_0)P(t_0),\qquad(134.8)$$

因此，依据公式 $\varphi(t_0)=\Phi^{+}(t_0)-\Phi^{-}(t_0)$，可以得出未知函数 $\varphi(t)$ 的表示式．为了簡化后一个表示式，再引进下列記号[②]

$$Z(t)=S(t)X^{+}(t)=D(t)X^{-}(t),\qquad(134.9)$$

$$A^{*}(t)=\frac{1}{2}[S^{-1}(t)+D^{-1}(t)],\quad B^{*}(t)=-\frac{1}{2}[S^{-1}(t)-D^{-1}(t)],\qquad(134.10)$$

我們得到

---

① 我們把 P 写成 $-\frac{P}{2}$，这当然沒有什么关系．

② 在(134.9)中以及引进(134.10)时，我們利用了关系式：

$$X^{+}=GX^{-},\quad G=S^{-1}D.$$

$$\varphi(t_0)=A^*(t_0)f(t_0)-\frac{B^*(t_0)Z(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{[Z(t)]^{-1}f(t)dt}{t-t_0}+B^*(t_0)Z(t_0)P(t_0); \tag{134.11}$$

容易看出,充分和必要条件(132.12)在这些記号下可以写成

$$\int_L f(t)[Z'(t)]^{-1}Q(t)dt=0. \tag{134.12}$$

我們提醒一下,在公式(134.11)及(134.12)中

$$\begin{aligned}P(t)&=(P_{\varkappa_1-1},\ P_{\varkappa_2-1},\ \cdots,\ P_{\varkappa_n-1}),\\ Q(t)&=(Q_{-\varkappa_1-1},\ Q_{-\varkappa_2-1},\ \cdots,\ Q_{-\varkappa_n-1}),\end{aligned} \tag{134.13}$$

其中 $P_\alpha=P_\alpha(t)$, $Q_\alpha=Q_\alpha(t)$ 都表示不超过 α 次的任意多項式,并且当 $\alpha<0$ 时, $P_\alpha(t)\equiv0$, $Q_\alpha(t)\equiv0$.

仍然假定

$$\begin{aligned}&\varkappa_1\geqslant\varkappa_2\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_m>0>\varkappa_{m+1}\geqslant\varkappa_{m+2}\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_n,\\ &\lambda=\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_m,\ \mu=-\varkappa_{m+1}-\cdots-\varkappa_n.\end{aligned} \tag{134.14}$$

公式(134.11)右端所包含的向量 $P(t)$,可以表成下述形式(§131, 2° 段):

$$P(t)=C_1P^1(t)+C_2P^2(t)+\cdots+C_\lambda P^\lambda(t), \tag{134.15}$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_\lambda$ 都是任意常数,而 $P^1(t), P^2(t), \cdots, P^\lambda(t)$ 是一些以多項式为支量的完全确定的綫性无关向量.

与此同时,在公式(134.11)中

$$B^*(t_0)Z(t_0)P(t_0)=C_1\gamma^1(t_0)+C_2\gamma^2(t_0)+\cdots+C_\lambda\gamma^\lambda(t_0), \tag{134.16}$$

其中

$$\gamma^\alpha(t_0)=B^*(t_0)Z(t_0)P^\alpha(t_0),\quad \alpha=1, 2, \cdots, \lambda \tag{134.17}$$

是 H 类中确定的向量;容易看出,它們是綫性无关的. 事实上,如果对于某些常数 $C_1, C_2, \cdots, C_\lambda$,(134.16)右端恒等于零,那么,有

$$B^*(t_0)Z(t_0)P(t_0)=-\frac{1}{2}[X^+(t_0)-X^-(t_0)]P(t_0)=0,$$

由此可以知道,向量 $X(z)P(z)$ 在全平面上是全純的;因为它在无

穷远处等于零，因此，必然有 $X(z)P(z)\equiv 0$，由此推出，$P(z)\equiv 0$，这就意味着 $C_1=C_2=\cdots=C_\lambda=0$，而这亦就証明了我們的結論.

在条件(134.12)中的向量 $Q(t)$ 可以表成(§131, 2° 段)形式:

$$Q(t)=D_1Q^1(t)+D_2Q^2(t)+\cdots+D_\mu Q^\mu(t), \qquad (134.18)$$

其中 $D_1, D_2, \cdots, D_\mu$ 都是任意常数，而 $Q^1(t), Q^2(t), \cdots, Q^\mu(t)$ 是一些以多項式为支量的确定的綫性无关向量. 因此，条件(134.12)等价于 μ 个条件

$$\int_L f(t)\psi^\alpha(t)dt=0, \quad \alpha=1, 2, \cdots, \mu, \qquad (134.19)$$

其中

$$\psi^\alpha(t)=[Z'(t)]^{-1}Q^\alpha(t), \quad \alpha=1, 2, \cdots, \mu. \qquad (134.20)$$

向量 $\psi^\alpha(t)$ 都是属于 H 类的. 容易看出，它們是綫性无关的. 事实上，如果对于有些常数 $D_1, D_2, \cdots, D_\mu$，我們有

$$D_1\psi^1(t)+D_2\psi^2(t)+\cdots+D_\mu\psi^\mu(t)=0,$$

那么，$[Z'(t)]^{-1}Q(t)=0$，其中 $Q(t)$ 由公式(134.18)确定；但是，此时，$Q(t)=0$，因为 $\det[Z(t)]^{-1}$ 显然不等于零，而由此再依据向量 $Q^\alpha(t)$ 的綫性无关性有

$$D_1=D_2=\cdots=D_\mu=0.$$

这样一来，我們就有下述的結果:

方程組 (134.1) 或者同一方程 (134.2) 可解的充分和必要条件，由关系式(134.12)給出，这个关系式等价于 μ 个关系式(134.19). 当适合这些条件时，一般解将由綫性地包含 λ 个任意常数的公式(134.11)給出.

我們現在把数 $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_n$ 及 $\varkappa$ 叫做方程組 (134.1) 或者同一方程(134.2)以及算子 $\mathbf{K}^0$ 的**偏指标**及**总指标**. 我們把总指标亦簡单地称做**指标**.

我們指出，如果所有偏指标都不是負的，那么，可解性条件总满足，并且解包含 $\varkappa$ 个任意常数.

我們現在討論由(134.2)取 $f=0$ 而得出的齐次方程. 在这种情形下,可解性条件(134.12)是适合的,并且我們有下述結果:

齐次方程

$$\mathbf{K}^0\varphi=0$$

恰好有 λ 个綫性无关解. 特別是,如果 $\lambda=0$, 亦就是,如果所有偏指标都不是正的,那么,齐次方程就沒有异于零的解.

§135. 特征方程組的相联方程組的研究

1°. 我們現在討論与特征方程組(134.1)相联的奇异积分方程組,亦就是,写成矩陣形式为下列形式的方程組:

$$\mathbf{K}^{0\prime}\psi\equiv A'(t_0)\psi(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{B'(t)\psi(t)\,dt}{t-t_0}=g(t_0), \tag{135.1}$$

其中 $A'(t_0)$, $B'(t_0)$ 是上一节中矩陣 $A(t_0)$, $B(t_0)$ 的轉置矩陣, $g(t_0)$ 是 H 类中的已知向量, $\psi(t)$ 是 H 类中的未知向量.

形式为(135.1)的方程当然可以单独地討論, 但是, 把它与方程組(134.1)或者完全一样的方程(134.2)联系起来討論, 会更为方便;而且这样做并不致失去一般性.

也可以簡单地, 但是要用稍为不同的方法, 便能把方程(135.1)归結为某一个联結問題.

为了这个目的,我們引进在无穷远处取值零的分区全純向量

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{B'(t)\psi(t)\,dt}{t-z}. \tag{135.2}$$

如果注意到公式

$$B'(t_0)\psi(t_0)=\frac{1}{2}[\Psi^+(t_0)-\Psi^-(t_0)],$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{B'(t)\psi(t)\,dt}{t-t_0}=\frac{1}{2}[\Psi^+(t_0)+\Psi^-(t_0)],$$

我們便可断言,方程(135.1)与下列問題是等价的: 要求根据在 L 上的边界条件:

$$2A'(t_0)\psi(t_0)=\Psi^+(t_0)+\Psi^-(t_0)+2g(t_0),$$
$$2B'(t_0)\psi(t_0)=\Psi^+(t_0)-\Psi^-(t_0),$$

来找一个在 L 上确定的，适合 H 条件的向量 $\psi(t)$ 和一个在无穷远处取值零的分区全純向量 $\Psi(z)$．但是，这些边界条件本身又等价于(从这些条件彼此相加和相减而得的)条件:

$$S'(t_0)\psi(t_0)=\Psi^+(t_0)+g(t_0),\quad D'(t_0)\psi(t_0)=\Psi^-(t_0)+g(t_0), \tag{135.3}$$

其中

$$S'(t_0)=A'(t_0)+B'(t_0),\quad D'(t_0)=A'(t_0)-B'(t_0)$$

或者在 L 上

$$\psi(t_0)=[S'(t_0)]^{-1}\Psi^+(t_0)+[S'(t_0)]^{-1}g(t_0),\quad \psi(t_0)=[D'(t_0)]^{-1}\Psi^-(t_0)+[D'(t_0)]^{-1}g(t_0). \tag{135.4}$$

比較上两个等式的右端，我們便得出联結問題(把 t_0 改写成 t)

$$\Psi^+(t)=[G'(t)]^{-1}\Psi^-(t)+\{[G'(t)]^{-1}-E\}g(t), \tag{135.5}$$

其中 $G'(t)$ 亦象通常那样表示矩陣

$$G(t)=[S(t)]^{-1}D(t) \tag{135.6}$$

的轉置矩陣，而 E 是单位矩陣，并且要求所要找的解在无穷远处等于零．解出这个問題以后，我們可以根据公式(135.4)中之一找出 $\psi(t)$．

这样一来，求解与方程組(134.1)相联的方程組(135.1)，可以归結为找与上一节中的問題(134.6)相联的联結問題(135.5)在无穷远处具有同样性质的解．

我們知道，如果 $X(z)$ 是与(134.6)对应的齐次联結問題的典則解矩陣，那么，$[X'(z)]^{-1}$ 是与(135.5)对应的齐次联結問題的典則解矩陣．

其次，由于求解齐次問題和非齐次問題的主要困难在于找典則解矩陣，因此，可以认为，相联的奇异积分方程組(134.1)及(135.1)的求解問題，亦就是，方程

$$\mathbf{K}^0\varphi=f, \quad \mathbf{K}^{0\prime}\psi=g$$

的求解問題是等价的問題.

2° 我們特別討論与方程

$$\mathbf{K}^0\varphi=0$$

相联的齐次方程(方程組)

$$\mathbf{K}^{0\prime}\psi=0.$$

与 $\mathbf{K}^{0\prime}\psi=0$ 对应的联結問題(135.5)变成了齐次联結問題

$$\Psi^+(t)=[G'(t)]^{-1}\Psi^-(t).$$

后一个問題在无穷远处取值零的所有解,都由公式(§131, 2°段)

$$\Psi(z)=[X'(z)]^{-1}Q(z) \tag{135.7}$$

給出,其中利用了§131, 2°段中的記号

$$Q(z)=(Q_{-\varkappa_1-1},\ Q_{-\varkappa_2-1},\ \cdots,\ Q_{-\varkappa_n-1}), \tag{135.8}$$

并且 $Q_\alpha=Q_\alpha(z)$ 表示次数不超过 α 的任意多項式(当 $\alpha<0$ 时, $Q_\alpha(t)\equiv0$).

所要求的方程 $\mathbf{K}^{0\prime}\psi=0$ 的一般解可从公式(135.4)中的任何一个确定,在其中現在我們应該假定 $g(t_0)=0$. 如果我們同时利用記号(134.9),那么,我們就得出要找的一般解为形式

$$\psi(t)=[Z'(t)]^{-1}Q(t), \tag{135.9}$$

或者如果回忆起,依据公式(131.15)

$$Q(t)=D_1Q^1(t)+D_2Q^2(t)+\cdots+D_\mu Q^\mu(t), \tag{135.10}$$

其中 $D_1, D_2, \cdots, D_\mu$ 是一些任意常数,而 $Q^1(t), Q^2(t), \cdots, Q^\mu(t)$ 是一些以多項式为支量的确定的綫性无关向量,那么,我們就有

$$\psi(t)=D_1\psi^1(t)+D_2\psi^2(t)+\cdots+D_\mu\psi^\mu(t), \tag{135.11}$$

其中

$$\psi^\alpha(t)=[Z'(t)]^{-1}Q^\alpha(t), \quad \alpha=1, 2, \cdots, \mu \tag{135.12}$$

显然是齐次方程 $\mathbf{K}^{0\prime}\psi=0$ 的綫性无关解.

現在我們看出,出現在方程 $\mathbf{K}^0\varphi=f$ 的可解性条件(134.19)

中的，并且由公式(134.20)所确定的向量 $\psi^{\alpha}(t)$ $(\alpha=1, 2, \cdots, \mu)$ 是与公式(135.12)所确定的向量一致的，并且它們是相联齐次方程 $\mathbf{K}^{0\prime}\psi=0$ 的綫性无关解的完备系．根据 §120 中的一般性定理 I 可以知道，这果然是如此．

3°. 在上一节中曾經証明了，齐次方程 $\mathbf{K}^{0}\varphi=0$ 的綫性无关解的个数等于 λ；剛才我們断定了，相联齐次方程 $\mathbf{K}^{0\prime}\psi=0$ 的綫性无关解的个数等于 μ．回想起，$\lambda-\mu=\varkappa$，我們便得出下述結果：

相联的齐次方程 $\mathbf{K}^{0}\varphi=0$ 及 $\mathbf{K}^{0\prime}\psi=0$ 的綫性无关解的个数之差等于算子 $\mathbf{K}^{0}$ 的(总)指标．

把这个結果与 §120 的定理 II 对照一下，并且回想起，根据算子 $\mathbf{K}$ 的指标之定义可以知道，$\mathbf{K}$ 的指标等于 $\mathbf{K}^{0}$ 的指标，而算子 $\mathbf{K}^{0}$ 是 $\mathbf{K}$ 的特征部分，我們便得出 §120 中定理 III 的証明，在 §120 中并沒有說出証明．

§136. 将联結問題的解应用于奇异积分方程組的正則化

1°. 完全类似于在 §57 中对于单个方程的情形那样，从在 §§134, 135 中所得出的特征奇异积分方程組及其相联方程組的解，容易导出奇异积分方程組的一个正則化的方法．

特别是，从这方法出发，能够得出在 §120 中用其他方法証明过的基本定理．事实上，在 Н. П. Векуа 完成的著作中，便首先是这样来証明这些定理的(如果不考虑到首先由 G. Giraud 証明过的定理)，在这著作中仅利用了我的一般性指示．在我們合作的一篇論文(Н. И. Мусхелишвили 和 Н. П. Векуа[1])中，对这篇論文的結果作了一些簡化和很多补充(較重要的补充是指标 $\varkappa$ 的明显和有效的表示式)；在本章第二部分中主要利用了它的一部分結果．

剛才所指出的正則化方法在一般情形下效果比之 §120 中所指出的方法要来得差，因为它們和若干个未知函数的联結問題是

有联系的，而后一种联結問題，一般讲来，与单个未知函数的情形是不同的，它是不可能完整地解出的(亦可以参看 2° 段).

但是，在一系列具有較大实际意义的特殊情形中，与所討論的奇异积分方程組对应的联結問題都可以有效地解决，因此，剛才所指出的正則化方法从应用的角度来看亦是非常有用的.

例如，当矩陣 $A(t)$ 及 $B(t)$ 的元素都是有理函数 (从而矩陣 $G(t)=[A(t)+B(t)]^{-1}[A(t)-B(t)]$ 的元素亦都是有理函数) 时 (§129) 以及在某些其他的情形下①，便是这样.

2° 在§55 中叙述过的，基于 И. Н. Векуа 等价性定理的研究奇异积分方程的方法，亦可以推广到奇异积分方程組的情形. 在 Н. П. Векуа 有价值的論文[2] 中便是这样做的，我們让讀者去参看这篇論文. 特别应該指出，将奇异积分方程組正則化为与它等价的 Fredholm 方程組，可以不通过实际求解对应的联結問題，这就使得这一种正則化的方法是一个有效的方法.

在 Н. П. Векуа 的論文[10] 中，将在§59, 1° 段中所指出 И. Н. Векуа 的結果推广到了奇异积分方程組的情形.

§137. 关于某些推广和应用的簡单介紹

1° 从这一章所叙述过的結果的重要推广中(这些結果对一系列問題的应用具有重要的意义)，我們首先指出对于若干个未知函数的联結問題的求解和奇异积分方程組的理論在間断系数情形上的推广.

J. Plemelj 在我們不只一次提到过的他的論文[2] 中，曾經給出了具有間断系数的齐次联結問題的一个特殊情形[亦就是，系数是分段常数的情形(与这个情形对应的 Riemann 問題原先是由

① 参看 Н. П. Векуа 及 Д. А. Квеселава [1], [2], Н. Г. Чеботарев 及 Ф. Д. Гахов[1], Ф. Д. Гахов[5], Д. И. Шерман[7], Г. Н. Чеботарев[1], [2]; 亦可以参看本书 §129.

Riemann 提出的;参看 § 122)]的求解.

Н. П. Векуа [3], [4] 曾經給出了联結問題和奇异积分方程組在系数属于 H_0 类的情形下的求解. 在这两篇論文中, 所討論的方程組是由方程 (96.11), (96.12) 将未知函数 φ, ψ 以及右端 f, g 换成向量, 并将函数 $k(t_0, t)$ 换成矩陣而得出的. 在 Н. П. Векуа 的論文[6]中, 把上面的結果应用于求解奇异积分方程 $\mathbf{K}\varphi=f$, 此处 $\mathbf{K}$ 是由 § 96 中公式(I) 所确定的算子, $K(t_0, t)$ 是 H_0 类中的函数, 但是并不要求 $\mathbf{K}$ 可以归結为同一节中的形式(a)和(b)之一. 在 Н. П. Векуа 的論文[7]中解决了奇异积分方程組类似的問題. 前面所提到的結果在 Н. П. Векуа 的书[16]中都作了介紹.

在 Ф. Д. Гахов 的論文[6]中, 指出了, 可以用略有不同的方法求解具有間断系数的联結問題. 在 Л. Г. Магнарадзе 的論文[7]中給出了一个推广. 在 Ф. Д. Гахов 的論文[7], [8]中, 还討論了在联結問題中 $\det G(t)$ 可以取值零或者变成无穷大量的某些情形.

在上面所提到的各篇論文中, 所談到的都是当 L 由一些光滑圍綫所构成的情形. 在 Н. П. Векуа 的論文[14]中, 討論了 L 由一些逐段光滑的簡单圍綫所构成的情形; 亦可以参看他的书[16].

Г. Ф. Манджавидзе[2] 把 §§ 110, 111 中所叙述过的結果推广到了方程組的情形.

2°. 在 М. П. Ганин 的論文[1]中, 給出了具有下列性质的奇异算子 $\mathbf{R}$ 的作法: 在方程 $\mathbf{K}\varphi=f$ (簡单地表示方程組) 为可解的情形下, 它等价于方程 $\mathbf{RK}\varphi=\mathbf{R}f$, 后一个方程是 Fredholm 方程(方程組); 在这篇文章中著者引用了 И. Н. Векуа [7] 的一个想法. 在 М. П. Ганин 的論文[2]中还給出了具有同样性质的其他算子的造法, 这种算子是 В. Д. Купрадзе[4] 所作出的算子的推广; 那位著者并沒有注意到这个作法具有下列缺点: 它需要找出两

个奇异积分方程組的所有解.

3°. 我們指出,在 Д. И. Шерман 的論文[7]及[9]中所指出的奇异积分方程組的一个新的正則化方法，这个方法还可以应用到某些不属于正則型的方程組.

4°. 在 Б. В. Хведелидзе 的論文[16]，[18]中，証明了：在这一章中所得出的有关若干个未知函数的联結問題的主要結果，对于下述情形仍然是有效的:在边界条件(132.1)中的非退化矩陣 $G(t)$是属于 H 类的，向量 $g(t)$ 是属于 $\mathfrak{L}_p$ 类的 $(p>1)$，L 是一条 Ляпунов 曲綫，而未知向量 $\Phi(z)$ 可以表成以 L 为跳跃曲綫、并且其密度是属于 $\mathfrak{L}_p$ 类的 Cauchy 型积分. 后来，在 Г. Ф. Манджавидзе 和 Б. В. Хведелидзе 的論文[1]中对这些結果作了重要的补充. 亦就是說，上述两位著者証明了，对于非退化矩陣 $G(t)$ 只要假定它是連續的就够了.

在 Б. В. Хведелидзе 的論文[17]及[18]中，就下列的情形論証了 Noether 定理对奇异积分方程組的正确性:在方程(119.6)中的矩陣 $A(t_0)$，$B(t_0)$ 在 L 上处处都是連續的或者逐段連續的，并且条件(119.11)在 L 上处处都是成立的，而未知函数及已知函数 $\varphi(t)$ 及 $f(t)$ 是属于 $\mathfrak{L}_p(\rho; L)$ 类的，此处 $p>1$，$\rho(t)$ 是形式为(116.4)的某个函数，又 $\mathbf{k}$ 为全連續算子.

还应該指出，在 Б. В. Хведелидзе 的論文[18]中，对敞开的圍綫的情形或者对系数具有第一类間断点的情形，在作出正則化算子时，与在 § 120 中所做的类似，并沒有引用到联結边界問題.

5°. 在 Б. В. Хведелидзе 的論文 [4] 中，給出了我們叫做問題 V(参看 §§ 70, 71) 的問題的求解推广到若干个未知函数的情形上.

6°. 在 Н. П. Векуа 的論文[5]中，給出了与 5° 中相同的問題的求解，但是已經推广到了間断系数的情形①.

① 后来，这个結果在 Б. В. Хведелидзе 的論文[18]中得到了推广.

7°. Б. В. Хведелидзе 給出了在 §76, 3° 段中所提到的椭圓型方程的 Poincaré 問題以及这个問題的求解.

在 А. В. Бицадзе 的副博士学位論文中(这篇論文的摘要发表在他的論文[1]中),給出了对椭圓型方程組

$$\Delta u_j+\sum_{k=1}^{n}\left[A_{jk}(x, y)\frac{\partial u_k}{\partial x}+B_{jk}(x, y)\frac{\partial u_k}{\partial y}+C_{jk}(x, y)u_k\right]=0,$$
$$j=1, 2, \cdots, n$$

情形的推广，其中 $A_{jk}(x, y)$, $B_{jk}(x, y)$, $C_{jk}(x, y)$ 都是其所有变量的整函数.

З. И. Халилов[1]将类似的方法应用到广义的多調和方程組的情形(亦可以参看 З. И. Халилов[2]).

8°. 在 Л. Г. Магнарадзе 的論文[2]中，在 Н. П. Векуа 的論文[28]中，在 Р. С. Исаханов 的論文[4]中以及其他的論文中，給出了把 §117 中所指出的結果推广到了若干个未知函数的情形.

9°. 在 Н. П. Векуа 的論文[9], [11], [12], [15], [19], [20] (前四篇論文的結果在同一位著者的书[16]中都叙述过)中，給出了把 §81, 4° 段所指出的問題的求解推广到若干个未知函数的情形上，并且将这个結果应用到了一种推广后的奇异积分方程組.

在 М. П. Ганин 的論文[4]中，給出了研究上述类型的奇异积分方程組的其他方法. 在他的論文[3]中，提出了作为上述問題中的一个推广的非常广泛的問題，并且把这个問題归結为奇异积分方程組. 这一位著者在那一篇論文中并没有对所得出的方程組进行过研究.

10°. 在 А. В. Месис 的論文[3]中，討論了当系数满足一定条件的代数函数情形下的齐次联結問題.

11°. 在 Г. Н. Чеботарев 的論文[3]中以及在 Ю. Л. Шмулян 的論文[1]及[2]中，都专門研究了联結問題的偏指标.

在 Б. В. Боярский 的論文 [3], [4], [5] 中，在 И. Ц. Гохберг

和 M. Г. Крейн 的論文[1], [2]中以及在 Г. Ф. Манджавидзе 的論文[4]中，都研究了联結問題的偏指标对于矩陣 $G(t)$ 微小变化的稳定性問題. 在最后一篇論文中所得出的关于偏指标是稳定的結論是不正确的.

12°. 在已經提到过的 И. Ц. Гохберг 和 М. Г. Крейн 的論文[2]中以及在 М. Г. Крейн 的論文[1]中 (在那里可以找到对更早以前的論文的介紹),都曾經研究了在半直綫上的奇异积分方程組.

13°. 在 Г. Ф. Манджавидзе 的論文[4], [5], [6] 中以及在 В. В. Иванов 的論文[5]中,都研究了若干个未知函数的联結問題的近似求解問題.

14°. 下列边界問題是这一章所研究过的联結問題的推广:

要求根据边界条件

$$\Phi^{+}(t)=A(t)\Phi^{-}(t)+B(t)\overline{\Phi^{-}(t)}+g(t), \qquad (137.1)$$

找一个在无穷远处有有限阶的分区全純向量 $\Phi(z)=(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n)$, 此处 $A(t)$, $B(t)$ 都是适合 H 条件的已知矩陣, $g(t)$ 是已知向量,它亦适合 H 条件.

А. И. Маркушевич [1] 提出了在一个未知函数情形下的这个問題.

Н. П. Векуа [21] 曾經研究了这个問題.

附　录

一、光滑曲綫和逐段光滑曲綫

1° 在 §1 中，我們已經給出了一条光滑弧 L 或者(敞开的或者封閉的)光滑圍綫 L 的定义；我們仍然沿用那一节中的記号．特别是，我們把弧 L 的参数表示式写成形式

$$x=\varphi(s), \quad y=\psi(s), \quad s_a\leqslant s\leqslant s_b, \tag{1}$$

此处 s 是弧坐标．我們用 l 表示弧 L 的长度，因此，有

$$l=s_b-s_a. \tag{2}$$

假定 t_1 与 t_2 是 L 上的任意两个点．我們用 $\sigma=\sigma(t_1, t_2)$ 表示弧 L 上介于 t_1 和 t_2 之間的那一部分之长度，并且在 L 是封閉圍綫的情形下，我們把 $\sigma=\sigma(t_1, t_2)$ 指的是較短的那一段弧的长度．这样一来，在封閉圍綫的情形下 $0\leqslant\sigma\leqslant\frac{l}{2}$，在敞开弧綫的情形下 $0\leqslant\sigma\leqslant l$．另外，我們还用 $r(t_1, t_2)=r$ 表示点 t_1 与 t_2 之間的距离．显然，r 是点 t_1 与 t_2 的弧坐标 s_1 与 s_2 的連續函数．我們考虑所有使得

$$\sigma(t_1, t_2)\geqslant\lambda, \quad 0<\lambda<\frac{l}{2} \tag{*}$$

的各对点 t_1 和 t_2，其中 λ 是从上述区間内任意取定的一个数，在成立(*)的假定下，令

$$\rho=\rho(\lambda)=\min r(t_1, t_2). \tag{**}$$

至少有一对点 t_1 与 t_2，达到这个最小值．容易看出，$\rho(\lambda)>0$．事实上，如果 $\rho(\lambda)=0$，那么，弧 L 将自身相交，但是这与假定矛盾．

这样一来，对每一个数 $\lambda\left(0<\lambda<\frac{l}{2}\right)$，都对应地存在一个具有下述性质的数 $\rho=\rho(\lambda)>0$：如果以 L 上任意一个点 t_0 为中心，以 $\rho_0<\rho$ 为半徑作圓周，那么，在圍綫 L 上所有使得 $\sigma(t_0, t)\geqslant\lambda$ 的点 t，都位在这个圓周的外面.

2°. 假定 α_0 是任意給定的銳角：$0<\alpha_0<\frac{\pi}{2}$. 从 L 的切綫方向变化的連續性得出，存在着一个仅与 α_0 有关的，并且具有下述性质的数 $\sigma_0=\sigma_0(\alpha_0)>0$：只要 L 上两点 t_1 和 t_2 适合条件 $\sigma(t_1, t_2)\leqslant\sigma_0$，在 L 上点 t_1 和 t_2 处的切綫之間所夹的角 α 就不超过 α_0. 以后我們将要假定 $\sigma_0<\frac{l}{2}$.

我們考虑 L 上长度不超过 σ_0 的弧 t_1t_2. 由上所述知道，联接弧 t_1t_2 上任意两点 τ_1 和 τ_2 的弦与 t_1(或者 t_2)处的切綫之間所夹的銳角将不超过 α_0；事实上，在弧 $\tau_1\tau_2$ 上总可以找到一点，在这个点处的切綫平行于所討論的弦.

3°. 假定 t_0 是 L 上任一个定点. 我們討論由 L 上适合条件：$\sigma(t_0, t)\leqslant\sigma_0$ 的那些点 t 所构成的弧 L_0，此处 σ_0 表示由上所述的数. 不失一般性，在 L 是一条封閉圍綫的情形下，我們可以认为，与 (1) 中的値 $s=s_a$ 或者 s_b 所对应的点不在 L_0 上. 点 t_0 把 L_0 分成对应于 $s>s_0$ 及 $s<s_0$ 的两部分；例外的情形只是当 L 为一条敞开弧，而 t_0 是弧的端点之一的情形. 我們討論当 t 沿着 L 移动时，距离 $r(t_0, t)$ 的变化. 容易看出，$\frac{dr}{ds}=\pm\cos\alpha$，其中 α 是弦 t_0t 和 t 处的切綫之間所夹的銳角；对于 $s>s_0$ 的部分，取“+”号，对于 $s<s_0$ 的部分，取“−”号. 这样一来，我們看出，在这些部分的每一个上，距离 r 是 s 的单調函数，因为 $\cos\alpha\geqslant\cos\alpha_0=k_0$，$0<k_0<1$. 在这两部分上，我們都有

$$k_0|s-s_0|\leqslant r(t_0, t)\leqslant|s-s_0|. \qquad (***)$$

现在以 t_0 为中心，以 $R\leqslant R_0$ 为半徑作圓周 Γ，其中 R_0 是数

$\rho(\sigma_0)$ 及 $k_0\sigma_0$ 中之較小者；我們把 $\rho(\sigma_0)$ 理解为 1° 段中的 $\rho(\lambda)$ 在 $\lambda=\sigma_0$ 处的值.

容易証明,圓周 Γ 恰好与 L 相交于两点,除了当 L 为一条敞开弧,且从 t_0 到最近的端点之距离小于 R 时的情形是例外;此时,L 仅与圓周 Γ 相交于一点.

实际上,首先假定 L 是一条封閉圍綫.当 s 从 s_0 增加到 $s_0+\sigma_0$ 时,距离 $r(t_0, t)$ 从值 0 单調地增加到值 $r_1\geqslant k_0\sigma_0\geqslant R_0$;因此,点 t 与圓周 Γ 恰好相遇一次;当 s 从 s_0 减少到 $s_0-\sigma_0$ 时,亦有同样情况发生.依据在 1° 段中所指出的,不存在 L 和 Γ 的其他交点.

亦可以完全类似地研究敞开圍綫的情形.

我們指出,从对于充分小的 $\sigma(t_0, t)$ 是成立的不等式 (***),显然可以得出,对于 L 上任一对点都成立的不等式

$$k_0\sigma(t_1, t_2)\leqslant r(t_1, t_2)\leqslant\sigma(t_1, t_2) \qquad (0<k_0<1), \tag{3}$$

此处,用 k_0 表示上述区間内的一个常数,并且 k_0 与 t_1 及 t_2 在 L 上的位置是无关的.

4°. 現在我們討論在 §1, 4° 段中所定义的簡单的逐段光滑弧.

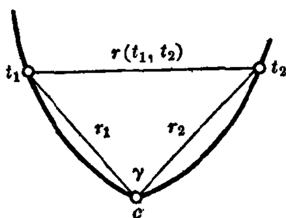


图 22

簡单的逐段光滑弧显然亦可以用形式为 (1) 的参数表示式来表示,但是,导函数 $\varphi'(s)$ 和 $\psi'(s)$ 在各个光滑部分的联接点处(亦就是,在角点处)可以有第一类的間断点.如果当經过角点时,切綫方向变成它的反方向,那么,这样的点就是返回点或者尖点.

我們指出,在不是尖点的角点的邻域内,不等式 (3) 仍然是成立的.事实上,显然只要驗証:在下述情形下,不等式(3)是成立的就够了:点 t_1 与 t_2 在角点 c 的邻域内,同时又分别在 c 的两側.从对于三角形 ct_1t_2 的分析(图 22),可以看出,如果 r_1 及 r_2 是从

t_1 及 t_2 到 c 点的距离，那么，有

$$(r_1+r_2)\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant r(t_1,\ t_2)\leqslant r_1+r_2,$$

其中 γ 是 c 点的顶角．当 $t_1,\ t_2$ 与 c 充分靠近时，我們有

$$\sin\frac{\gamma}{2}\geqslant k_0',$$

此处 k_0' 是一个正常数．

此外，再将不等式 (3) 应用到光滑弧 ct_1 及 ct_2 上，我們得出 $k_0''(\sigma_1+\sigma_2)\leqslant r_1+r_2\leqslant\sigma_1+\sigma_2$，此处 σ_1 和 σ_2 是弧 ct_1 和 ct_2 的长度，因此，$\sigma(t_1,\ t_2)=\sigma_1+\sigma_2$，而 k_0'' 是适合不等式 $0<k_0''<1$ 的常数．由此可以得出我們的結論．

二、Cauchy 型积分在角点附近的性质

在这一个附录中，我們要考虑 Cauchy 型积分在一条簡单的、逐段光滑的积分曲綫的角点附近的性质．这个問題是在 § 26 中曾經研究过的特殊情形，但是，在此处不依据 § 26 中的結果，我們可以直接来研究它．此时，我們得出一些重要的，但是在本书正文中沒有推导过的公式．为了便于讀者参考起見，我們在此重复某些在本书正文中进行过的（形式上略有不同的）推理．

1°．假定 L 是一条封閉的或敞开的，簡单的逐段光滑弧，又假定 $\varphi(t)$ 是曲綫 L 上的点 t 的函数．$\varphi(t)$ 同时又是 L 上的弧坐标 s 的函数．

当讲到函数 $\varphi(t)$ 在曲綫 L 的某个部分上是适合 $H(\mu)$ 条件的时，現在应該区分，我們所考虑的函数是 t 的函数，还是 s 的函数．

在第一种情形下，$H(\mu)$ 条件由不等式

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant 常数\cdot r_{12}^{\mu}=常数\cdot|t_2-t_1|^{\mu} \tag{1}$$

来描述，而在第二种情形下，则它由不等式

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant 常数\cdot\sigma_{12}^{\mu} \tag{2}$$

表示；在这些公式中，μ 是正常数 $0<\mu\leqslant 1$；t_1 与 t_2 是所討論的部分上的任意两个点，$r_{12}=|t_2-t_1|$，而 σ_{12} 是这一部分上介于 t_1 与 t_2 之間的弧之长度.

我們知道，对于位在曲綫 L 的任何光滑部分上的点 t_1 与 t_2，条件(1)与(2)是等价的. 在不同于尖点的任何角点的邻域内，这两个条件亦是等价的；这可以从上一个附录，4° 段中所讲过的推导出来.

但是，在尖点的邻域内比值 r_{12}/σ_{12} 可能是任意小的，因此，从(2)不能导出(1). 反过来，明显地，从(1)可以导出(2).

与前面相应，如果不等式(1)成立，那么我們就說，$\varphi(t)$ 适合强形式的 $H(\mu)$ 条件；如果不等式(2)成立，那么我們就說，$\varphi(t)$ 适合弱形式的 $H(\mu)$ 条件. 适合弱形式的 $H(\mu)$ 条件的函数类，在本书正文中，我們叫做 H 类. 今后，如果不作相反的說明，我們便把 H 条件理解为弱形式的 H 条件，亦就是，在不等式(2)的意义下的 H 条件，对属于 H 类的意义亦作同样的理解.

2° 在 §13 中，曾經对 $L=ab$ 是一条光滑弧的情形推导了公式(13.4)：

$$\begin{aligned}\Phi(t_0)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}\\&=-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\ln\frac{b-t_0}{a-t_0}\\&\quad+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt.\end{aligned} \tag{3}$$

这个公式在 L 是一条簡单的逐段光滑弧，而点 t_0 不是角点(及端点)的情形下，显然亦仍然是有效的. 在进行了和在 §13 中完全同样的推理以后，容易断言，如果 t_0 是一个角点，那么，替代公式(3)，我們有

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}$$

$$=-\left(1-\frac{\alpha}{2\pi}\right)\varphi(t_0)+\frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\ln\frac{b-t_0}{a-t_0}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}dt, \tag{4}$$

其中 α 表示非負角，$0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$，它剛好是无穷小向量 $\overrightarrow{t_0t}$，当点 t 保持在 L 的左側，从 t_0b 部分繞着 t_0 轉到 at_0 部分上时所旋轉的角（图 23）.在普通点的情形下，$\alpha=\pi$，于是，我們重新得出公式(3)．

3°. 在§15中，在 $L=ab$ 是一条光滑弧的假定下，我們推导了公式(15.5)。显然，在 L 是一条簡单的逐段光滑弧，而 t_0 不是角点的情形下，这些公式仍然保持有效．容易看出，当 t_0 是角点，特别是尖点的时候，这些公式以及关于函数 $\Phi(z)$ 可以从左側及右側連續拓展到 t_0 上的結論都仍然是成立的．事实上，假定 $t_0=c$ 是一个角点，正象在§15［公式(15.4)］中那样，我們有

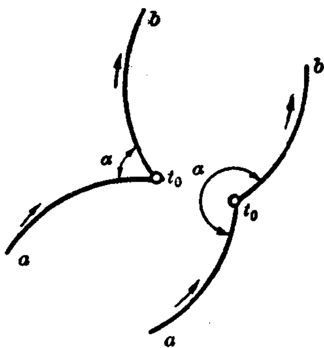


图 23

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)-\varphi(c)}{t-z}dt+\frac{\varphi(c)}{2\pi i}\ln\frac{z-b}{z-a}.$$

当 z 从 L 的左側或者右側趋于 c 时，这个等式右端的积分趋于一个确定的极限；如果把这个积分分成两个积分：一个展布在弧 ac 上，而另一个則展布在弧 cb 上，又若注意到密度 $\varphi(t)-\varphi(c)$ 在点 $t=c$ 处取值零，那么，便不难証实这一点．正象在§15中那样，通过取极限，我們便得出所要找的公式．

4°. 根据上两段中的結果，容易看出，在 t_0 是角点的情形下，Сохоцкий-Plemelj 公式(16.2)具有下述形式：

$$\Phi^{+}(t_0)=\left(1-\frac{\alpha}{2\pi}\right)\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0},\tag{5}$$

$$\Phi^{-}(t_0)=-\frac{\alpha}{2\pi}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0},\tag{6}$$

其中 L 是任意一条簡单的逐段光滑曲綫,而 α 是上面(2° 段)所确定的角度.

5° 在 §18 中,在假定了 L 是一条光滑曲綫的情形下,証明了 Plemelj–Привалов 定理. 容易看出,在不是尖点的角点的邻域内,无論是 §18 中的結果,还是其証明方法,都毫无例外地是成立的①.

剩下要討論的只是尖点的邻域. 我們証明,在 L 是任意一条簡单的逐段光滑曲綫(可能有尖点),并且把 $H(\mu)$ 条件按照它的强形式或者弱形式来理解的情形下,定理亦是正确的.

与此同时,我們将把 §21 中的定理推广到区域是由一条逐段光滑的圍綫所圍成的情形.

关于 §21 中的定理我們提出下面一点注記. 假定 ab 是一条敞开的光滑弧,又假定 $\varphi(t)$ 在 ab 上适合 $H(\mu)$ 条件 $(\mu<1)$,并且 $\varphi(a)=0$. 我們用在 a 处的切綫段 $a'a$,把弧 ab 从点 a 向外延拓,并且在 $a'a$ 上,令 $\varphi(t)=0$,我們討論函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{a'b}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}.\tag{7}$$

根据在 §21 (注释 2) 中讲过的結果,函数 $\Phi(z)$ 在弧 ab 的邻域内(点 b 的邻域内可能例外),在 $a'b$ 的左側(右側)适合不等式

$$|\Phi(z_2)-\Phi(z_1)|\leqslant C|z_2-z_1|^{\mu}.\tag{8}$$

如果把 $\Phi(z)$ 在 $a'b$ 上点 z 处的值理解为从 $a'b$ 的左側或右側而取

---

① 这里問題便归結为研究积分

$$\Psi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}dt,$$

最簡单的方法是依据公式 (15.5) 来証实它. 但是,对积分 $\Psi(t_0)$ 可以完全类似于在 §18 中所进行的那样来研究.

得的边值，那么，这个不等式对 $a'b$ 上的点（b 点的邻域可能除外）亦都是成立的.

現在假定 L 是任意一条簡单的逐段光滑圍綫. 因为，整个問題显然都可以归結为研究函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \quad (9)$$

在角点的充分小的邻域內的性质，因此，不失一般性，可以认为 L 是只有一个角点 a 的一条簡单封閉圍綫. 此外，不失一般性，还可以认为在 a 处有凹进的角，亦就是指大于 π 的角 α（如图 24 所示）；当 $\alpha=2\pi$ 时，我們就得到一个尖点.

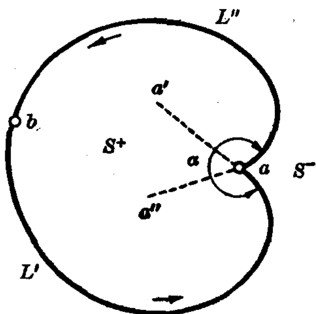


图 24

假定 $\varphi(t)$ 在 L 上适合弱形式的 $H(\mu)$ 条件. 不失一般性，我們可以认为 $\varphi(a)=0$，因为在相反的情形下，我們可以不討論积分 $\Phi(z)$，而討論积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-z}\,dt=\begin{cases}\Phi(z)-\varphi(a) & \text{在 } S^+ \text{ 內},\\ \Phi(z) & \text{在 } S^- \text{ 內}.\end{cases} \quad (10)$$

現在用点 a 和任一其他的点 b 把圍綫 L 分成两条光滑弧 L' 和 L''；与此相应，把这个积分 $\Phi(z)$ 表成两个积分之和的形式：

$$\Phi(z)=\Phi_1(z)+\Phi_2(z), \quad (11)$$

这两个积分分别展布在 L' 及 L'' 上.

将上述有关积分(7)的性质之結果，应用到这些积分的每一个上，便容易断言，在 S^- 內点 a 附近，从而在整个 S^- 內，估計式(8)是成立的；为了使得所述結論更变得明显一些，显然只要将从点 a 出发的光滑弧用切綫段 aa' 和 aa''（在 a 是一个尖点的情形下，綫段 aa' 与 aa'' 重合）进行延拓，并且注意：区域 S^- 內与点 a 相邻的邻域，无論是对光滑弧 baa'，还是对光滑弧 $a''ab$，都在同一侧.

特别是，如果让公式(8)中的 z_1 和 z_2 分别趋于边界 L 上的点

t_1 和 t_2, 我們就可以断言,甚至只要 $\varphi(t)$ 适合弱形式的 $H(\mu)$ 条件,边值 $\Phi^-(t)$(亦就是,从"凹进的方面"取得的边值)是适合强形式的 $H(\mu)$ 条件的①.

剩下来要討論的是在区域 S^+ 內(亦就是"从凸出的方面") $\Phi(z)$ 的性质. 我們有

$$\Phi^+(t)=\Phi^-(t)+\varphi(t).$$

因为 $\varphi(t)$ 和 $\Phi^-(t)$ 都适合 $H(\mu)$ 条件,因此, $\Phi^+(t)$ 也应該适合 $H(\mu)$ 条件.

这样一来, Plemelj–Привалов 定理現在已經推广到了任意一条逐段光滑曲綫的情形,并且即使有尖点的情形亦不例外.

我們指出,如果 $\varphi(t)$ 适合强形式的 $H(\mu)$ 条件,那么, $\Phi^+(t)$ 亦适合同样的条件,因为根据前述, $\Phi^-(t)$ 是适合强形式的 $H(\mu)$ 条件的.

6°. 在上一段中,我們順便地把 § 21 中的定理推广到了点 z_1, z_2 位于边界上角点 a 的邻域內(在凹进的方面)的情形. 而剩下来我們要討論的就是当 z_1, z_2 位于边界上角点 a 的邻域內(但是在凸出的方面)的情形了,在 5° 段中我們用 S^+ 表示这一个区域.

容易看出,这种情形对 $\varphi(t)$ 只要求适合弱形式的 $H(\mu)$ 条件是不够的. 因此, 我們現在假定 $\varphi(t)$ 适合强形式的 $H(\mu)$ 条件. 此时,正象剛才已証明过的那样, 边值 $\Phi^+(t)$ 亦适合这样的条件. 然后容易証实,在 § 21 中所进行过的推理不需要作任何本质上的修改,便可以应用于現在的情形. 只是在討論关系式 (21.6) 的时候,必須考虑到下列事实: 首先, 对于区域 S^+ 內位于点 a 附近的每一个点 z_0, 都可以用一条和 L 不相交的直綫段把 z_0 和 a 或者 L 上 a 点近旁的某一点联接起来. 在这两种情况下,由函数 $\Phi(z)$ 形式为(11)的表示式及从公式(8)可以得出,估計式 $|\Phi(z)-\Phi(z_0)|$

① 我們提醒一下,强形式的 $H(\mu)$ 条件和弱形式的 $H(\mu)$ 条件只是在尖点的邻域內才是有区别的.

$\leqslant C|z-z_0|^\mu$ 对上述直綫段上每一点 z 都是成立的.

三、关于双正交函数組的一个基本命題

假定 L 是在复平面 $z=x+iy$ 上的一条逐段光滑曲綫, 又假定

$$\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \cdots,\ \varphi_n(t)$$

是 L 上点 $t=x+iy$ 的任一組綫性无关的連續函数.

那么, 一定可以(用无穷多种方法)造出 n 个在 L 上适合 H 条件的函数 $\omega_1(t), \omega_2(t), \cdots, \omega_n(t)$, 使得它們与函数 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)$ 在下述意义下是双正交的:

$$(\varphi_i,\ \omega_j)=\int_L \varphi_i(t)\,\omega_j(t)\,dt=\delta_{ij}, \tag{1}$$

其中 $\delta_{ij}=1$ (当 $i=j$), $\delta_{ij}=0$ (当 $i\neq j$).

我們首先証明, 存在着函数 φ_i 的这样的綫性組合 $\psi_j (j=1,2, \cdots, n)$, 对于这些 ψ_j 我們可以选取在 L 上适合 H 条件的函数 χ_j, 使得 $(\psi_i,\ \chi_j)=\delta_{ij}$ ①.

我們将假定下面用 $\omega_j,\ \chi_j,\ \chi'_j$ 来表示的函数是属于 H 类的.

我們用 ψ_1 表示 φ_1, 并且选取任意的函数 χ_1, 使得 $(\psi_1, \chi_1)\neq 0$ ②; 这样的函数, 显然, 存在着无穷多个; 将 χ_1 乘以一个合适的常数, 就可以认为 $(\psi_1,\ \chi_1)=1$. 我們用函数 $\psi_2=\varphi_2-c\psi_1$ 代替函数 φ_2, 并且如此选擇常数 c, 使得 $(\psi_2,\ \chi_1)=(\varphi_2,\ \chi_1)-c(\psi_1,\ \chi_1)=(\varphi_2,\ \chi_1)-c=0$. 我們就有 $(\psi_1,\ \chi_1)=1$, $(\psi_2,\ \chi_1)=0$. 假定 χ'_2

---

① 如果不要求 χ_j 是属于 H 类的, 那么, 可以这样来选取函数組 ψ_i 及 χ_j: 将函数 φ_i 对于弧坐标 s 用普通的方法进行正交化, 也就是, 做它們的綫性組合 ψ_j, 使得

$$\int_L \psi_i\bar{\psi}_j\,ds=\delta_{ij};$$

于是 $\chi_j=\bar{\psi}_j\Big/\dfrac{dt}{ds}$ 适合条件 $(\psi_i,\ \chi_j)=\delta_{ij}$.

② 函数 $\psi_1=\varphi_1$ 是連續的并且不恒等于零, 这是由于函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 是綫性无关的.

是任意一个使$(\psi_2, \chi_2')=1$的函数①．用函数$\chi_2=\chi_2'-c\chi_1$代替函数χ_2'，并且如此选取常数c，使得$(\psi_1, \chi_2)=(\psi_1, \chi_2')-c(\psi_1, \chi_1)=(\psi_1, \chi_2')-c=0$．于是，我們有这样的函数$\psi_1, \psi_2, \chi_1, \chi_2$，使得$(\psi_i, \chi_j)=\delta_{ij}\ (i, j=1, 2)$，而且函数$\psi_1, \psi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_n$是綫性无关的．

再将函数φ_3换成$\psi_3=\varphi_3-c_1\psi_1-c_2\psi_2$，并且如此選擇常数$c_1, c_2$，使得$(\psi_3, \chi_1)=0$，$(\psi_3, \chi_2)=0$，亦就是，使得$(\varphi_3, \chi_1)-c_1=0$，$(\varphi_3, \chi_2)-c_2=0$．再这样选取函数$\chi_3'$，使得$(\psi_3, \chi_3')=1$，并且用$\chi_3=\chi_3'-c_1\chi_1-c_2\chi_2$替代$\chi_3'$，使得$(\psi_1, \chi_3)=0$，$(\psi_2, \chi_3)=0$．

現在我們有了这样的函数ψ_1, ψ_2, ψ_3；χ_1, χ_2, χ_3，使得$(\psi_i, \chi_j)=\delta_{ij}\ (i, j=1, 2, 3)$．这个方法显然可以继續下去．

这样继續下去，我們得出这样的n个綫性无关的函数ψ_i（这些函数是函数φ_i的綫性組合）以及n个函数χ_j，使得

$$(\psi_i, \chi_j)=\delta_{ij}. \tag{2}$$

因为ψ_j是函数φ_i的綫性組合，因此，反过来，应该有

$$\varphi_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\psi_k,$$

此处a_{ik}是这样的一些常数，矩陣$A=\|a_{ij}\|$的行列式不等于零．

現在我們如此选取常数b_{ij}，使得函数

$$\omega_j=\sum_{l=1}^{n} b_{lj}\chi_l$$

适合条件(1)．把这个条件写出，我們便得出

$$\delta_{ij}=(\varphi_i, \omega_j)=\sum_k\sum_l a_{ik}b_{lj}(\psi_k, \chi_l)$$
$$=\sum_k\sum_l a_{ik}b_{lj}\delta_{kl}=\sum_k a_{ik}b_{kj},$$

或者同样地有

$$AB=E,$$

① 因为函数組$\psi_1, \psi_2, \varphi_3, \cdots, \varphi_n$是綫性无关的，因此，$\psi_2$不恒等于零．

其中 E 是单位矩陣，而 $B=\|b_{ij}\|$. 因此，我們所要求的量 b_{ij} 是存在的，亦就是說 $B=A^{-1}$. 这样一来，就証明了我們的論断.

我們指出一个可由上面的命題直接得到的推論. 假定 $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\cdots$, $\varphi_n(t)$ 是給定的点 t 的綫性无关的連續函数，又知道对任何在 L 上属于 H 类的函数 $\omega(t)$，由关系式

$$(\varphi_i, \omega)=0, \quad i=1, 2, \cdots, n$$

必然得出关系式 $(\varphi_0, \omega)=0$, 其中 $\varphi_0=\varphi_0(t)$ 是 L 上某一确定的連續函数，那么，函数 φ_0 一定是函数 φ_i 的綫性組合.

事实上，如果函数 φ_0 与 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 是綫性无关的，那么，就会存在着这样的函数 $\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n$, 使得 $(\varphi_i, \omega_j)=\delta_{ij}(i, j=0, 1, \cdots, n)$；特别是，有

$$(\varphi_1, \omega_0)=0, \ (\varphi_2, \omega_0)=0, \cdots, (\varphi_n, \omega_0)=0, \ (\varphi_0, \omega_0)=1,$$

而这与所假定的条件是矛盾的.

注釋 1 如果扩大函数 φ_j 的类，而压縮函数 ω_j 的类，那么，在本附录(三)的一开始所指出的命題还可以大大地加以推广.

例如，显然，如果規定函数 φ_j 可以在有限个点处有間断，但是仍然保持 φ_j 的絕对可积性，那么，命題仍然是成立的，不过在这种情况下，应該把仅在間断点上彼此不同的函数看做是相同的[①].

再者，不难証明，例如，可以取有理函数当作函数 $\omega_j(t)$；而且如果曲綫 L 是仅由一些敞开弧构成，那么，甚至还可以取多項式当作 $\omega_j(t)$[②]. 但是，因为这一点我們用不着，因此在这里就不再詳細叙述了.

---

① 后一个条件对于綫性无关性概念的定义是很重要的；在这一个条件的影响下，如果存在着这样的不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$, 使得在 L 上可能除了間断点外处处成立 $c_1\varphi_1+c_2\varphi_2+\cdots+c_n\varphi_n=0$, 那么，就可以将函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 看成是綫性无关的.

② 在封閉圍綫的情形下，显然，不能用多項式当作 $\omega_j(t)$. 例如，如果函数 φ_i 本身就是多項式，那么，无論 ω_j 是怎样的多項式，都会有 $(\varphi_i, \omega_j)=0$, 特别是，$(\varphi_i, \omega_i)=0$, 从而，不能象所要求的那样而等于 1.

注釋2 如果把 L 上的已知函数的綫性組合理解为实(常数)系数的綫性組合，并且与此相应地来理解綫性无关性及綫性相关性的概念，亦就是說，亦就象在本书正文中有时所讲的按照“狭义意义下”来理解綫性組合、綫性相关性和綫性无关性的概念，那么，上面所得出的結果不再是正确的了．但是，成立着在現在要証明的类似的結果．

亦就是，假定 $\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$，…，$\varphi_n(t)$是 L 上已知的、綫性无关的(在狭义意义下的)連續函数．那么，一定可以(用无穷多种方法)造出这样的函数 $\omega_1(t)$，$\omega_2(t)$，…，$\omega_n(t)$，使得

$$\operatorname{Re}(\varphi_i,\ \omega_j)=\operatorname{Re}\int_L \varphi_i(t)\,\omega_j(t)\,dt=\delta_{ij},\quad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

証明与前面的証明完全是类似的：只要处处都将积分 $(\varphi,\ \psi)$ 用它的实部 $\operatorname{Re}(\varphi,\ \psi)$来替代，同时把所討論的綫性組合都理解为实系数的綫性組合．

与前面完全类似地还可以証明下述命題．假定 $\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$，…，$\varphi_n(t)$是 L 上已知的、綫性无关的(在狭义意义下的)連續函数，又假設知道对在 L 上属于 H 类的任何函数 $\omega(t)$，从关系式 $\operatorname{Re}(\varphi_i, \omega)=0,\ i=1, 2, \cdots, n$ 均可导出关系式 $\operatorname{Re}(\varphi_0,\ \omega)=0$，此处 $\varphi_0=\varphi_0(t)$ 是 L 上某一个确定的函数，那么，$\varphi_0(t)$是函数 $\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$，…，$\varphi_n(t)$(在狭义意义下)的綫性組合．

在注釋1中所指出过的全部，可以移植到在这里所考慮过的情形．

四、带有位移的联結問題

在这一个附录中，我們給出一种类型的联結問題的簡单介紹，这一类型的联結問題是这一本书中所討論过的联結問題的推广，我建議把它叫做带有位移的联結問題，因为这一个問題的边界条

件把两点处的边值联系在一起，而这两点中有一点是由另一点經过一个位移而得出的．我們仅相当詳細地討論(并且論証)在1°段中所提出的一类問題，而对其他一些情形我們仅作一个簡单的介紹．

1°．假定 S^+ 是由一条簡单的 Ляпунов 封閉圍綫 L 所圍成的有界区域，而 S^- 是 S^++L 对全平面的余集．正象往常那样，我們假定，当沿着 L 的正方向移动时，S^+ 保持在其左側．

另外，再假定 $\alpha(t)$ 表示給定在 L 上的某一个連續函数．那么，当 t 描写 L 时，点 $\tau=\alpha(t)$ 描写出某一条曲綫 Λ；与此相应，我們将說，函数 $\alpha(t)$ 把曲綫 L 变換成或者移到曲綫 Λ 上．

我們現在假定 $\alpha(t)$ 适合下列条件：

a) 在 L 上导函数 $\alpha'(t)=\dfrac{d\alpha(t)}{dt}$ 处处都不等于零，并且它是属于 H 类的；

b) $\alpha(t)$ 双方单值地并且保持轉向地把 L 变換成它自己．

我們把下述問題叫做带有位移的联結問題：

要求根据 L 上的边界条件

$$\Phi^+[\alpha(t)]=G(t)\Phi^-(t)+g(t), \tag{1}$$

来找一个在无穷远处有有限阶的，并且以 L 为跳跃曲綫的分区全純函数 $\Phi(z)$，此处 $G(t)$ 及 $g(t)$ 都是 L 上适合 H 条件的已知函数，而且在 L 上处处都有 $G(t)\neq 0$．

这一个問題是我們在第二章中所考慮过的联結問題(那个联結問題对应于 $\alpha(t)=t$ 的情形)的自然推广．

C. Haseman[1] 首先研究了由取 $g(t)=0$ 而得出的形式为(1)的齐次問題，但是，他并沒有成功地得出比較完善的解．

Д. А. Квеселава[3], [6] 利用了和 C. Haseman 完全不同的方法，首先給出了問題(1)的合理的解法．我們在此处来导出这一个解法．

2°．下列引理对于求解边值問題(1)是具有重大意义的．

引理 如果在无穷远处取値零的分区全純函数 $\Phi(z)$ 适合在 L 上的边界条件：

$$\Phi^{+}[\alpha(t)]=\Phi^{-}(t), \tag{2}$$

那么，它恒等于零.

假定 $\Phi(z)$ 适合边界条件(2)，又假定 $\Phi(\infty)=0$；那么，下列各个函数都适合条件(2)，并且在无穷远处取値零：

$$\Phi(z),\ [\Phi(z)]^{2},\ [\Phi(z)]^{3},\ \cdots. \tag{*}$$

当函数 $\Phi(z)$ 不恒等于零时，(*)中各个函数显然是綫性无关的.

因此，即使只存在一个适合引理条件的、又不恒等于零的函数，那么，至少存在着可列个这样的(彼此是綫性无关的)函数. 所以，只需要能証明，边界条件(2)只可能为有限多个在无穷远处取値零的、又彼此是綫性无关的分区全純函数所适合.

假定函数 $\Phi(z)$ 适合引理的条件. 那么，由我們所采用的边値概念的定义本身，可以知道(当不存在結点时)，函数 $\Phi^{+}(t)$ 及 $\Phi^{-}(t)$ 在 L 上是連續的. 如果此外它們还适合 H 条件，那么根据 Cauchy 公式以及 Сохоцкий-Plemelj 公式，我們就有，对 L 上所有 t_0 都成立的等式：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Phi^{+}(t_0)-\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\Phi^{+}(t)\,dt}{t-t_0}=0,\\ \frac{1}{2}\Phi^{-}(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\Phi^{-}(t)\,dt}{t-t_0}=0.\end{aligned} \tag{**}$$

但是，可以証明，上述公式在此处我們所采取的假定下仍然是正确的[①].

利用关系式(2)，以及注意到 $\alpha(t)$ 把圍綫 L 变换成它自己并且保持轉向[②]，容易看出，公式(**)中的第一个可以改写成

---

① 在密度只是連續的情形下(以及在更一般的情形下)，Сохоцкий-Plemelj 公式是能应用的，这可以参看 И. И. Привалов [7].

② 如果方向变成了反方向，那么，在我們所导出的公式中，积分号前面的符号要改成相反的符号，从而，我們的推导便不再是正确的了.

$$\frac{1}{2}\Phi^-(t_0)-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^-(t)\alpha'(t)dt}{\alpha(t)-\alpha(t_0)}=0;$$

再把这一个等式与等式(**)中的第二个相加,我們便得出

$$\Phi^-(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L K(t_0,\ t)\Phi^-(t)dt=0, \tag{3}$$

其中

$$K(t_0,\ t)=\frac{1}{t-t_0}-\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)}. \tag{4}$$

根据对函数 $\alpha(t)$ 以及圍綫 L 所加的条件,容易驗証,

$$K(t_0,\ t)=\frac{K_0(t_0,\ t)}{|t-t_0|^{\gamma}},\quad 0\leqslant\gamma=\text{常数}<1, \tag{4a}$$

其中 $K_0(t_0,\ t)$ 是 L 上某一个适合 H 条件的函数.

这样一来,任何一个在无穷远处取值零的、适合条件(2)的分区全純函数 $\Phi(z)$ 之边值 $\Phi^-(t)$,应該是 Fredholm 积分方程(3)的解. 因此,只可能存在有限多个这样的綫性无关的函数. 由此便推导出我們的論断.

3° 回到求解边值問題(1),我們从研究 $G(t)=1$ 的情形入手. 在这个情形下,我們有边界条件:

$$\Phi^+[\alpha(t)]=\Phi^-(t)+g(t)\quad 在\ L\ 上. \tag{5}$$

我們来找这个問題在无穷远处具有已給的主要部分的解 $\Phi(z)$,亦就是,要找在无穷远点的邻域內可以表成形式

$$\Phi(z)=P(z)+O\left(\frac{1}{z}\right)$$

的解,其中 $P(z)$ 是已知多項式("主要部分").

依据上述結果,容易看出,这个問題不可能有两个具有同样主要部分的不同的解,因为这样两个解之差显然是对应的齐次問題在无穷远处取值零的解,而依据已証明过的引理,这样的解应該恒等于零.

我們現在来找問題(5)的下述形式的解:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi[\beta(t)]dt}{t-z} \quad 当\ z\in S^+,$$
$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-z}+P(z) \quad 当\ z\in S^-, \tag{6}$$

其中 $\varphi(t)$是圍綫 L 上点 t 的未知函数，并且 $\varphi(t)$是属于 H 类的，$\beta(t)$是 $\alpha(t)$的反函数①，而

$$P(z)=C_0+C_1z+\cdots+C_nz^n$$

是任意給定的多项式.

从公式(6)，再利用 Сохоцкий–Plemelj 公式，不难导出

$$\Phi^+[\alpha(t_0)]=\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\alpha'(t)\varphi(t)dt}{\alpha(t)-\alpha(t_0)},$$
$$\Phi^-(t_0)=-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}+P(t_0).$$

把这些表示式代入边界条件(5)中，我們得到

$$\mathbf{K}\varphi\equiv\varphi(t_0)-\frac{1}{2\pi i}\int_L K(t_0,\ t)\varphi(t)dt=g(t_0)+P(t_0), \tag{7}$$

其中 $K(t_0,\ t)$由公式(4)确定.

依据上一段中所述，方程(7)是一个核为形式(4a)的 Fredholm 积分方程. 这一个方程的每一个有界可积的解 $\varphi(t)$ 是适合 H 条件的(参看 § 51)，并且由任意一个这样的解，从公式(6)所确定的分区全純函数 $\Phi(z)$，都是边值問題(5)的某一个解.

齐次方程 $\mathbf{K}\varphi=0$ 沒有非零解. 事实上，假定 $\varphi(t)$是这个方程的某一个解. 那么，分区全純函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi[\beta(t)]dt}{t-z} \quad 当\ z\in S^+,$$
$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-z} \quad 当\ z\in S^-$$

适合上面已証明过的引理的条件. 因此，

---

① 函数 $\beta(t)$显然把圍綫 L 变换成它自己，并且保持 L 的轉向，同时 $\beta(t)$具有适合 H 条件的又不等于零的导函数.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi[\beta(t)]dt}{t-z}=0 \qquad 当\ z\in S^+,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z}=0 \qquad 当\ z\in S^-.$$

从这些等式可以推出，$\varphi(t)=\Psi^+(t)$，$\varphi[\beta(t)]=\Psi^-(t)$，其中 $\Psi(z)$ 是某一个在无穷远处取值零的分区全純函数．函数 $\Psi(z)$ 显然适合边界条件

$$\Psi^+[\beta(t)]=\Psi^-(t) \quad 在\ L\ 上.$$

因此，依据同一个引理，$\Psi(z)=0$．于是，$\varphi(t)=\Psi^+(t)=0$，我們的論断因此得到了証明．

从上可以导出，方程(7)对于 $\varphi(t)$ 总是单值可解的．

綜合上面所述結果，可以导出下述結果．

边值問題(5)的任意一个在无穷远处有有限阶的分区全純解都由公式(6)給出，其中 $P(z)$ 是任意一个多項式，而 $\varphi(t)$ 是积分方程(7)的解．

我們指出，边值問題(5)只有一个在无穷远处取值零的解；这个解由公式(6)給出，在其中应該令 $P(z)=0$，而把 $\varphi(t)$ 理解为方程(7)当 $P(t_0)=0$ 时的解．

4°．我們現在討論具有齐次边界条件

$$\Phi^+[\alpha(t)]=G(t)\Phi^-(t) \quad 在\ L\ 上 \tag{8}$$

的問題．

利用我們常用的記号，令

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L$$

是函数 $G(t)$ 的指标．我們将假定，点 $z=0$ 位于区域 S^+ 內．此时，我們可以把

$$g^*(t)=\ln[t^{-\varkappa}G(t)]$$

理解为完全确定的单值函数（它在 L 上是属于 H 类的）．

通过直接驗証說明,函数

$$X(z)=e^{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\chi[\beta(t)]dt}{t-z}} \quad \text{当 } z\in S^+,$$

$$X(z)=z^{-\varkappa}e^{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\chi(t)dt}{t-z}} \quad \text{当 } z\in S^-$$

是边值問題(8)的某一个(特)解,此处 $\chi(t)$ 是积分方程 $\mathbf{K}\chi=g^*$ 的解. 我們把这个函数 $X(z)$ 叫做齐次問題 (8) 的典則解. 典則解 $X(z)$ 在有限距离內处处都不取值零,而它在无穷远处的阶数等于 $-\varkappa$.

我們現在把边界条件(8)改写成形式:

$$\frac{\Phi^+[\alpha(t)]}{X^+[\alpha(t)]}=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} \quad \text{在 } L \text{ 上},$$

同时利用上一段所得出的結果,就容易得出下述結論:

齐次边値問題 (8) 的任意一个在无穷远处有有限阶的分区全純解,都由公式

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{\rho[\beta(t)]dt}{t-z} \qquad \text{当 } z\in S^+,$$

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{\rho(t)dt}{t-z}+X(z)P(z) \quad \text{当 } z\in S^-$$

給出,其中 $P(z)$ 是任意一个多項式, $X(z)$ 是典則解,而 $\rho(t)$ 是积分方程 $\mathbf{K}\rho=P(t)$ 的解.

当 $\varkappa\leqslant 0$ 时,齐次边値問題(8)沒有在无穷远处取値零的(非平凡)解; 当 $\varkappa>0$ 时, 它恰好有 $\varkappa$ 个在无穷远处取値零的綫性无关解.

5° 現在我們进而研究非齐次問題(1). 假定 $X(z)$ 是从(1)取 $g(t)=0$ 而得出的齐次問題的典則解. 那么, 边界条件(1)可以写成形式:

$$\frac{\Phi^+[\alpha(t)]}{X^+[\alpha(t)]}=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}+\frac{g(t)}{X^+[\alpha(t)]},$$

从而,依据在 3° 段中所得出的結果,容易断言:

非齐次边值問題 (1) 的任意一个在无穷远处取值零的分区全純解，都由公式

$$\begin{aligned}\Phi(z)&=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi[\beta(t)]dt}{t-z} && \text{当 } z\in S^+,\\ \Phi(z)&=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)dt}{t-z}+X(z)P(z) && \text{当 } z\in S^-\end{aligned} \tag{9}$$

給出，此处 $P(z)$ 是任意一个多項式，$X(z)$ 是对应的齐次問題的典則解，而 $\varphi(t)$ 是积分方程

$$\mathbf{K}\varphi=P(t)+\frac{g(t)}{X^+[\alpha(t)]} \tag{10}$$

的解.

对于在无穷远处取值零的解，容易导出下述結論：

当 $\varkappa\geqslant 0$ 时，非齐次問題 (1) 在无穷远处取值零的一般解由公式(9)給出，其中把 $P(z)$ 应該理解为次数不超过 $\varkappa-1$ 的任意多項式（当 $\varkappa=0$ 时，$P_{\varkappa-1}(z)=0$）.

当 $\varkappa<0$ 时，如果在(9)中取 $P(z)=0$，那么，在无穷远处取值零的(唯一)解仍然由同一个公式(9)給出；此处必需适合存在在无穷远处取值零的解的充分和必要条件：

$$\int_L h_k(t)g(t)\,dt=0, \quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa, \tag{11}$$

其中 $h_k(t)$ 是与 $g(t)$ 无关的、确定的綫性无关的函数.

我們指出，当 $\varkappa=0$ 时，总存在一个并且仅存在一个在无穷远处取值零的解. 当 $\varkappa>0$ 时，一般解包含 $\varkappa$ 个复的任意常数.

特别是从(9)可以推出，問題(1)的每一个分区全純解 $\Phi(z)$ 的边值 $\Phi^+(t)$ 及 $\Phi^-(t)$ 都适合 H 条件；这当然是由于我們要求函数 $G(t)$ 和 $g(t)$ 适合 H 条件的結果.

最后，我們指出，最近 Б. В. Хведелидзе [20] 在对于函数 $G(t)$ 及 $g(t)$ 加了很广泛的假定后，給出了边值問題(1)在能表成 Cauchy 型积分的函数类中的解.

6°. 到現在为止,我們曾經假定了,当 $\alpha(t)$ 把 L 变成它本身时,保持了 L 的轉向. 在 $\alpha(t)$ 改变 L 的轉向为它的反方向时,情况就和上述的大为不同①.

与此相反,在对 $\alpha(t)$ 所作的上述假定下,可以相当完整地研究与前面类似的,并且带有下述边界条件的問題:

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\overline{\Phi^-(t)} + g(t), \tag{12}$$

其中 $\overline{\Phi^-(t)}$ 表示 $\Phi^-(t)$ 的复值共軛函数.

在問題 (1) 的提法中, 对函数 $G(t)$ 和 $g(t)$ 所加的条件下, Д. А. Квеселава[4], [6] 首先提出和解决了这一个边值問題.

在假定了 $\alpha(t)$ 把 L 的轉向变成它的反方向以后,又添了补充条件

$$\alpha[\alpha(t)] = t \tag{13}$$

的情形下, T. Carleman[2] 曾經研究了与下述边界問題对应的齐次問題:

要求根据 L 上的边界条件:

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\Phi^+(t) + g(t), \tag{14}$$

来找一个在区域 S^+ 內,除了有有限多个极点外,处处都是全純的、并且可以連續拓展到 L 上的函数 $\Phi(z)$, 此处 $G(t)$ 与 $g(t)$ 在 L 上都适合 H 条件,并且在 L 上处处都有 $G(t) \neq 0$.

T. Carleman 作出了 $\Phi^+(t)$ 所适合的 Fredholm 积分方程, 但是他并沒有研究过这一个方程. 在同样的条件下, 用了与 T. Carleman 的方法略为不同的方法, Д. А. Квеселава[5], [6] 給出了上述边值問題的合理的解.

7°. 对函数 $\alpha(t)$ 加了稍为一般的假設(亦就是,假定 $\alpha(t)$ 把圍綫 L 变成另一条具有同样性质的圍綫)后, 可以討論带有位移的联結問題. 正如 Л. И. Чибрикова 和 В. С. Рогожин[1] 所指出过

---

① 特别是,用一些簡单的例子容易証实: 齐次問題在这种情形下可能有无穷多个在无穷远处取値零的解.

的，可以把上述的 Д. А. Квеселава 的方法直接应用到这一个情形．此外，利用保角映射，容易把这一个情形化为$\alpha(t)$把圍綫L变成它自己的情形．

Л. И. Чибрикова[1] 給出了上述問題在L为敞开圍綫情形下的解．但是，她所研究的是这些問題在$G(t)$和$g(t)$可以按照一定方式取值零或者变成无穷大量以及它們可以在圍綫上具有有限多个第一类間断点的情形．

8°. 可以这样提出若干个未知函数的联結問題：

要求根据边界条件

$$\Phi^{+}[\alpha(t)]=G(t)\Phi^{-}(t)+g(t) \quad \text{在} L \text{上}, \tag{15}$$

来找一个在无穷远处有有限阶的分区全純向量$\Phi(z)=(\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n)$，此处$\|G_{kj}\|=G(t)$ $(k, j=1, 2, \cdots, n)$是已知矩陣，$G(t)$在L上适合H条件，并且它在L上处处都不是退化矩陣，$g(t)=(g_1, g_2, \cdots, g_n)$是适合$H$条件的已知向量，而$\alpha(t)$是具有 1° 段中性质 a) 和 b) 的函数．

Н. П. Векуа[9], [12] 首先给出了这一个問題的完全解①(亦可以参看 Н. П. Векуа 的书 [16] 第四章)．

在上面提到的 Н. П. Векуа 的书中，还解决了与下述边界条件对应的更一般的問題：

$$\Phi_k^{+}[\alpha_k(t)]=\sum_{j=1}^{n}G_{kj}(t)\Phi_j^{-}(t)+g(t), \quad k=1, 2, \cdots, n,$$

其中$\alpha_1(t), \alpha_2(t), \cdots, \alpha_n(t)$都是給定在圍綫$L$上具有 1° 段性质 a), b) 的已知函数．

在 Л. И. Чибрикова 的上述論文 [1] 中，研究了当矩陣$G(t)$的元素在圍綫L上的有限个点处具有第一类間断点的情形下的边值問題 (15)．

在 Г. Ф. Манджавидзе 和 Б. В. Хведелидзе 的論文 [1] 中，指

① Н. П. Векуа 把这个問題叫做若干个未知函数的广义的 Hilbert 問題．

出了边值問題(15)可以归結为普通的联結問題.

9°. 在 Н. П. Векуа 的論文 [22], [24] 中，提出和解决了在 § 137 中所讲到过的在若干个未知函数情形下形式为 (137.1) 的，但是带有位移的各种广义边值問題. 在論文 [24] 中还解决了比这种形式更一般的具有下列边界条件的問題:

$$\Phi_j[\alpha_j(t_0)] = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(t_0)\, \Phi_k^-(t_0) + \sum_{k=1}^{n} B_{jk}(t_0)\overline{\Phi_k^-(t_0)} + g_j(t_0),$$

$$j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

其中 $A_{jk}(t)$, $B_{jk}(t)$, $g_j(t)$ $(j,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$都是已知函数,并且它們都是适合 H 条件的, $\alpha_j(t)$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$是适合 1° 段中条件 a), b) 的函数, $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, $\cdots$, $\Phi_n(z)$ 是未知的分区全純向量 $\Phi(z)$的分量.

Н. П. Векуа 作出了与所討論的問題是等价的积分方程,并且依据对这些方程的研究得出了所考慮的問題的解.

在 Н. П. Векуа 的論文 [19], [20], [23], [25]～[27] 中,也討論了若干个未知函数的 Carleman 边值問題以及某些其他問題. 从这些論文中特别应該指出已提到的論文 [23], 在这一篇論文中,給出了在条件(13)换成更一般的条件

$$\alpha^m(t) = t$$

后的 Carleman 問題的解,此处 m 是任意一个正的偶数①.

在 Г. Н. Александрия 的論文 [1], [2] 中以及 С. С. Чакветадзе 的論文[1]中,都討論了带有位移的联結問題的另一些推广.

10°. М. П. Ганин[3] 考虑了多連通区域上若干个未知函数的、形式为(81.1)的、但是带有位移的边值問題.

Н. П. Векуа[28]～[30] 还討論了带有位移的, 同时在边界条件中既包含了未知函数, 又包含它的导函数以及它們的复値共軛値

---

① 此处采用了記号

$$\alpha^k(t) = \alpha(\alpha^{k-1}(t)),\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

的边值問題. 为了求解每一个所討論的問題, Н. П. Векуа 利用了解的确定的积分表示式, 把这些問題都归結为在他的論文[28]中研究过的奇异积分-微分方程.

在 Р. С. Исаханов 的論文 [2] 中, 亦研究过形式为(81.1)但是带有位移的边值問題.

五、关于参考文献的一些补充說明

在这一个附录中,我們要对某些参考文献作一个簡单介紹,在这些文献中,有些是出現在著者向出版社交稿(1960 年 5 月)以后的,有些是著者在交稿以后才知道的,由于这种或者那种原因,著者沒有能在本书正文中介紹它們.

1°. 遺憾的是,著者到最近为止一直并不知道, G. Hardy 专題研究在 Cauchy 主値意义下的积分的論文 [1]~[4], 这些論文早在 1901~1908 年就已发表了.

这些論文,亦正象其他一些著者早就发表过的有关 Cauchy 型积分的一些論文(例如, Ю. В. Сохоцкий 及 J. Plemelj 的論文)那样,沒有及时引起应有的重視,这是由于在这一个領域內的論文只是在近年来由于要应用到边値問題上时,才受到重視.

在 G. Hardy 的上述論文中包括了一些値得注意的結果. 但是, 在現在主要是从 Cauchy 型积分理論的发展史的角度来看待这些結果的重要性的.

値得注意的事实是, 一个曾被我們称做 Poincaré-Bertrand 置換公式的极重要的公式, 事实上在 G. Hardy 的論文 [3], [4] 中早已得出过,当然他是在比之在 §28 中更特殊的假定下得出的.

亦就是,这一位著者的相应結果能够叙述如下:

假定 $\theta(x, y)$ 是給定在矩形 $(a, A; b, B)$ 中两个实变量 x 及 y 的函数,具有直到二阶的連續偏导函数;那么,就有

$$\int_a^A \frac{dx}{x-\alpha} \int_b^B \frac{\theta(x, y)}{y-x} dy$$
$$= -\pi^2\theta(\alpha, \alpha) + \int_b^B dy \int_a^A \frac{\theta(x, y)}{(x-\alpha)(y-x)} dy$$

$(a<\alpha<A)$. 此处积分是对实变量来进行的这个事实当然沒有重要意义.

2°. 我們指出,在 И. И. Данилюк 的論文 [1], [2] 中,在 И. Б. Симоненко 的論文 [2] 中,在 H. Widom 的論文 [1] 中,都将联結問題边界条件中的系数以及在奇异积分方程中的系数所允許的函数类大大地加以扩充了.

3°. 我們还要指出最近发表的 W. Koppelman 的論文 [1] 以及 Ю. Л. Родин 的論文 [1], [2], 在这些論文中,得出了一系列有关在 Riemann 曲面上的联結問題的重要結果.

4°. 最近在解决理論物理中的某些問題时, 特别是, 在解决量子場論中的問題时, 經常要用到在本书中所叙述过的那样形式的奇异积分方程的理論. 遺憾的是, 发表在物理杂志上的一些論文到目前为止超出了我所看到的范圍. 因此, 著者仅能指出 H. H. Боголюбов, Б. В. Медведев, А. Н. Тавхелидзе 的論文 [1], 在这一篇論文中, 对关于量子場論中和本书所叙述到的方法有联系的一些論文作了簡要的評論.

六、有限翼展机翼理論中的积分-微分方程的解①

(一)有限翼展机翼理論中的积分-微分方程.

下述 Prandtl 积分-微分方程在有限翼展机翼理論中起着重要的作

① 这一个附录是由譯者根据本书第一版英譯本第五部分第十七章譯出的, 并参考了本书作了必要的修改. 本书第一版的英文譯本: Singular Integral Equations, Boundary Problems of Function Theory and their Application to Mathematical Physics 是由 J. R. M. Radok 譯的, P. Noordoff, N. V. Groningen-Holland 出版, 1953 年, 它是根据本书第一版 (1946 年) 譯出的, 著者在編写这一章时主要利用了 И. Н. Векуа [9] 及 Л. Г. Магнарадзе [1].

用(例如，可以参看 Th. von Kármán 及 J. M. Burgers: General Aerodynamic Theory—Perfect Fluid. vol. II. of Aerodynamic Theory (edited by W. F. Durand) Julius Springer Berlin 1936, 第 167 頁) (В. В. Голубеев: Теория Крыла Аэроплана Конечного Размаха, Труды ЦАГИ, вып. 108, 1931.)

$$\frac{\Gamma(t_0)}{B(t_0)}-\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{\Gamma'(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0), \tag{1}$$

其中 $\Gamma(t)$ 是一个未知函数，$\Gamma'(t)=\dfrac{d\Gamma(t)}{dt}$，$B(t)$及$f(t)$都是已知函数，并且

$$B(t)=\frac{mb(t)}{8},\quad f(t)=4V_\alpha(t). \tag{2}$$

上述公式中的各个量的物理意义如下：假定机翼对称于某一个平面 Oyz，此处 Oz 軸的方向和空气徑流在无穷远处的方向是一致的. $2a$ 是机翼的翼展. 如果 Ox 是横軸，它垂直于 Oyz 平面，此时，$b(x)$ 是对应于横坐标 x 的“剖面的翼弦”，$\Gamma(x)$是环繞这一个剖面的气流的循环量，$\alpha(x)$是“几何冲角”，V_α 則取作气流在无穷远处的速率，m 为常数，通常把它取为 2π，m 的更精确的値为 5.5 (参看 Th. von Kármán 及 J. M. Burgers 的上述著作第166頁).

依据对称性，

$$\Gamma(t)=\Gamma(-t),\ B(t)=B(-t),\ f(t)=f(-t); \tag{3}$$

此外，通常还假定

$$\Gamma(-a)=\Gamma(a)=0. \tag{4}$$

专題研究方程 (1) 及其解法的論文曾发表过很多. 除了在 В. В. Голубеев 及 Th. von Kármán 和 J. M. Burgers 的上述著作中提到的文献外，还应該提到論文 K. Schröder [1] 及 S. Weissinger [1] (在这两篇論文中曾經介紹了最重要的文献). 但是，著者认为最有效的解法是由 И. Н. Векуа 和 Л. Г. Магнарадзе 給出的(发表在前面已經提到过的論文之中)，在下面几段中我們要来介紹这一个解法.

(二) 正則化为正則型的 Fredholm 方程

今后我們假定，函数 $B(t)$ 除了端点可能例外，处处都不等于零，又假定 $1/B(t)$是属于 H^* 类的，此外还假定函数 $\alpha(t)$ 是适合 H 条件的. 我們要求找导函数是属于 H^* 类的解.

把方程(1)左端的第一項移到右端，并应用 § 86 中的反演公式，便可以得出

$$\Gamma'(t_0)=-\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}\Gamma(t)dt}{B(t)(t-t_0)}+F(t_0), \tag{5}$$

其中

$$F(t_0)=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}f(t)dt}{t-t_0}, \tag{6}$$

并且根式仅取它的正值①.

在现在的情形下，依据 (3)，再若注意到，由 $\Gamma(t)=\Gamma(-t)$ 导出的 $\Gamma'(t)=-\Gamma'(-t)$，以及由此而导出的 $\Gamma'(0)=0$，那么，容易看出，在(5)式右端形式为 $c/\sqrt{a^2-t_0^2}$ 的项是等于零的.

(5)的两端对 t_0 从 $t_0=0$ 到 $t_0=t_0$ (t_0 为变量)积分，便可以得出

$$\Gamma(t_0)-\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}\ln\left|\frac{i(t_0-t)+\sqrt{a^2-t_0^2}-\sqrt{a^2-t^2}}{i(t_0-t)+\sqrt{a^2-t_0^2}+\sqrt{a^2-t^2}}\right|\frac{\Gamma(t)}{B(t)}dt$$
$$=\int_0^{t_0}F(t)dt+c_0, \tag{7}$$

其中 c_0 是待定的常数；令

$$t=-a\cos\omega,$$
$$t_0=-a\cos\omega_0,$$

此时，这个方程变成了

$$\Gamma(\omega_0)-\frac{a}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\omega}{B(\omega)}\ln\left|\frac{\sin\frac{\omega-\omega_0}{2}}{\sin\frac{\omega+\omega_0}{2}}\right|\Gamma(\omega)d\omega=G(\omega_0)+c_0, \tag{8}$$

其中 $G(\omega)$ 是一个完全确定的函数，但是在此处不准备写出它的表示式，这里已經把 $\Gamma(t)$ 及 $B(t)$ 写成 $\Gamma(\omega)$ 及 $B(\omega)$.

方程 (122.4) 是一个拟正則型的 Fredholm 方程；因为大家都已經熟悉它，因此我們不再研究它了. 我們将把 (5) 改成另一个从应用的观点来看較为方便的 Fredholm 方程.

为了进行这一改变，我們重新考虑方程(5)，并且把它改写成下述形式：

$$B(t_0)\Gamma'(t_0)=-\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{\Gamma(t)\,dt}{t-t_0}+B(t_0)\Gamma(t_0)$$
$$-\frac{B(t_0)}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{+a}R(t_0,t)\Gamma(t)dt, \tag{9}$$

---

① 在现在的情形下，由于假定了 $\Gamma'(t)$ 是属于 H^* 类的，故在 (86.9) 中 $p=1$, $q=0$ (亦即 $\Gamma'(t)$ 是属于 h_0 类的)；已用 $\sqrt{a^2-t^2}=-i\sqrt{t^2-a^2}$ 替代根式 $\sqrt{t^2-a^2}$，而根式 $\sqrt{a^2-t^2}$ 在 $-a<t<a$ 内則取正值.

其中

$$R(t_0, t)=\frac{1}{t-t_0}\left\{\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{B(t)}-\frac{\sqrt{a^2-t_0^2}}{B(t_0)}\right\}. \tag{10}$$

为了簡单起見,我們假定

$$P(t)=\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{B(t)}, \quad -a\leqslant t\leqslant a \tag{11}$$

具有連續的一阶导函数,于是,$R(t_0, t)$是两个变量的連續函数.

現在指出,在目前的条件下①,

$$\frac{d}{dt_0}\int_{-a}^{+a}\frac{\Gamma(t)\,dt}{t-t_0}=\int_{-a}^{+a}\frac{\Gamma'(t)dt}{t-t_0}, \tag{*}$$

依据(9),

$$\frac{d}{dt_0}[B(t_0)\Gamma'(t_0)]+\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{\Gamma'(t)dt}{t-t_0}=g(t_0), \tag{12}$$

其中

$$g(t_0)=\frac{d}{dt_0}\left\{B(t_0)\,F(t_0)-\frac{B(t_0)}{\pi\sqrt{a^2-t_0^2}}\int_{-a}^{+a}R(t_0, t)\,\Gamma(t)dt\right\}. \tag{13}$$

由(1)及(12)可以导出

$$B(t_0)\frac{d}{dt_0}[B(t_0)\,\Gamma'(t_0)]+\Gamma(t_0)=B(t_0)[f(t_0)+g(t_0)]. \tag{14}$$

把(14)的右端当作已知函数,这个方程便是关于$\Gamma(t)$的一个二阶綫性微分方程.求解这个方程,便可以得出

$$\Gamma(t_0)=c_1\cos\tau(t_0)+c_2\sin\tau(t_0) +\int_0^{t_0}\{f(t)+g(t)\}\sin[\tau(t_0)-\tau(t)]dt, \tag{15}$$

其中

$$\tau(t_0)=\int_0^t\frac{dt}{B(t)}, \tag{16}$$

而c_1, c_2都是待确定的常数.在(15)中令$t_0=0$,我們便可以得出$c_1=\Gamma(0)$;依据(3),$c_2=0$.

用$g(t)$的表示式(13)替代(15)右端的$g(t)$,再做一些簡单的变換,便可以得到积分方程

① 通过分部积分法,容易得出

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\Gamma(t)\,dt}{t-t_0}=\int_{-a}^{+a}\Gamma(t)d\ln|t-t_0|=-\int_{-a}^{+a}\Gamma'(t)\ln|t-t_0|dt, \tag{**}$$

此式两端对t_0微分,再利用§13中的結果,便可以得出(*).在推导(**)时,需要用到假定$\Gamma(a)=\Gamma(-a)=0$.

$$\Gamma(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{+a}K(t_0,\ t)\Gamma(t)dt=h(t_0), \tag{17}$$

其中

$$K(t_0,\ t)=\int_0^{t_0}\frac{R(t_1,\ t)}{\sqrt{a^2-t_1^2}}\cos[\tau(t_0)-\tau(t_1)]dt_1, \tag{18}$$

$$h(t_0)=\Gamma(0)\cos\tau(t_0)+\int_0^{t_0}\left\{\sin[\tau(t_0)-\tau(t_1)]f(t_1)\right.$$
$$\left.+\frac{\cos[\tau(t_0)-\tau(t_1)]}{\pi\sqrt{a^2-t_1^2}}\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}f(t)dt}{t-t_1}\right\}dt_1. \tag{19}$$

不考虑(17)右端的未知常数 $\Gamma(0)$，这个方程便是一个正则型的 Fredholm 方程.

И. Н. Векуа[9] 首先在函数 $P(t)$ 在綫段 $(-a,\ +a)$ 上是一个解析函数的假定下用其他方法得出了方程(17)；上述假定对他所用的方法是很重要的. Л. Г. Магнарадзе[1] 立刻推广了由 И. Н. Векуа 所得出的結果. 他所作的假定与这里所作的假定是相近的，方程(17)上面的推导，基本上是重复他在論文中所作的推导；但是由于他并沒有假定 $\Gamma(-t)=\Gamma(t)$，$\Gamma(-a)=\Gamma(a)=0$，因此，在他所得出的方程中包含了几个任意常数.

初看起来，方程(17)似乎比方程(8)要复杂一些. 但是，从应用的观点来看，方程(17)实际上要簡单得多. 这是由于它的核是正則型的，而且更主要的优点还在于，它在很多实际应用問題中用很簡单的方法便可以求解. 例如，在下述情形中，极簡单地便可完整地求解方程(17)：由(11)所确定的函数

$$P(t)=\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{B(t)}$$

是一个有理函数，亦即，剖面的翼弦 $b(t)$ 可以表成

$$b(t)=\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}\,p(t) \tag{20}$$

的形式，其中 $p(t)$ 是一个有理函数.

讀者如有必要可以参看上面所提到的 И. Н. Векуа 和 Л. Г. Магнарадзе 的論文. 在大多数具有实际价值的情形中，函数 $b(t)$ 都可以表成形式(20)，而 $p(t)$ 是仅包含少量参数的一个有理函数；用这样的形式来表示 $b(t)$，已能保証足够的精确度.

例如，令 $p(t)=b_0=$常数，即令

$$b(t_0)=b_0\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}, \tag{21}$$

我們便可以得到椭圆形的机翼. 在这种情形下，显然有 $R(t_0,\ t)\equiv 0$，

$K(t_0, t)\equiv 0$，由(17)立可得出 $\Gamma(t)$，而且亦不难确定(17)右端所出現的常数 $\Gamma(0)$.

亦很容易找出下述情形的解：

$$b(t)=b_0\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}\,\frac{1+\nu\frac{t^2}{a^2}}{1+\mu\frac{t^2}{a^2}},\tag{22}$$

其中 b_0, μ 及 ν 都是常数；并且 $b_0>0$, $\mu>-1$, $\nu>-1$ (И. Н. Векуа [9]). 变更常数 μ 及 ν 的值，就可以得出許多具有实际意义的情形. 例如，当 $\mu=0$, $\nu=0.9$ 时，就可以得出几乎是矩形的机翼的情形，这一点可以从下表看出.

$\frac{t}{a}=$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\frac{b(t)}{b_0}=$	1.00	1.02	1.03	1.05	1.06	1.06	1.03	0.95	0.75

对下述情形来讲，亦同样能得出一个非常簡单的結果：

$$b(t)=b_0\sqrt{1-\frac{t^2}{a^2}}\,\frac{1+\nu_1\frac{t^2}{a^2}+\cdots+\nu_n\frac{t^{2n}}{a^{2n}}}{1+\mu_1\frac{t^2}{a^2}+\cdots+\mu_n\frac{t^{2n}}{a^{2n}}},\tag{23}$$

其中 b_0, μ_j, ν_j 皆为常数. 当所有 $\mu_j=0$ 时，我們可以得到一个特殊形状的机翼，H. Schmidt[1] 曾經研究这一种情形，但是，他所給出的解法是非常复杂的.

讀者还可以从前面已經提到过的 Л. Г. Магнарадзе 及 И. Н. Векуа 的論文中，特别，从后一位著者的論文中，找到对方程(17)更深入一层的研究以及剛才所讲到的一些特殊情形的詳細解法.

本书 § 117 曾經对奇异积分-微分方程作过一些介紹，讀者可以参考那一节.

参 考 文 献

董光昌 ［1］ 多連通区域上的黎曼-希尔伯脫問題，数学学报，第八卷，第二期，第290～304頁.

Александрия Г. Н. [1] Обобщенная задача Газемана для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. 12, № 10, 1951, стр. 585～590.

[2] Об одной граничной задаче линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. 14, № 2, 1953, стр. 65～70.

Аткинсон Ф. В. [1] Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах, Матем. сб., т. 28 (70), № 1, 1951, стр. 3～14.

Ахиезер Н. И. [1] О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 9, № 4, 1945, стр. 275～290.

Бабенко К. И. [1] О сопряженных функциях, Докл. АН СССР, т. 62, № 2, 1948, стр. 157～160.

Батырев А. В. [1] Приближенное решение задачи Римана—Привалова, Успехи матем. наук, т. 11, вып. 5, 1956, стр. 71～76.

Бицадзе А. В. [1] Граничные задачи для систем линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа, Сообщ. АН ГрузССР, т. V, № 8, 1944, стр. 761～770 (на груз. яз.).

[2] Об одной системе функций, Успехи матем. наук, т. 5, вып. 4, 1950, стр. 154～155.

[3] К общей задаче смешанного типа, Докл. АН СССР, т. 78, № 4, 1951, стр. 621～624.

[4] К проблеме уравнений смешанного типа, Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 61, 1953, стр. 1～60. (“混合型微分方程”，孙和生譯，吳新謀校，科学出版社，1955年.)

[5] Об одном элементарном способе решения некоторых граничных задач теории голоморфных функций и связанных с ними особых интегральных уравнений. Успехи матем. наук, т. 12, вып. 5, 1957, стр. 185～190.

[6] Уравнения смешанного типа, Изд-во АН СССР, М., 1959.

Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Тавхелидзе А. Н. [1] Применение методов Н. И. Мусхелишвили для решения сингулярных интегральных уравнений в квантовой теории поля, Проблемы механики сплошной среды (сборник),

изд. АН СССР, М., 1961, стр. 45~59. (Problems of Continum Mechanics, SIAM, 1961.)

Боярский Б. В. [1] Об одной граничной задаче теории функций, Докл. АН СССР, т. 119, № 2, 1958, стр. 199~202.

[2] Об особом случае задачи Римана—Гильберта, Докл. АН СССР, т. 119, № 3, 1958, стр. 411~414.

[3] Классы гомотопии матричных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXI, № 3, 1958, стр. 263~269.

[4] Об устойчивости задачи Гильберта для голоморфного вектора, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXI, № 4, 1958, стр. 391~397.

[5] Задачи Римана—Гильберта для голоморфного вектора, Докл. АН СССР, т. 126, № 4, 1959, стр. 695~698.

Векуа Илья Н. [1] О сингулярных линейных интегральных уравнениях, содержащих интегралы в смысле главного значения по Коши, Докл. АН СССР, т. XXVI, № 4, 1940, стр. 335~338.

[2] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с интегралом в смысле главного значения по Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 7, 1941, стр. 579~586.

[3] О приведении сингулярных интегральных уравнений к уравнениям Фредгольма, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 8, 1941, стр. 697~700.

[4] Интегральные уравнения с особым ядром типа Коши, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. X, 1941, стр. 45~72.

[5] Об одном новом интегральном представлении аналитических функций и его приложении, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 6, 1941, стр. 477~484; Дополнения к работе «Об одном новом интегральном представлении...», там же, № 8, 1941, стр. 701~706.

[6] Об изгибе пластинки со свободным краем, Сообщ. АН ГрузССР, т. III, № 7, 1942, стр. 641~648.

[7] К теории сингулярных интегральных уравнений, Сообщ. АН ГрузССР, т. III, № 9, 1942, стр. 869~876.

[8] Об одной линейной граничной задаче Римана, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XI, 1942, стр. 109~139.

[9] Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля, Прикл. матем. и мех., т. 9, № 2, 1945, стр. 143~150.

[10] Новые методы решения эллиптических уравнений, М.—Л., 1948. ("椭圆型方程的新解法",侯宗义譯,上海科学技术出版社,1964 年.)

[11] Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек, Матем. сб., т. 31, № 2, 1952, стр. 217~314. ("一阶椭圆型微分方程組与边值問題及其在

薄壳理論上的应用”,中国科学院数学研究所偏微分方程組譯,高等教育出版社,1960年2月.)

[12] Граничная задача с косой производной для уравнения эллиптического типа, Докл. АН СССР, т. XCII, № 6, 1953, стр. 1113~1116.

[13] Обобщенные аналитические функции, Москва, 1959. (“广义解析函数”,中国科学院数学研究所偏微分方程組及北京大学数学力学系函数論教研組合譯,人民教育出版社,1960年4月.)

Векуа Николай П. [1] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений и некоторые краевые задачи теории потенциала, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. X, 1941, стр. 73~92 (на груз. яз.).

[2] К теории систем сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. IV, № 3, 1943, стр. 207~214.

[3] Задача Римана с разрывными коэффициентами для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. V, № 1, 1944, стр. 1~10 (на груз. яз.).

[4] К теории систем сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами, Сообщ. АН ГрузССР, т. V, № 2, 1944, стр. 125~134 (на груз. яз.).

[5] Об одной линейной граничной задаче Римана с разрывными коэффициентами для системы аналитических функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. V, № 5, 1944, стр. 473~482 (на груз. яз.).

[6] Сингулярное интегральное уравнение общего вида с разрывными коэффициентами, Сообщ. АН ГрузССР, т. VI, № 1, 1945, стр. 3~10 (на груз. яз.).

[7] Система сингулярных интегральных уравнений общего вида с разрывными коэффициентами, Сообщ. АН ГрузССР, т. VI, № 3, 1945, стр. 185~194 (на груз. яз.).

[8] Краевая задача Гильберта с рациональными коэффициентами для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. VII, № 9~10, 1946, стр. 595~600.

[9] Обобщенная краевая задача Гильберта для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. VIII, № 9~10, 1947, стр. 577~584.

[10] Одно замечание о системе сингулярных интегральных уравнений, Тр. Тбилисск. ун-та, т. XXXa, 1947, стр. 31~38 (на груз. яз.).

[11] Об одной обобщенной системе сингулярных интегральных уравнений, Сообщ. АН ГрузССР, т. IX, № 3, 1948, стр. 153~160.

[12] Обобщенная краевая задача Гильберта для нескольких неизвестных функций, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XVI, 1948, стр. 81~102 (на груз. яз.).

[13] О некоторых краевых задачах теории логарифмического потенциала, Тр.

Тбилисск. ун-та, т. XXXIV, 1948, стр. 311~327 (на груз. яз. с русск. резюме).

[14] Граничная задача Гильберта и системы сингулярных интегральных уравнений в случае кусочно-гладких контуров, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XVII, 1949, стр. 31~40 (на груз. яз.).

[15] Об одной граничной задаче теории функций комплексного переменного, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XVII, 1949, стр. 41~46.

[16] Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, М.—Л., 1950. ("奇异积分方程組以及某些边值問題", 路見可譯, 上海科学技术出版社, 1963年6月.)

[17] Граничная задача Гильберта для нескольких неизвестных функций в случае несвязных областей, Сообщ. АН ГрузССР, т. XI, № 9, 1950, стр. 533~538.

[18] Об одной задаче Гильберта с разрывными коэффициентами и её применении к сингулярным интегральным уравнениям, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XVIII, 1951, стр. 307~313.

[19] Граничная задача Карлемана для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. XII, № 1, 1952, стр. 9~14.

[20] Об одной граничной задаче теории функций комплексного переменного для нескольких неизвестных функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 16, № 2, 1952, стр. 157~180.

[21] Об одной задаче теории функций комплексного переменного, Докл. АН СССР, т. XXXVI, № 3, 1952, стр. 457~460.

[22] Об одной обобщенной граничной задаче теории функций комплексного переменного, Тр. Тбилисск. ун-та, т. 52, 1954, стр. 1~9 (на груз. яз.).

[23] Об одной граничной задаче линейного сопряжения, Докл. АН СССР, т. XCIX, № 2, 1954, стр. 173~176.

[24] Об одной граничной задаче линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций, Тр. Тбилисск. ун-та, т. 56, 1955, стр. 75~80.

[25] Об одной граничной задаче линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций, с заданными смещениями, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXI, 1955, стр. 169~189.

[26] Об одной обобщенной граничной задаче Карлемана для нескольких неизвестных функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 20, № 3, 1956, стр. 377~384.

[27] Об одной граничной задаче линейного сопряжения, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXIV, 1957, стр. 135~147.

[28] Об одной системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и её приложениях в граничных задачах линейного сопряжения, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXIV, 1957, стр. 135~147.

[29] Об одной дифференциальной граничной задаче линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций в случае разомкнутых контуров, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXI, № 5, 1958, стр. 514～518.

[30] Об одной граничной задаче линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXII, № 1, 1959, стр. 3～8.

[31] Задача Коши для сингулярного интегро-дифференциального уравнения, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXII, № 6, 1959, стр. 641～648.

Векуа Н. П. и Исаханов Р. С. [1] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений, разрешаемых эффективно, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXIII, № 3, 1959, стр. 257～264.

Векуа Н. П. и Квеселава Д. А. [1] Об одной краевой задаче теории функций комплексного переменного, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 3, 1941, стр. 233～240.

[2] Об одной краевой задаче теории функций комплексного переменного и её применении к решению системы сингулярных интегральных уравнений, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. IX, 1941, стр. 38～48.

Гагуа М. Б. [1] О поведении аналитических функций и их производных в замкнутых областях, Сообщ. АН ГрузССР, т. X, № 8, 1949, стр. 451～456.

Ганин М. П. [1] Эквивалентно-регуляризирующий оператор для системы сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. XXIX, № 3, 1951, стр. 385～387.

[2] Эквивалентная регуляризация системы сингулярных интегральных уравнений, Сообщ. АН ГрузССР, т. XII, № 9, 1951, стр. 517～523.

[3] Об одной общей краевой задаче для аналитических функций, Докл. АН СССР, т. XXIX, № 6, 1951, стр. 921～924.

[4] Об обобщенной системе сингулярных интегральных уравнений, Сообщ. АН ГрузССР, т. XII, № 10, 1951, стр. 591～596.

Гапошкин В. Ф. [1] Одно обобщение теоремы М. Рисса о сопряженных функциях, Матем. сб., т. 46, № 3, 1958, стр. 359～372.

Гахов Ф. Д. [1] О краевой задаче Римана, Матем. сб., т. 2(44), № 4, 1937, стр. 673～683.

[2] Линейные краевые задачи теории функций комплексного переменного, Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва и Научно-исслед. ин-та матем. и мех. при Казанск. ун-те, 3 сер., т. X, 1938, стр. 39～79.

[3] Краевые задачи теории аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения, Диссертация на соискание степени доктора физ.-матем. наук(защищена 26.10 1942 г. в Совете Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР).

[4] Краевые задачи аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения, Изв. Казанск. физ.-матем. об-ва при Казанск. ун-те, сер. 3,

т. XIV, 1949, стр. 75～160.

[5] О краевой задаче Римана для системы n пар функций, Докл. АН СССР, т. XVII, № 4, 1949, стр. 601～606.

[6] О краевой задаче Римана для системы n пар функций с разрывными коэффициентами, Докл. АН СССР, т. XXIII, № 2, 1950, стр. 261～264.

[7] Об особенных случаях краевой задачи Римана, Докл. АН СССР, т. 80, №5, 1951, стр. 705～708.

[8] Особые случаи краевой задачи Римана для системы n пар функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 16, № 2, 1952, стр. 147～156.

[9] Краевая задача Римана для системы n пар функций, Успехи матем. наук, т. 7, вып. 4, 1952, стр. 3～54.

[10] Краевые задачи, М., 1958.

Гахов Ф. Д. и Крикунов Ю. М. [1] Топологические методы теории функций комплексного переменного и их приложения к обратным краевым задачам, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 20, № 2, 1956, стр. 207～240.

Гахов Ф. Д. и Чибрикова Л. И. [1] О краевой задаче Римана для случая пересекающихся контуров, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 113, кн. 10, 1953, стр. 107～110.

[2] О некоторых типах сингулярных интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме, Матем. сб., т. 35, 1954, стр. 395～436.

Гахов Ф. Д. и Хасабов Э. Г. [1] Краевая задача Гильберта для многосвязной области, Изв. высших учебных заведений, № 1(2), 1958, стр. 12～23.

Гегелия Т. Г. [1] О некоторых сингулярных интегральных уравнениях частного вида, Сообщ. АН ГрузССР, т. XIII, № 10, 1952, стр. 581～586.

[2] Граничная задача Гильберта и сингулярные интегральные уравнения в случае пересекающихся контуров, Сообщ. АН ГрузССР, т. XV, № 2, 1954, стр. 69～76.

Геронимус Я. Л. [1] О касательной производной логарифмического потенциала простого слоя, Докл. АН СССР, т. 91, № 6, 1953, стр. 1257～1260.

[2] О некоторых интегральных уравнениях, докл. АН СССР, т. 98, № 1, 1954, стр. 5～7.

[3] О некоторых свойствах функций, непрерывных в замкнутом круге, Докл. АН СССР, т. 98, № 6, 1954, стр. 889～891.

[4] О некоторых свойствах аналитических функций, непрерывных в замкнутом круге или круговом секторе, Матем. сб., т. 38, № 3, 1956, 319～330.

[5] О дифференциальных свойствах некоторых функций, представляемых сингулярными интегралами, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 20, № 6, 1956, стр. 775～782.

Голубев В. В. [1] Однозначные аналитические функции с совершенным

множеством особых точек, Уч. зап. МГУ, отд. физ.-мат., вып. 29, 1916, стр. 1～161.

Голузин Г. М. и Крылов В. И. [1] Обобщение формулы Carlemann'a и приложение её к аналитическому продолжению функций, Матем. сб., т. 40, № 2, 1933, стр. 144～149.

Гольденвейзер А. Л. [1] О применении решений задачи Римана—Гильберта к расчету безмоментных оболочек, Прикл. матем. и мех., т. XV, вып. 2, 1951, стр. 149～166.

Гохберг И. Ц. [1] О линейных уравнениях в нормированных пространствах, Докл. АН СССР, т. XXVI, № 4, 1951, стр. 477～480.

[2] О линейных операторах, аналитически зависящих от параметра, Докл. АН СССР, т. XXVIII, № 4, 1951, стр. 629～632.

[3] Об одном применении теории нормированных колец к сингулярным интегральным уравнениям, Успехи матем. наук, т. VII, вып. 2(48), 1952, стр. 149～156.

[4] О системах сингулярных интегральных уравнений, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, т. 11, 1954, стр. 55～60.

[5] О числе решений однородного сингулярного интегрального уравнения с непрерывными коэффициентами, Докл. АН СССР, т. 122, № 3, 1958, стр. 327～330.

Гохберг И. Ц. и Крейн М. Г. [1] Об устойчивой системе частных индексов задачи Гильберта для нескольких неизвестных функций, Докл. АН СССР, т. 119, № 5, 1958, стр. 854～857.

[2] Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, Успехи матем. наук, т. XIII, вып. 2, 1958, стр. 3～72.

Гусейнов А. И. [1] Об одном классе нелинейных сингулярных интегральных уравнений, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 12, № 2, 1948, стр. 193～212.

[2] К теории линейных сингулярных интегральных уравнений, Тр. Азерб. ун-та, сер. физ.-матем., т. 3, 1953, стр. 65～84.

Давыдов Н. А. [1] Непрерывность интеграла типа Коши в замкнутой области, Докл. АН СССР, т. XIV, № 6, стр. 759～762.

Данилюк И. И. [1] Задача Гильберта с измеримыми коэффициентами, Сибирский матем. ж., т. 1, № 2, 1960, стр. 171～197.

[2] К теории одномерных сингулярных уравнений, Проблемы механики сплошной среды (сборник), изд. АН СССР, М., 1961, стр. 135～144.

Иванов В. В. [1] Приближенное решение особых интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 110, № 1, 1956, стр. 15～18.

[2] Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений в случае

разомкнутых контуров интегрирования, Докл. АН СССР, т. 111, № 5, 1956, стр. 933～936.

[3] О применении метода моментов и «смешанного» метода к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 114, № 5, 1957, стр. 945～948.

[4] Некоторые свойства особых интегралов типа Коши и их приложения, Докл. АН СССР, т. 121, № 5, 1958, стр. 793～794.

[5] Некоторые свойства особых интегралов, Изв. высших учебных заведений, Математика, № 4, 1958, стр. 89～95.

[6] Приближенное решение краевой задачи Римана для систем n пар функций, Докл. АН СССР, т. 129, № 1, 1959, стр. 27～29.

Исаханов Р. С. [1] Дифференциальная граничная задача линейного сопряжения и её применение в теории интегро-дифференциальных уравнений, Сообщ. АН ГрузССР, т. XX, № 6, 1958, стр. 659～666.

[2] О некоторых дифференциальных граничных задачах теории аналитических функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXI, № 1, 1958, стр. 11～18.

[3] Об одном классе дифференциальных граничных задач, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXV, № 5, 1960, стр. 517～524.

[4] Об одном классе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, Докл. АН СССР, т. 132, № 2, 1960, стр. 264～267.

Каландия А. И. [1] Решение основной n-гармонической задачи в случае бесконечной области, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XVII, 1949, стр. 169～189.

[2] Основная n-гармоническая задача для многосвязных областей, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 15, № 2, 1951, стр. 185～198.

[3] Об одной смешанной задаче изгиба упругой пластинки, Прикл. матем. и мех., т. XVI, вып. 3, 1952, стр. 271～282.

[4] Общая смешанная задача изгиба упругой пластинки, Прикл. матем. и мех., т. XVI, вып. 5, 1952, стр. 513～532.

[5] Об одном прямом методе решения уравнения теории крыла и его применений в теории упругости, Матем. сб., т. 42, № 2, 1957, стр. 249～272.

[6] О приближенном решении одного класса сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 125, № 4, 1959, стр. 715～718.

Канторович Л. В. и Крылов В. И. [1] Приближенные методы высшего анализа, изд. 3-е, М.—Л., 1950.

Карцивадзе И. Н. [1] О поведении интеграла типа Коши вблизи концов пути интегрирования, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, 1951, стр. 257～263.

[2] Об одной формуле перестановки интегралов, Сообщ. АН ГрузССР, т. XVI,

№ 1, 1955, стр. 3～10.

[3] О сингулярном интегральном операторе с разрывными коэффициентами, Докл. АН СССР, т. 109, № 3, 1956, стр. 450～452.

Карцивадзе И. Н. и Хведелидзе Б. В. [1] Об одной формуле обращения, Сообщ. АН ГрузССР, т. X, № 10, 1949, стр. 587～591.

[2] Об интеграле типа Коши, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XX, 1954, стр. 211～244 (на груз. яз. с подробным русск. резюме).

Квеселава Д. А. [1] Сингулярные интегральные уравнения с разрывными коэффициентами, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XIII, 1944, стр. 1～27 (на груз. яз. с подробным русск. резюме).

[2] Задача Римана—Гильберта для многосвязной области, Сообщ. АН ГрузССР, т. VI, № 8, 1945, стр. 581～590 (на груз. яз.).

[3] Решение одной граничной задачи теории функций, Докл. АН СССР, т. 53, № 8, 1946, стр. 683～686.

[4] Об одной граничной задаче теории функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. VII, № 9～10, 1946, стр. 609～614.

[5] Решение одной граничной задачи Т. Карлемана, Докл. АН СССР, т. 55, № 8, 1947, стр. 683.

[6] Некоторые граничные задачи теории функций, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XVI, 1948, стр. 39～90.

[7] Граничная задача Гильберта и сингулярные интегральные уравнения в случае пересекающихся контуров, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XVII, 1949, стр. 1～27.

Келдыш М. В. и Лаврентьев М. А. [1] Sur la représentation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables, Ann. École Norm., t. 54, 1937, p. 1～38.

Келдыш М. В. и Седов Л. И. [1] Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций, Докл. АН СССР, т. XVI, № 1, 1937, стр. 7～10.

Колмогоров А. Н. [1] Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier, Fundam. math., t. 7, 1925, p. 23～28.

[2] Sur un procédé d'intégration de M. Denjoy, Fundam. math., t. 11, 1928, p. 27～28.

Крейн М. Г. [1] Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, Успехи матем. наук, т. 13, вып. 5, 1958, стр. 3～120.

Крикунов Ю. М. [1] О решении обобщенной краевой задачи Римана и линейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 112, кн. 10, 1952, стр. 191～199.

[2] О решении обобщенной краевой задачи Римана и линейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения, Докл. АН СССР, т. 85, № 2, 1952, стр. 269～272.

[3] Обобщенная краевая задача Римана и линейное интегро-дифференциальное уравнение, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 116, кн. 4, 1956, стр. 3～29.

Купрадзе В. Д. [1] О некоторых сингулярных интегральных уравнениях математической физики, Успехи матем. наук, вып. 2, 1936, стр. 196～237.

[2] К решению задачи Дирихле для многосвязной области, Сообщ. Груз. фил. АН СССР, т. 1, № 8, 1940, стр. 569～571.

[3] К теории интегральных уравнений с интегралом в смысле главного значения по Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 1～2, 3, 7, 1941, стр. соотв. 23～28, 227～231, 587～596; Изв. АН СССР, сер. матем., т. 5, № 3, 1941, стр. 255～262.

[4] О проблеме эквивалентности в теории особых интегральных уравнений, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 9, 1941, стр. 793～798.

[5] Об одной формуле композиции сингулярных интегралов, Тр. Тбилисск. ун-та, т. XXIII, 1942, стр. 159～164.

[6] Некоторые новые замечания к теории сингулярных интегральных уравнений, Тр. Тбилисск. ун-та, т. 42, 1951, стр. 2～23.

[7] Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen, Berlin, 1956. (俄文原版为 Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, Гостехиздат, 1950.)

Лаврентьев М. А. [1] Sur la correspondance entre les frontières dans la représentation conforme, Матем. сб., т. 36, 1929, стр. 112～115.

[2] О построении потока, обтекающего дугу заданной формы, Тр. ЦАГИ, вып. 118, М., 1932.

[3] О некоторых граничных задачах в теории однолистных функций, Матем. сб., т. 1 (43), № 6, 1936, стр. 815～846.

Лехницкий С. Г. [1] О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит, Прикл. матем. и мех., т. II, № 2, 1938, стр. 181～210.

Лузин Н. Н. [1] Интеграл и тригонометрический ряд, М., 1915.

Магнарадзе Л. Г. [1] Об одном новом интегральном уравнении теории крыла самолета, Сообщ. АН ГрузССР, т. III, № 6, 1942, стр. 503～508.

[2] Об одной системе линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и о линейной граничной задаче Римана, Сообщ. АН ГрузССР, т. IV, № 1, 1943, стр. 3～9.

[3] Теория одного класса линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и её применения к задаче колебания крыла аэроплана конечного размаха, удара о поверхность воды и аналогичным, Сообщ. АН

ГрузССР, т. IV, № 2, 1943, стр. 103~110.

[4] Об одном обобщении теоремы Племеля—Привалова, Сообщ. АН ГрузССР, т. VIII, № 8, 1947, стр. 509~516.

[5] Об одной линейной граничной задаче Римана—Гильберта, Сообщ. АН ГрузССР, т. VIII, № 9~10, 1947, стр. 535~590.

[6] О касательной производной логарифмического потенциала простого слоя, Сообщ. АН ГрузССР, т. VIII, № 9~10, 1947, стр. 591~596.

[7] Об одной линейной граничной задаче теории функций комплексного переменного, Докл. АН СССР, т. XIV, № 1, 1949, стр. 17~20.

[8] Об одном обобщении теоремы И. И. Привалова и его применении к некоторым линейным граничным задачам теории функций и к сингулярным интегральным уравнениям, Докл. АН СССР, т. XVIII, № 4, 1949, стр. 657~660.

Манджавидзе Г. Ф. [1] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами, Сообщ. АН ГрузССР, т. XI, № 5, 1950, стр. 269~274.

[2] Об одной системе сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами, Сообщ. АН ГрузССР, т. XI, № 6, 1950, стр. 351~356.

[3] Об одном сингулярном интегральном уравнении с разрывными коэффициентами и его применении в теории упругости, Прикл. матем. и мех., т. XV, вып. 3, 1951, стр. 279~296.

[4] О приближенном решении граничных задач теории функций комплексного переменного, Сообщ. АН ГрузССР, т. 14, № 10, 1953, стр. 577~582.

[5] О приближенном решении граничных задач теории аналитических функций, Тр. Третьего Всесоюзного матем. съезда, т. 1, 1956, стр. 88.

[6] Приближенное решение граничных задач теории аналитических функций, Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного (сборник статей под редакцией А. И. Маркушевича), М., 1960, стр. 365~370.

Манджавидзе Г. Ф. и Хведелидзе Б. В. [1] О задаче Римана—Привалова с непрерывными коэффициентами, Докл. АН СССР, т. 123, № 5, 1958, стр. 791~794.

Маркушевич А. И. [1] Об одной граничной задаче теории аналитических функций, Уч. зап. МГУ, т. 1, вып. 100, 1946, стр. 20~29.

[2] Несколько замечаний об интегралах типа Коши, Уч. зап. МГУ, т. 1, вып. 100, 1946, стр. 31~33.

[3] Теория аналитических функций, М.—Л., 1950. (“解析函数論”,黄正中等譯, 高等教育出版社, 1957 年.)

[4] Вклад Ю. В. Сохоцкого в общую теорию аналитических функций,

Историко-математические исследования, вып. III, М.—Л., 1950, стр. 399~406.

Мельник И. М. [1] Исключительный случай краевой задачи Римана, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. 24, 1957, стр. 149~162.

[2] О краевой задаче Римана с разрывными коэффициентами, Изв. высших учебных заведений, № 2 (9), 1959, стр. 158~166.

[3] Поведение интеграла типа Коши вблизи точек разрыва плотности и особый случай краевой задачи Римана, Уч. зап. физ.-матем. фак. Ростовск.-н/Д ун-та, т. 43, № 6, 1959, стр. 59~71.

Месис А. В. [1] Задача Римана над полем алгебраических функций, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 110, кн. 7, 1950, стр. 51~60.

[2] О краевой задаче Римана над полем алгебраических функций, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 112, кн. 9, 1952, стр. 3~16.

[3] О краевой задаче Римана над полем алгебраических функций для системы n пар функций, Укр. матем. ж., т. 8, 1956, стр. 441~449.

Михлин С. Г. [1] Об одной задаче теории сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 15, № 8, 1937, стр. 429~432.

[2] Проблема эквивалентности в теории сингулярных интегральных уравнений, Матем. сб., нов. сер., т. 3 (45), № 1, 1938, стр. 121~141.

[3] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. XXIV, № 4, 1939, стр. 315~317.

[4] Об одной теореме Ф. Нетера, Докл. АН СССР, т. 43, № 4, 1944, стр. 143~145.

[5] О разрешимости линейных уравнений в гильбертовом пространстве, Докл. АН СССР, т. 57, № 1, 1947, стр. 11~12.

[6] Сингулярные интегральные уравнения с непрерывными коэффициентами, Докл. АН СССР, т. 59, № 3, 1948, стр. 435~438.

[7] Сингулярные интегральные уравнения, Успехи матем. наук, т. III, вып. 3 (25), 1948, стр. 29~112. (“奇异积分方程”,潘文熙譯,数学进展,第四卷,第一期, 1958 年,第 55~122 頁.)

[8] Об интегральном уравнении F. Tricomi, Докл. АН СССР, т. 59, № 6, 1948, стр. 1053~1056.

Мусхелишвили Н. И. [1] Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la Physique Mathématique, Тбилиси, изд. Тбилисского ун-та, 1922.

[2] О решении задачи Дирихле на плоскости, Сообщ. Груз. фил. АН СССР, т. 1, № 2, 1940, стр. 99~106.

[3] Замечания относительно основных граничных задач теории потенциала, Сообщ. Груз. фил. АН СССР, т. 1, № 3, 1940, стр. 169~170; Исправление

погрешности, там же, № 7, стр. 567.

[4] О решении основных граничных задач теории ньютонова потенциала, Прикл. матем. и мех., т. IV, № 4, 1940, стр. 3～26.

[5] Об основной смешанной краевой задаче теории логарифмического потенциала для многосвязных областей, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 4, 1941, стр. 309～313.

[6] Приложение интеграла типа Коши к одному классу сингулярных интегральных уравнений, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. X, 1941, стр. 1～43.

[7] Системы сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. III, № 10, 1942, 987～994.

[8] Замечание к статье «Системы сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши», Сообщ. АН ГрузССР, т. IV, № 2, 1943, стр. 99～101.

[9] Некоторые основные задачи математической теории упругости, 4-е изд., АН СССР, 1954. (“数学彈性力学的几个基本問題”, 赵惠元譯, 科学出版社, 1958 年.)

Мусхелишвили Н. И. и Авазашвили Д. З. [1] О решении основных контурных задач теории логарифмического потенциала, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. 7, 1940, стр. 1～24.

Мусхелишвили Н. И. и Векуа Н. П. [1] Краевая задача Римана для нескольких неизвестных функций и её приложение к системам сингулярных интегральных уравнений, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XII, 1943, стр. 1～46.

Мусхелишвили Н. И. и Квеселава Д. А. [1] Сингулярные интегральные уравнения с ядрами типа Коши на разомкнутых контурах, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XI, 1942, стр. 141～172.

Никольский С. М. [1] Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 7, № 3, 1943, стр. 147～166.

Привалов И. И. [1] Sur les fonctions conjuguées, Bull. Soc. math. France, t. 44, 1916, p. 100～103.

[2] Интеграл Cauchy, Изв. Саратовского ун-та за 1918 г., Саратов, 1919.

[3] Об одной граничной задаче в теории аналитических функций, Матем. сб., т. 41, № 4, 1934, стр. 519～526.

[4] Об интегралах типа Коши, Докл. АН СССР, т. XXIII, № 9, 1939, стр. 859～862.

[5] Об интеграле типа Коши—Стильтьеса, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 4, № 3, 1940, стр. 261～276.

[6] Введение в теорию функций комплексного переменного, изд. 8-е, М.—Л.,

1948. (“复变函数引論”，北京大学数学分析与函数論教研組譯，高等教育出版社，1956年.)

[7] Граничные свойства однозначных аналитических функций, изд. 2-е под ред. А. И. Маркушевича, М., 1950. (“解析函数的边界性质”，吳亲仁譯，科学出版社，1956年.)

Рогожин В. С. [1] Один класс бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, Докл. АН СССР, т. 114, № 3, 1957, стр. 486～489.

Родин Ю. Л. [1] Об условиях разрешимости краевых задач Римана и Гильберта на римановых поверхностях, Докл. АН СССР, т. 129, № 6, 1959, стр. 1234～1237.

[2] О задаче Римана на замкнутых римановых поверхностях, Докл. АН СССР, т. 132, № 5, 1960, стр. 1038～1040.

Седов Л. И. [1] Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, М.—Л., 1950.

Симоненко И. Б. [1] Краевая задача Римана с непрерывным коэффициентом, Докл. АН СССР, т. 124, № 2, 1959, стр. 278～282.

[2] Краевая задача Римана с измеримым коэффициентом, Докл. АН СССР, т. 135, № 3, 1960, стр. 538～541.

Смирнов В. И. [1] Sur les valeurs limites das fonctions régulières à l'intérieur d'un cercle, Ж. Ленингр. физ.-матем. о-ва, т. 2, 1928, стр. 22～37.

[2] Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problémes qui s'y rattachent, Изв. АН СССР, VII сер., 1932, стр. 337～372.

[3] Ueber die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung, Math. Ann., Bd. 107, 1932, S. 313～323.

[4] Курс высшей математики, 5 томов, М., 1957～1959. (“高等数学教程”，孙念增等譯，高等教育出版社.)

Смирнов М. М. [1] Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа, Вестн. Ленингр. ун-та, сер. матем., мех. и астр., № 1, 1957, стр. 80～96.

Соболев С. Л. [1] Об одной предельной задаче теории логарифмического потенциала и её применении к отражению плоских упругих волн, Тр. Сейсмолог. ин-та АН СССР, № 11, 1930, стр. 1～9.

Софронов И. Д. [1] О некоторых свойствах сингулярных операторов и решений сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 110, № 6, 1956, 940～942.

[2] К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 111, № 1, 1956, стр. 37～39.

Сохоцкий Ю. В. [1] Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды, С.-Петербург, 1873.

Тумаркин Г. Ц. [1] Об интегралах типа Коши—Стильтьеса, Успехи матем. наук, т. 11, вып. 4, 1956, 163～166.

Ульянов П. Л. [1] Некоторые вопросы A-интегрирования, Докл. АН СССР, т. 102, № 6, 1955, стр. 1077～1080.

[2] Об A-интеграле Коши, Успехи матем. наук, т. 11, вып. 5, 1956, стр. 223～229.

[3] Об A-интегралах Коши для контуров, Докл. АН СССР, т. 112, № 3, 1957, стр. 383～385.

Фельд Я. Н. [1] Парные системы бесконечных линейных алгебраических уравнений, связанные с бесконечными периодическими структурами, Докл. АН СССР, т. 106, № 2, 1956, стр. 215～218.

Фихтенгольц Г. М. [1] Sur l'intégrale de Poisson et quelques questions qui s'y rattachent, Fundam. math., t. 13, 1929, p. 1～33.

[2] Курс дифференциального и интегрального исчисления, 3 тома, М.—Л., 1947～1949. (“微积分教程”,楊牲亮等譯,商务印书館等出版.)

Фрейдкин С. А. [1] Решение одного класса сингулярных интегральных уравнений, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, т. 11, 1954, стр. 13～17.

[2] Оператор сингулярного интегрирования по разомкнутому контуру в пространствах с весом, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, т. 11, 1954, стр. 19～27.

[3] Области Нетера и Фредгольма сингулярного оператора, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, т. 17, 1955, стр. 17～25.

[4] Области постоянства индекса сингулярных уравнений, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, т. 24, 1956, стр. 95～104.

Фридман М. М. [1] Дифракция плоской упругой волны относительно полубесконечной прямолинейной жестко закрепленной щели, Докл. АН СССР, т. X, № 7, 1936, стр. 1145～1148.

[2] Дифракция плоской упругой волны относительно полубесконечного прямолинейного разреза, свободного от напряжений, Докл. АН СССР, т. XVI, № 1, 1949, стр. 21～24.

Хайруллин И. Х. [1] О некоторых бесконечных системах линейных алгебраических уравнений, разрешаемых в замкнутой форме, Докл. АН СССР, т. 123, № 5, 1958, стр. 795～798.

Халилов З. И. [1] Общая краевая задача для системы обобщенных полигармонических уравнений, Докл. АН СССР, т. 51, № 3, 1946, стр. 167～169.

[2] Краевые задачи для эллиптических уравнений, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 11, 1947, стр. 345～362.

[3] Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах, Баку,

1949.

Харазов Д. Ф. [1] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений, ядро которых—мероморфная функция параметра, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XIII, 1944, стр. 139~152.

Хведелидзе Б. В. [1] О краевой задаче Пуанкаре теории логарифмического потенциала, Докл. АН СССР, т. XXX, № 3, 1941, стр. 195~198.

[2] О краевой задаче Пуанкаре теории логарифмического потенциала для многосвязной области, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 7, 10, 1941, стр. 571~578, 865~872.

[3] Задача Пуанкаре для линейного дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XII, 1943, стр. 47~77 (на груз. яз. с подробным русск. резюме).

[4] Об одной линейной граничной задаче Римана для системы аналитических функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. IV, № 4, 1943, стр. 289~296.

[5] Некоторые свойства особых интегралов в смысле главного значения Коши—Лебега, Сообщ. АН ГрузССР, т. VIII, № 5, 1947, стр. 283~290.

[6] Сингулярные интегральные уравнения в особых интегралах Коши—Лебега, Сообщ. АН ГрузССР, т. VIII, № 7, 1947, стр. 427~434.

[7] О задаче Римана в теории аналитических функций и о сингулярных интегральных уравнениях с ядром типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XII, № 2, 1951, стр. 69~76.

[8] О задаче линейного сопряжения в теории аналитических функций, Докл. АН СССР, т. XXVI, № 2, 1951, стр. 177~180.

[9] О линейных сингулярных интегральных уравнениях с особым ядром типа Коши, Докл. АН СССР, т. XXVI, № 3, 1951, стр. 367~370.

[10] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XV, № 7, 1954, стр. 401~405.

[11] Некоторые формулы композиций сингулярных интегралов и их приложения к обращению интеграла типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XVI, № 2, 1955, стр. 81~88.

[12] Об одной разрывной задаче Римана—Привалова в теории аналитических функций, Докл. АН СССР, т. 102, № 6, 1955, стр. 1081~1084.

[13] О задаче Римана—Привалова в теории аналитических функций, Успехи матем. наук, т. X, вып. 3, 1955, стр. 165~171.

[14] О разрывной граничной задаче Римана—Привалова с коэффициентом, имеющим критические точки, Докл. АН СССР, т. 111, № 1, 1956, стр. 40~43.

[15] Сингулярные интегральные уравнения с ядрами Коши в классе функций, суммируемых с весом, Докл. АН СССР, т. 111, № 2, 1956, стр. 304~307.

[16] О разрывной задаче Римана—Привалова для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. XVII, № 10, 1956, стр. 865~872.

[17] О системах сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XVIII, № 2, 1957, стр. 129~136.

[18] Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXIII, 1957, стр. 3~158.

[19] Замечание к моей работе «Линейные разрывные граничные задачи теории функций. . .», Сообщ. АН ГрузССР, т. XXI, № 2, 1958, стр. 129~130.

[20] О разрывной задаче Римана—Привалова с заданным смещением, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXI, № 4, 1958, стр. 385~389.

Чакветадзе С. С. [1] Решение одной граничной задачи Газемана для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. 11, № 8, 1951, стр. 449~455.

Чеботарев Г. Н. [1] О решении матричного уравнения $e^B e^C = e^{B+C}$, Докл. АН СССР, т. 96, № 6, 1954, стр. 1109~1112.

[2] К решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для систем и пар функций, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 116, кн. 4, 1956, стр. 31~58.

[3] Частные индексы краевой задачи Римана с треугольной матрицей второго порядка, Успехи матем. наук, т. 11, вып. 3, 1956, стр. 199~202.

Чеботарев Н. Г. и Гахов Ф. Д. [1] О краевой задаче Римана для системы и пар функций, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 110, кн. 7, 1950, стр. 45~50.

Черский Ю. И. [1] Общее сингулярное уравнение и уравнение типа свертки, Матем. сб., т. 41, № 3, 1957, стр. 277~296.

Чибрикова Л. И. [1] Особые случаи обобщенной задачи Римана, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 112, кн. 10, 1954, стр. 129~154.

[2] О краевой задаче Римана для автоморфных функций, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 116, кн. 4, 1956, стр. 59~109.

[3] Эффективное решение краевой задачи Гильберта для некоторых многоугольников, ограниченных дугами окружностей, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 117, кн. 2, 1957, стр. 22~26.

Чибрикова Л. И. и Рогожин В. С. [1] О сведении некоторых краевых задач к обобщенной задаче Римана, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 112, кн. 10, 1952, стр. 123~127.

Чикин Л. А. [1] Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 113, кн. 10, 1953, стр. 57~105.

[2] Об устойчивости краевой задачи Римана, Докл. АН СССР, т. 111, № 1, 1956, стр. 44~46.

Шерман Д. И. [1] Смешанная задача теории потенциала и теории упругости для плоскости с конечным числом прямолинейных разрезов, Докл. АН СССР, т. XXVII, № 4, 1940, стр. 330~334.

[2] К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных на границе смещениях, Докл. АН СССР, т. XXVII, № 9, 1940, стр. 911~914.

[3] Смешанная задача статической теории упругости для плоских многосвязных областей, Докл. АН СССР, т. XXVIII, № 1, 1940, стр. 29~32.

[4] Некоторые замечания к задаче Дирихле, Докл. АН СССР, т. XXIX, № 4, 1940, стр. 286~287.

[5] К общей задаче теории потенциала, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 10, № 2, 1946, стр. 121~134.

[6] Об одном случае в теории сингулярных уравнений, Докл. АН СССР, т. IX, № 4, 1948, стр. 647~650.

[7] О приемах решения некоторых сингулярных интегральных уравнений, Прикл. матем. и мех., т. XII, вып. 4, 1948, стр. 423~452.

[8] К уравнению Прандтля в теории крыла конечного размаха, Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, № 5, 1948, стр. 595~600.

[9] Об одном случае регуляризации сингулярных уравнений, Прикл. матем. и мех., т. XV, вып. 1, 1951, стр. 75~82.

[10] О связи основной задачи теории упругости с одним особым случаем задачи Пуанкаре, Прикл. матем. и мех., т. XVII, 1953, стр. 685~692.

Шмульян Ю. Л. [1] Задача Римана с положительно определенной матрицей, Успехи матем. наук, т. 8, вып. 2, 1953, стр. 143~145.

[2] Задача Римана с эрмитовой матрицей, Успехи матем. наук, т. 9, вып. 4, 1954, стр. 243~248.

Berg L. [1] Lösungsverfahren für singuläre Integralgleichungen I, Math. Nachr., Bd. 15, H. 4~6, 1956, S. 193~212.

[2] Lösungsverfahren für singuläre Integralgleichungen II, Univ. Rostock 4, Math.-Nat. Reihe, H. 3, 1954/55, S. 381~391.

[3] Über die Resolvente einer singulären Integralgleichung, Math. Nachr., Bd. 15, H. 5~6, 1956, S. 339~352.

Bertrand G. [1] Equations de Fredholm à intégrales principales au sens de Cauchy, C. r. Acad. sci., Paris, t. 172, 1921, p. 1458~1461.

[2] Le problème de Dirichlet et le potentiel de simple couche, Bull. sci. math., 2 sér., t. XLVII, 1923, p. 282~288 et 298~307.

[3] La théorie des marées et les équations intégrales, Ann. scient. École norm. supér., 3 sér., t. XL, 1923, p. 151~258.

Birkhoff G. D. [1] A theorem on matrices of analytic functions, Math. Ann., Bd. 74, 1913, S. 240～251.

[2] The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations, Proc. Amer. Acad. Arts and Sci., vol. 49, 1913, p. 251～268.

Carleman T. [1] Sur la résolution de certaines équations intégrales, Arkiv för mat., astr. och fys., Bd. 16, No. 26, 1922.

[2] Sur la théorie des équations intégrales et ses applications, Verhandl. des Internat. Math. Kongr., Zürich, Bd. I, 1932.

Casorati F. [1] Alcuni riflessioni relative alla teorica generale delle funzioni di variabli affatto libere, ossia complesse, Rend. del R. Istituto Lombardo, cl. sc. mat. nat., vol. III, 1866, p. 337～350.

Dragos L. [1] Asupra ecuatiei integro-diferentiale a lui Prandtl, Com. Acad. R. P. Romine, t. VIII, № 5, 1958, p. 451～459.

Elliott J: [1] On some singular integral equations of the Cauchy type, Ann. Math., vol. 54, No. 2, 1951, p. 349～369.

[2] On an integro-differential operator of the Cauchy type, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 7, No. 4, 1956, p. 616～626.

Fatou P. [1] Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta math., t. 30, 1906, p. 335～400.

Garnier R. [1] Sur le problème de Riemann—Hilbert, C. r. Acad. sci., Paris, t. 221, 1945, p. 276～278.

Gellerstedt S. [1] Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx}+z_{yy}=0$, Arkiv för mat., astr. och fys., Bd. 26, No. 1, 1938, p. 1～32.

Giraud G. [1] Équations à intégrales principales, étude suivie d'une application, Ann. scient. École norm. supér., 3 sér., t. 51, 1934, p. 251～372.

[2] Sur une classe d'équations linéaires où figurent des valeurs principales d'intégrales simples, Ibid., 3 sér., t. 56, 1939, p. 119～172.

Gladwell G. M. L. [1] Some mixed boundary value problems in isotropic thin plate theory, Quart. J. Mech. and Appl. Math., vol. XI, p. 2, 1958, p. 159～171.

[2] Some mixed boundary-value problems of aeolotropic thin plate theory, Quart. J. Mech. and Appl. Math., vol. XII, p. 1, 1959, p. 72～81.

Goursat É. [1] Cours d'analyse mathématique, t. III, 4 édit., Paris, 1927.

Hardy G. H. [1] The elementary theory of Cauchy's principal values, Proc. London Math. Soc., vol. 34, № 1, 1901, p. 16～40.

[2] The theory of Cauchy's principal values (Second Paper: the use of

principal values in some of the double limit problems of the integral calculus), Ibid., p. 55~91.

[3] The theory of Cauchy's principal values (Third Paper; differentiation and integration of principal values), Ibid., vol. 35, No. 1, 1902, p. 81~107.

[4] The theory of Cauchy's principal values (Fourth Paper: the integration of principal values—continued—with applications to the inversion of definite integrals, Ibid., ser. 2, vol. 7, No. 2, 1908, p. 181~208.

Hardy G. H. and Littlewood J. E. [1] Some more theorems concerning Fourier series and Fourier power series, Duke Math. J., vol. 2, No. 2, 1936, p. 354~382.

Harnack A. [1] Beiträge zur Theorie des Cauchy'schen Integrals, Ber. d. k. Sächs. Ges. d. Wiss., Math.-Phys. Klasse, Bd. 37, 1885, S. 379~398. Перепечатано в Math. Ann., Bd. 35, 1899, S. 1~18.

Haseman C. [1] Anwendung der Theorie der Integralgleichungen auf einige Randwertaufgaben, Göttingen, 1907.

Hellinger E. u. Toeplitz O. [1] Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Sonderausgabe aus der Encykl. d. Math. Wiss. (II C 13), 1928.

Hilbert D. [1] Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie, Verhandl. des III Internat. Math. Kongr., Heidelberg, 1904.

[2] Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig—Berlin, 1912 (2 Aufl., 1924).

Hurwitz W. A. [1] On the pseudo-resolvent to the kernel of an integral-equation, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 13, 1912, p. 405~413.

Jacob C. [1] Sur le problème de la dérivée oblique de Poincaré et sa connexion avec le problème de Hilbert, Bull. Math. Soc. Roumaine Sci., t. 42 (2), 1940, p. 9~47.

[2] Introduction mathématique à la mécanique des fluides, Bucarest—Paris, 1959.

Kellogg O. D. [1] Unstetigkeiten in der linearen Integralgleichungen, Math. Ann., Bd. 58, 1904, S. 441~456.

[2] Harmonic functions and Green's integral, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 13, 1912, p. 109~132.

[3] Foundations of Potential Theory, Berlin, 1929.

Koppelman W. [1] The Riemann—Hilbert problem for finite Riemann surfaces, Communs Pure and Appl. Math., vol. XII, No. 1, 1959, p. 13~35.

Koppelman W. and Pincus J. D. [1] Spectral representations for finite Hilbert transformations, Math. Z., Bd. 71, H. 4, 1959, S. 399~407.

Leehey P. [1] The Hilbert problem for an airfoil in unsteady flow, J. Math. Mech., vol. 6, No. 4, 1957, p. 427~453.

Liénard A. [1] Probléme plan de la dérivée oblique dans la théorie du potentiel, J. de l'Ecole polytechnique, III sér., N. 5~7, 1938, p. 35~158, 177~226.

Love E. [1] Repeated integrals involving Cauchy-principal values, J. London Math. Soc., vol. 25, No. 99, 1950, p. 184~189.

MacCamy R. C. [1] On singular integral equations with logarithmic or Cauchy kernels, J. Math. Mech., vol. 7, No. 3, 1958, p. 355~375.

Morera G. [1] Intorno all'integrale di Cauchy, Rend. del R. Istituto Lombardo, ser. II, vol. XXII, 1889, p. 191~200.

Nickel K. [1] Lösung eines speziellen Minimumproblems, Math. Z., Bd. 53, 1950, S. 21~52.

[2] Lösung eines Integralgleichungssystem aus der Tragflügeltheorie, Math. Z., Bd. 54, 1951, S. 81~96.

Noether F. [1] Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, Math. Ann., Bd. 82, 1921, S. 42~63.

Osgood W. F. [1] Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. 1, Leipzig—Berlin, 1912.

Picard É. [1] Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles, Paris, 1927.

Piechocki W. and Zorski H. [1] Thermoelastic Problem for a Wedge, Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. tech., vol. VII, № 10, 1959, p. 555~565.

Plemelj J. [1] Ein Ergänzungssatz zur Cauchy'schen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend, Monatsh. für Math. u. Phys., XIX Jahrgang, 1908, S. 205~210.

[2] Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiergruppe, Ibid., S. 211~245.

[3] Potentialtheoretische Untersuchungen, Leipzig, 1911.

Pogorzelski W. [1] Über die Transformationen einiger iterierten uneigentlichen Integrale und ihre Anwendung zur Poincaré'schen Randwertaufgabe, Math. Z., Bd. 44, 1939, S. 427~444.

[2] Sur l'équation intégrale singulière non-linéaire et sur les propriétés d'une intégrale singulière pour les arcs non fermés, J. Math. Mech., vol. 7, N. 4, 1958, p. 515~532.

[3] Probléme généralisé de Hilbert pour les arcs non fermés, Ann. scient.

Ecole norm. supér., t. LXXV, f. 3, 1958, p. 201~222.

[4] Sur certaines classes de fonctions complexes définies sur les arcs non fermés, Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. math., astr. et phys., vol. VII, No. 2, 1959, p. 57~62.

[5] Problèmes aux limites discontinus dans la théorie des fonctions analytiques, Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. math., astr. et phys., vol. VII, No. 6, 1959, p. 311~317.

[6] Sur une propriété principale d'une classe $\mathfrak{H}$ de fonctions discontinnes pour le systéme d'arcs, Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. math., astr. et phys., vol. VIII, No. 6, 1960, p. 359~364.

[7] Problèmes aux limites disontinus dans la théorie des fonctions analytiques, J. Math. Mech., vol. 9, No. 4, 1960, p. 583~606.

Poincaré H. [1] Leçons de Mécanique Céleste, t. III, Paris, 1910, Chap. X.

Radon J. [1] Über die Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential, Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. Abt. IIa, Bd. 128, H. 7, 1919.

Riemann B. [1] Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse, Göttingen, 1851; Werke, Leipzig, 1876, S. 3~43.

[2] Zwei allgemeine Lehrsätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten, Werke, Leipzig, 1876, S. 357~369.

Riesz M. [1] Sur les fonctions conjuguées, Math. Z., Bd. 27, 1927, S. 218~244.

Schaefer H. [1] Über singuläre Integralgleichungen und eine Klasse von Homomorphismen in lokalkonvexen Räumen, Math. Z., Bd. 66, H. 2, 1956, S. 147~163.

Schauder J. [1] Potentialtheoretische Untersuchungen, Erste Abhandl., Math. Z., Bd. 33, 1931, S. 602~640.

Schmidt H. [1] Strenge Lösungen zur Prandtlschen Theorie der tragenden Linie, Z. angew. Math. und Mech., Bd. 17, H. 2, 1937, S. 101~116.

Schröder K. [1] Über eine Integralgleichung erster Art der Tragflügeltheorie, Sitzungsber, Preuss. Akad. d. Wiss., Phys.-mat. Klasse, XXX, 1938, S. 345~362.

[2] Über die Prandtlsche Integro-Differentialgleichung der Tragflügeltheorie, Abhandl. d. Preuss. Akad. d. Wiss., Math.-naturwiss Klasse, 1939, No. 16.

Sewell W. E. [1] Degree of approximation by polynomials in the complex domain, Princeton, 1942.

Signorini A. [1] Sopra un problema al contorno nella teoria delle funzioni di variabile complessa, Ann. mat. pura ed appl., Ser III, t. XXV, 1916, p. 253~273.

Söhngen H. [1] Die Lösungen der Integralgleichung

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{f(\xi)\,d\xi}{x-\xi}$$

und deren Anwendung in der Tragflügeltheorie, Math. Z., Bd. 45, 1939, S. 245~264.

[2] Zur Theorie der endlichen Hilbert-Transformation, Math. Z., Bd. 60, 1954, S. 31~51.

[3] Luftkräfte an einem schwingenden Gitter, Z. angew. Math. und Mech., Bd. 35, H. 3, 1955, S. 81~88.

Tamarkin J. D. [1] On Fredholm's integral equations, whose kernels are analytic in a parameter, Ann. Math., Ser. 2, vol. 28, 1927, p. 127~152.

Titchmarsh E. C. [1] On conjugate functions, Proc. London Math. Soc., Ser. 2, vol. 29, Part 1, 1929, p. 49~80.

Tricomi F. [1] Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto, Mem. d. R. Accademia dei Lincei, ser. V, vol. XIV, fasc. VII, 1923. ("論二阶混合型綫性偏微分方程", 邱佩璋,王光寅譯,科学出版社, 1957 年, 該文亦有俄文譯本. Линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа, 俄文譯者是 Ф. И. Франкль, Гостехиздат 出版, М.—Л., 1947.)

[2] Equazioni integrali contenenti il valor principale di un integrale dappio, Math. Z., Bd. 27, 1928, S. 87~133.

[3] On the finite Hilbert-Transformation, Quart. J. Math., vol. 2, No. 7, 1951, p. 199~211.

[4] Equazioni integrali singolari del tipo di Carleman, Ann. mat. pura ed Appl., ser. quarta, t. XXXIX, 1955, 229~244.

[5] Sull'inversione dell'ordine di integrali «principali» nel senso di Cauchy, Rend. Acc. Lincei, vol. XVIII, fasc. I, 1955, p. 3~7.

Trjitzinsky W. J. [1] Singular integral equations with Cauchy kernels, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 60, No. 2, 1946, 167~214.

Velkamp G. W. [1] The drag on a vibrating aerofoil in incompressible flow, Indagationes math., vol. XX, fasc. 3, 1958, p. 278~297.

Walsch J. L. and Sewell W. E. [1] Sufficient conditions for various degrees of approximation by polinomials, Duke Math. J., vol. 6, No. 3, 1940, p. 658~705.

Warschawski S. [1] Über das Randverhalten der Ableitung der Abbil-

dungsfunktion bei konformer Abbildung, Math. Z., Bd. 35, 1932, S. 321～456.

[2] Bemerkung zu meiner Arbeit «Über das Randverhalten der Ableitung u. s. w.», Math. Z., Bd. 38, 1934, S. 669～683.

Weissinger J. [1] Ein Satz über Fourierreihen und seine Anwendung auf die Trägflügeltheorie, Math. Z., Bd. 47, 1940, S. 16～33.

Widom H. [1] Singular integral equations in L_p, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 97, No. 1, 1960, p. 131～160.

Zorski H. [1] Plates with discontinuous supports, Arch. mech. stosowanej, t. X, No. 3, 1958, p. 271～313.

[2] A semi-infinite strip with discontinuous boundary condition, Arch. mech. stosowanej, t. X, No. 3, 1958, p. 371～398.

[3] Plates with discontinuous supports, I, II, Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. tech., vol. VI, No. 3, 1958, p. 127～132 and p. 133～140.

[4] Some cases of bending of anisotropic plates, Arch. mech. stosowanej, t. XI, No. 1, 1959, p. 71～91.

Zygmund A. [1] Sur le module de continuité de la somme de la série conjuguée de la série de Fourier, Prace Matematyczno-Fizyczne, vol. 33, 1924, p. 125～132.

譯者补充文献

路見可 [1] 复合边値問題，武汉大学学报（自然科学版），第一期（总22期），1962年，第25～34頁.

[2] 解析函数边値問題中的一些想法，武汉大学学术报告选編（自然科学版），第一期，1962年，第1～8頁.

Бедоева М. Г. [1] Об одном виде граничной задачи линейного сопряжения при заданных смещениях, Сообщ, АН ГрузССР, т. 28, № 3, 1962, стр. 257～266.

Манджавидзе Г. Ф. и Хведелидзе Б. В. [2] О задаче линейного сопряжения и сингулярных интегральных уравнениях с ядром Коши с непрерывными коэффициентами, Тр. Тбил. матем. ин-та, т. 28, 1962, стр. 85～105.

Михлин С. Г. [9] Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Москва, 1962.

Черепаное Г. П. [1] Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и её приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости, Прикл. матем. и мех. т. 26, вып. 5, 1962, стр. 907～912.

索 引

二 画

三 画

四 画

五 画

六 画

七 画

八 画

九　画

十　画

十一画

十二画

十三画

十四画

十六画

十七画

[General Information]
书名=奇异积分方程 函数论边值问题及其在数学物理中的某些应用
作者=Н.И.穆斯海里什维里（苏联）
页数=684
SS号=10236721
DX号=
出版日期=1966年02月第1版
出版社=上海科学技术出版社